ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Χώρος Κατάστασης

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Από τις Καταστατικές Εξισώσεις στη Συνάρτηση Μεταφοράς

Καταστατική Εξίσωση & Εξίσωση Εξόδου:

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t) + bx(t)$$

$$y(t) = c^t\mathbf{s}(t) + d\,x(t)$$

Μετασχηματισμοί *Laplace* Καταστατικών Εξισώσεων:

$$\mathbf{s}(s) = (sI - A)^{-1}bX(s)$$

$$Y(s) = (c^t(sI - A)^{-1}b + d)\,X(s)$$

Συνάρτηση Μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = c^t(sI - A)^{-1}b + d$$

Μετασχηματισμοί Διανύσματος Κατάστασης

Ισοδύναμα Συστήματα

Έστω ένα σύστημα $\{A, b, c, d\}$ με Συνάρτηση Μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = c^t (sI - A)^{-1} b + d$$

Αν P ένας αντιστρέψιμος Πίνακας, ποιά είναι η Συνάρτηση Μεταφοράς του συστήματος $\{A_s, b_s, c_s, d_s\}$;

$$A_s = PAP^{-1}$$

$$b_s = Pb$$

$$c_s^t = c^t P^{-1}$$

Από τη Συνάρτηση Μεταφοράς στη Κρουστική Απόκριση

Συνάρτηση Μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = c^t (sI - A)^{-1} b + d$$

Κρουστική Απόκριση:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Y(s)}{X(s)}\right\} = c^t \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} b + d\delta(t)$$

Δυναμοσειρές Τετραγωνικών Πινάκων

Από το Εκθετικό Σήμα:

$$x_a(t) = e^{at} u(t) \qquad X_a(s) = \frac{1}{s-a}, \ \ \mathrm{Re}\{s\} > a$$

στο Εκθετικό Σήμα Μητρώο:

$$x_A(t) = e^{At} u(t) \qquad X_A(s) = L\{x_A(t)\} = \ldots;$$

Μετασχηματισμός Laplace Πίνακα

Άρα:

$$X_A(s) = \mathcal{L}\{x_A(t)\} = s^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(s^{-1}A)^n = (sI - A)^{-1}$$

και επομένως η Κρουστική Απόκριση:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{Y(s)}{X(s)}\} = c^t \boxed{\mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}} b + d\delta(t)$$

θα δίνεται από τη Σχέση:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{Y(s)}{X(s)}\} = c^t e^{At}u(t)b + d\delta(t)$$

Μετασχηματισμοί *Laplace* Καταστατικών Εξισώσεων

Αποκρίσεις Μηδενικής Κατάστασης & Μηδενικής Εισόδου

Καταστατικές Εξισώσεις

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t) + bx(t)$$

$$y(t) = c^t\mathbf{s}(t) + d\,x(t)$$

Μονόπλευροι Μετασχηματισμοί *Laplace* Καταστατικών Εξισώσεων

$$\boxed{\mathbf{s}(s) = (sI - A)^{-1}\mathbf{s}(0) + (sI - A)^{-1}bX(s)}$$

$$Y(s) = \underbrace{c^t(sI - A)^{-1}\mathbf{s}(0)}_{Y_{zi}(s)} + \underbrace{(c^t(sI - A)^{-1}b + d)\,X(s)}_{Y_{zs}(s)}$$

Απόκριση Μηδενικής Εισόδου *Απόκριση Μηδενικής Κατάστασης*

Χώρος Κατάστασης - Πίνακας Μετάβασης

• Ας υποθέσουμε την Ομογενή καταστατική εξίσωση:

$$\boxed{\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t)}$$

με αρχικό καταστατικό διάνυσμα **s**(0).
Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι το διάνυσμα κατάστασης $x(t)$ μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\boxed{\mathbf{s}(t) = \Phi(t)\mathbf{s}(0)}$$

όπου $\Phi(t) = e^{At}u(t)$ ο Πίνακας Καταστατικής Μετάβασης.

Χώρος Κατάστασης-Πίνακας Μετάβασης

• Ιδιότητες Πίνακα Καταστατικής Μετάβασης.

$$\Phi(0) = I$$

$$\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$$

$$\Phi(t - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t - t_0)$$

Χρονική αμεταβλητότητα

Χώρος Κατάστασης -Εξίσωση Καταστατικής Μετάβασης Λύση Δυναμικών Εξισώσεων

• Αν μας δίνονται οι δυναμικές εξισώσεις:

Εξίσωση Κατάστασης: $\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t) + bx(t)$

Εξίσωση Εξόδου: $y(t) = c^t\mathbf{s}(t) + dx(t)$

Πώς μπορούμε να εκφράσουμε τις λύσεις τους με την βοήθεια του Πίνακα Μετάβασης;

Χώρος Κατάστασης-Εξίσωση Καταστατικής Μετάβασης Λύση Δυναμικών Εξισώσεων

- Λύσεις δυναμικών εξισώσεων με αρχική συνθήκη στο $t_o\!=\!0$

$$\mathbf{s}(t) = \Phi(t)\mathbf{s}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\, b x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = c^t \Phi(t)\mathbf{s}(0) + c^t \int_0^t \Phi(t-\tau)\, b x(\tau)\, d\tau + d x(t)$$

Χώρος Κατάστασης-Εξίσωση Καταστατικής Μετάβασης
Λύση Δυναμικών Εξισώσεων

- Λύσεις δυναμικών εξισώσεων με αρχική συνθήκη στο t_o

$$\mathbf{s}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{s}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)\, b x(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = c^t \Phi(t - t_0)\mathbf{s}(t_0) + c^t \int_{t_0}^{t} \Phi(t - \tau)\, b x(\tau)\, d\tau + d x(t)$$

ΦΕΦΕ-Ασυμπτωτική-ΦΕΦΚ Ευστάθεια

Εξίσωση Κατάστασης

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t) + bx(t)$$

Ομογενής Εξίσωση Κατάστασης

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t), \;\; \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{s}_0, \;\; t \geq t_0$$

Θα λέμε ότι το δυναμικό σύστημα είναι *ασυμπτωτικά ευσταθές* *αν και μόνο αν*

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{s}(t) = 0, \;\; \forall\, \mathbf{s}(t_0)$$

ή ισοδύναμα *αν και μόνο αν*

$$\lim_{t \to \infty} \Phi(t) = O$$

Παρατηρησιμότητα- Ελεγξιμότητα

Υποθέσεις:

•*Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η τριάδα* $\{A, b, c\}$ *που περιγράφει το σύστημα στο χώρο κατάστασης.*

•*Ας υποθέσουμε επίσης ότι γνωρίζουμε την είσοδο* $x(t)$ *και μπορούμε να μετράμε την έξοδο* $y(t)$.

Ερώτημα 1.

Μπορώ να υπολογίσω το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{s}(t)$;

Παρατηρησιμότητα- Ελεγξιμότητα

Υποθέσεις:

•*Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η τριάδα* {*A*, b, *c*} *που περιγράφει το σύστημα στο χώρο κατάστασης.*

•*Ας υποθέσουμε επίσης ότι γνωρίζουμε την αρχική κατάσταση* **s**(*0*).

Ερώτημα 2.

Μπορώ να βρω ένα σήμα το οποίο αν το εφαρμόσω στην είσοδο του συστήματος να οδηγήσω σε πεπερασμένο χρόνο το σύστημα στην κατάσταση **s**(*t*)*;*

Παρατηρησιμότητα- Ελεγξιμότητα

Δεδομένων της Εξίσωσης Κατάστασης και της Εξίσωσης Εξόδου:

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t) + bx(t) \qquad y(t) = c^t\mathbf{s}(t) + d\,x(t)$$

θα λέμε ότι η κατάσταση του δυναμικού συστήματος είναι ***παρατηρήσιμη*** *τη χρονική στιγμή t_0 αν υπάρχει πεπερασμένο $t_1 > t_0$ τέτοιο ώστε αν γνωρίζουμε την είσοδο $x(t)$ και την αντίστοιχη έξοδο στο t_0, να μπορούμε να υπολογίζουμε την κατάσταση $\mathbf{s}(t_0)$. Αν αυτό ισχύει για κάθε t_0 θα λέμε ότι το αντίστοιχο σύστημα είναι* ***παρατηρήσιμο****.*

Πίνακας Παρατηρησιμότητας:

$$O^T(A,c) = [c \;\; A^T c \; A^{T2} c \;\; \ldots \;\; A^{TN-1} c]$$

Παρατηρησιμότητα-Ελεγξιμότητα

Δεδομένης της Εξίσωσης Κατάστασης:

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t) + bx(t)$$

θα λέμε ότι η κατάσταση του δυναμικού συστήματος είναι ελέγξιμη τη χρονική στιγμή t_0 *αν υπάρχει πεπερασμένο* $t_1 > t_0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\mathbf{s}(t_0)$ *υπάρχει είσοδος* $x(t)$ $[t_0\ t_1]$, *που μπορεί να οδηγήσει την* $\mathbf{s}(t_0)$ *σε οποιαδήποτε επιθυμητή κατάσταση* $\mathbf{s}(t_1)$. *Αν αυτό ισχύει για κάθε* t_0 *θα λέμε ότι το αντίστοιχο σύστημα είναι ελέγξιμο.*

Πίνακας Ελεγξιμότητας:

$$C(A,b) = [b\ Ab\ A^2b\ \ \ldots\ A^{N-1}b]$$

Παρατηρησιμότητα-Ελεγξιμότητα

Το κλασσικό test της ορίζουσας των μητρώων:

$$\det(O^T(A,c))=0,\ \det(C(A,b))=0$$

Το test των Popov-Belevitch-Hautus (PBH)

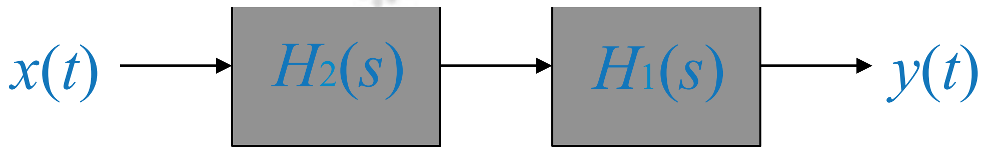
1. *Το ζευγάρι {A, c} δεν είναι παρατηρήσιμο όταν και μόνο όταν:*

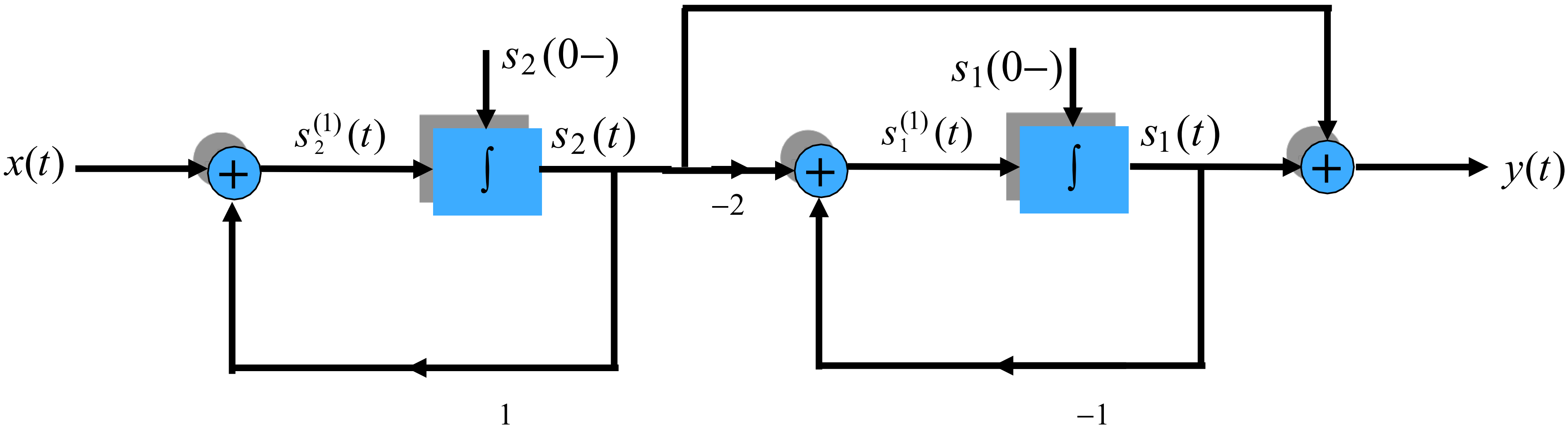
$$\exists q:\ Aq=\lambda q,\ c^t q=0$$

2. *Το ζευγάρι {A,b} δεν είναι ελέγξιμο όταν και μόνο όταν:*

$$\exists q:\ q^t A=\lambda q^t,\ q^t b=0$$

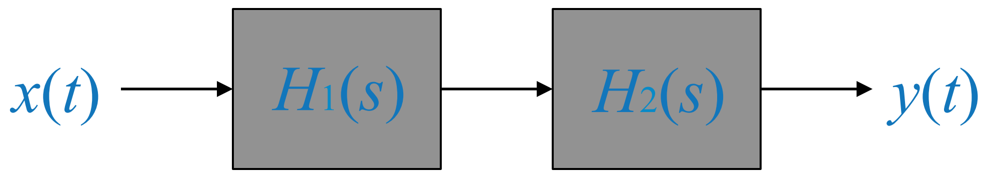
Παρατηρησιμότητα-Ελεγξιμότητα

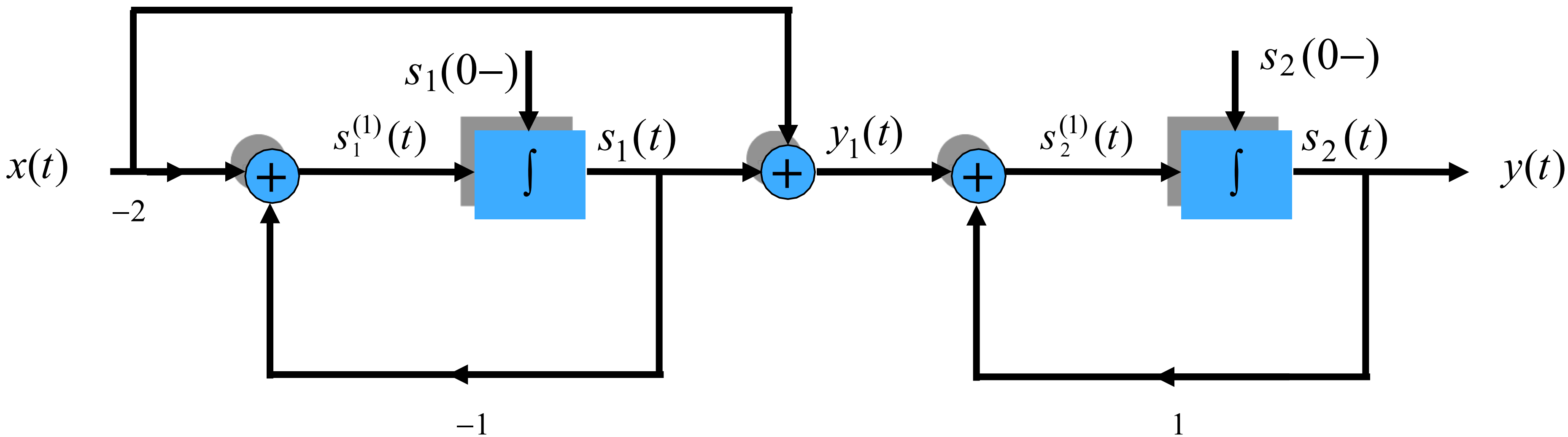




$$y(t) = y(0)e^{-t}u(t) + e^{-t}u(t) * x(t)$$

Παρατηρησιμότητα-Ελεγξιμότητα





$$y(t) = y(0)e^{t}\,u(t) + \frac{y_1(0)}{2}(e^{t} - e^{-t})\,u(t) + e^{-t}u(t) * x(t)$$

ΜΔΕ και Σειρές Fourier

Κυματική Εξίσωση

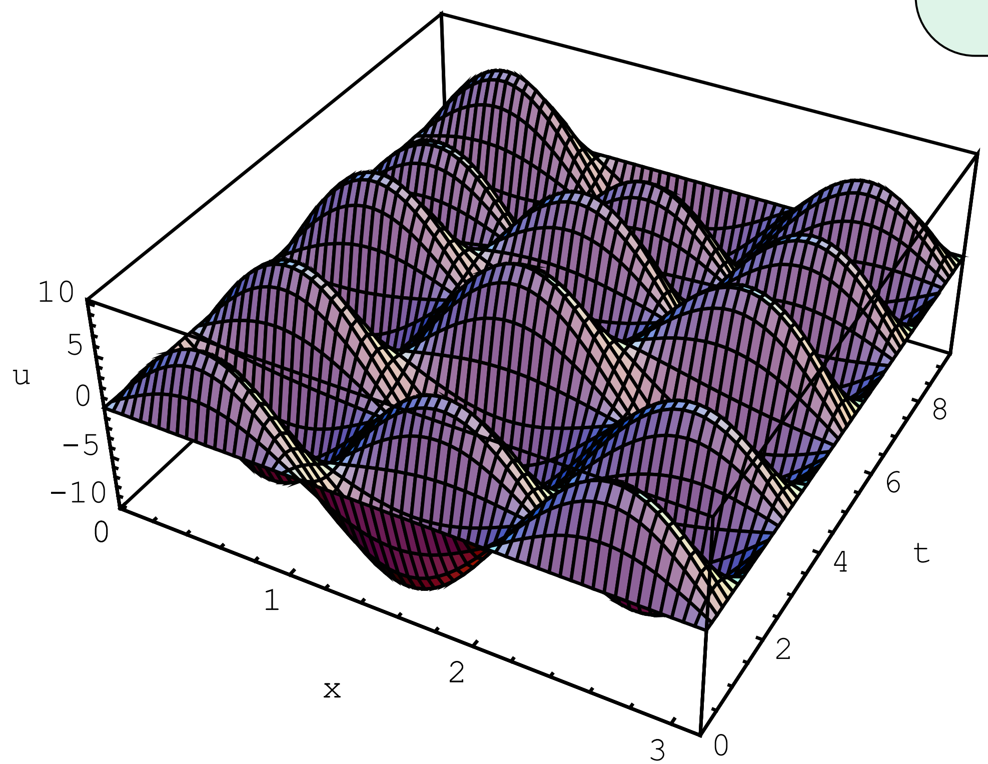
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 = u(l,t) \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x)$$



ΜΔΕ και Σειρές Fourier

Κυματική Εξίσωση

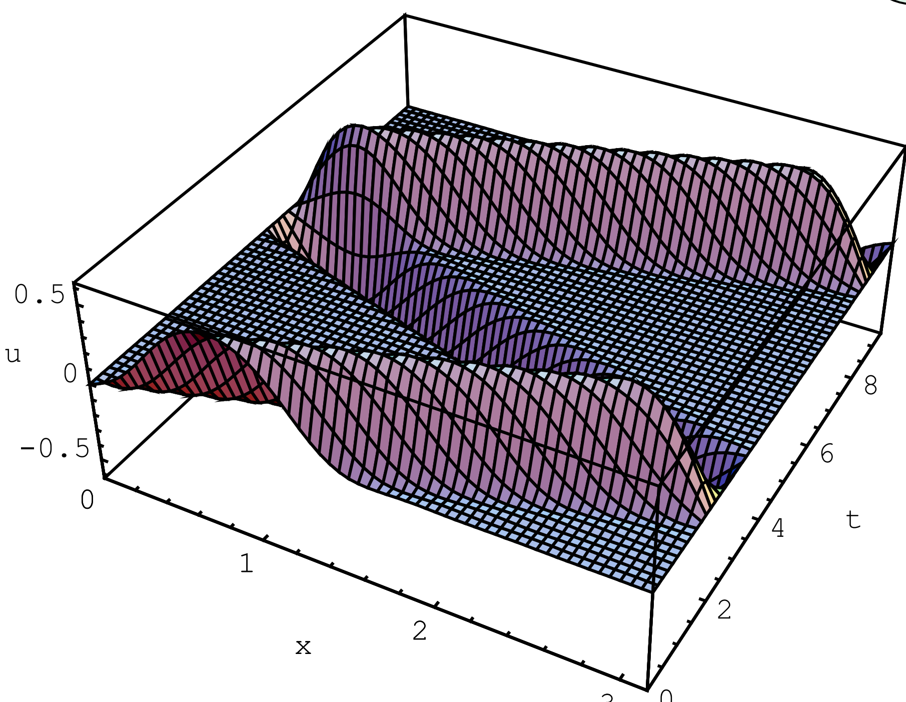
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 = u(l,t) \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathrm{g}(\mathrm{x})$$



ΜΔΕ και Σειρές Fourier

Κυματική Εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Συνθήκες

$$u(0,t) = 0 = u(l,t) \forall t \geq 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = g(x)$$