



# **ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**

**Χώρος Κατάστασης**

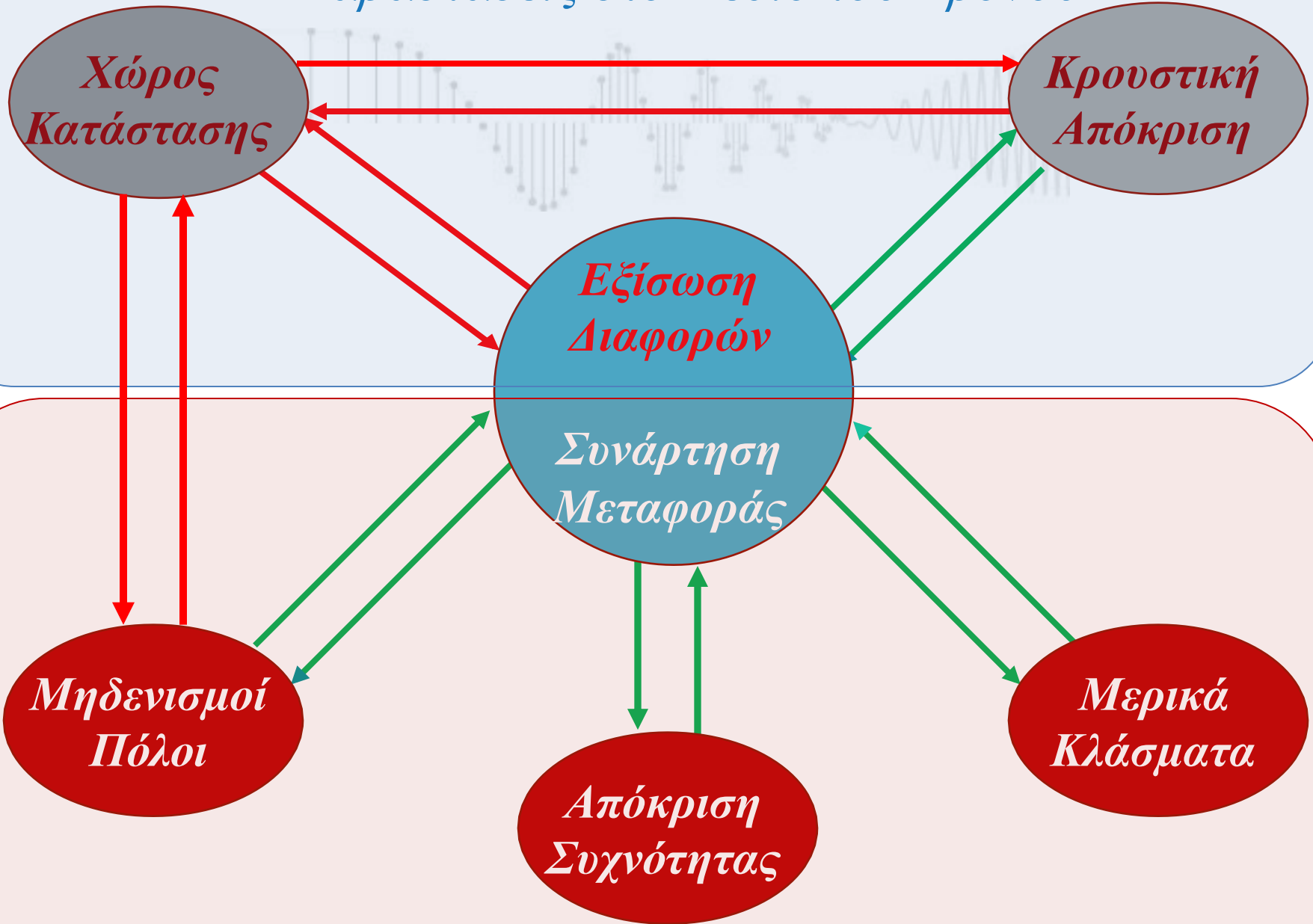
**Μοντέλα Πεπερασμένων Διαφορών & Παραγώγων**

**Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης**

**Πολυτεχνική Σχολή**

**Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής**

## Παραστάσεις στο Πεδίο του Χρόνου

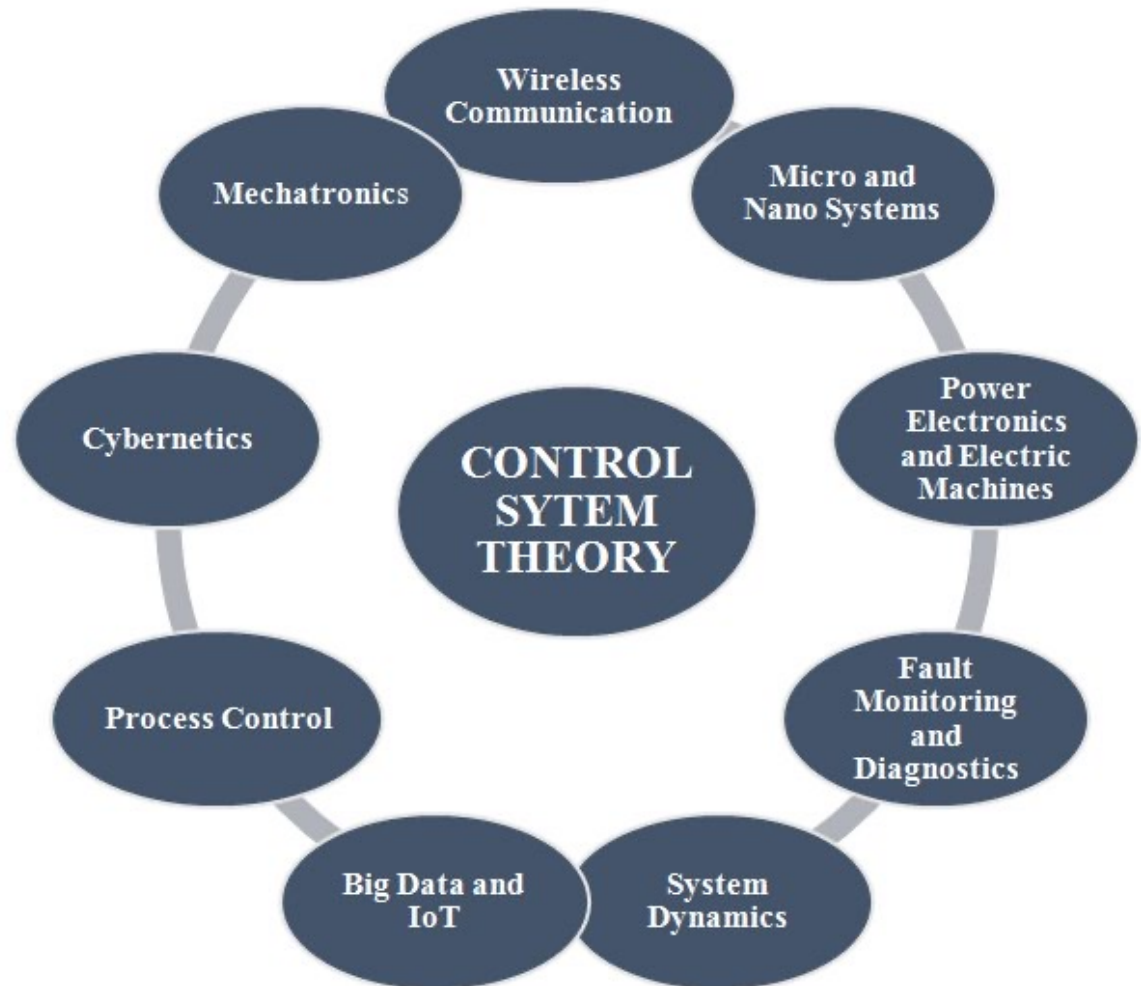


## Παραστάσεις στο Μιγαδικό Επίπεδο

# ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

## Χώρος Κατάστασης

Rudolf E. Kalman  
1930-2016



# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

- Μοντέλο Πεπερασμένων Παραγώγων
- Μοντέλο Πεπερασμένων Διαφορών
- **Καταστατικές Αναπαραστάσεις**

## Βασικά χαρακτηριστικά των αναπαραστάσεων

- Οι υπολογισμοί της εξόδου έχουν αναδρομικό χαρακτήρα
- Η μνήμη που απαιτούν είναι πεπερασμένη και σταθερή

## Πλεονεκτήματα

- Επιτρέπουν την περιγραφή μη γραμμικών διαδικασιών με φυσικό τρόπο.
- Απεικονίζονται με φυσικό τρόπο σε υπολογιστικές δομές είτε υλικού είτε λογισμικού.

# Γραμμικές Αναδρομικές Αναπαραστάσεις



- *Περίπτωση ΣΔΕ-ΓΧΑ Συστήματος Συνεχούς Χρόνου*

$$y^{(p)}(t) = \sum_{m=1}^{p-1} a_m y^{(p-1)}(t) + \sum_{m=0}^r b_m x^{(m-1)}(t)$$

- *Περίπτωση ΣΕΔ-ΓΧΑ Συστήματος Διακριτού Χρόνου*

$$y[n] = \sum_{m=1}^{p-1} a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^r b_m x[n-m]$$

# Γραμμικές Αναδρομικές Αναπαραστάσεις



- *Περίπτωση ΔΕ-ΓΧΜ Συστήματος Συνεχούς Χρόνου*

$$y^{(p)}(t) = \sum_{m=1}^{p-1} a_m(t) y^{(p-1)}(t) + \sum_{m=0}^r b_m(t) x^{(m-1)}(t)$$

- *Περίπτωση ΕΔ-ΓΧΜ Συστήματος Διακριτού Χρόνου*

$$y[n] = \sum_{m=1}^{p-1} a_m[n] y[n-m] + \sum_{m=0}^r b_m[n] x[n-m]$$

# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις



- ΜΓΧΑ Μοντέλο Πεπερασμένων Παραγώγων

$$y^{(p)}(t) = F(y^{(p-1)}(t), \dots, y^{(1)}(t), y(t), x(t), \dots, x^{(r)}(t))$$

- ΜΓΧΑ Μοντέλο Πεπερασμένων Διαφορών

$$y[n] = F(y[n-1], \dots, y[n-p], x(n), x(n-1), \dots, x(n-r))$$

# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις



- ΜΓΧΜ Μοντέλο Πεπερασμένων Παραγώγων

$$y^{(p)}(t) = F(y^{(p-1)}(t), \dots, y^{(1)}(t), y(t), x(t), \dots, x^{(r)}(t), t)$$

- ΜΓΧΜ Μοντέλο Πεπερασμένων Διαφορών

$$y[n] = F(y[n-1], \dots, y[n-p], x(n), x(n-1), \dots, x(n-r), n)$$



# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

Εξωτερική και Εσωτερική Περιγραφή Συστήματος

Υλοποίηση Συστημάτων -Χώρος Κατάστασης

Η εξωτερική περιγραφή ενός Συστήματος μπορεί να υλοποιηθεί με περισσότερους από έναν τρόπο !!!

Για παράδειγμα η εξωτερική περιγραφή του Συστήματος ...

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] + 2x[n-1]$$

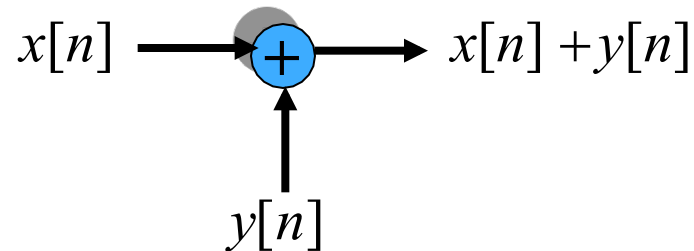
μπορεί να υλοποιηθεί με παραπάνω από έναν τρόπους ;...

# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

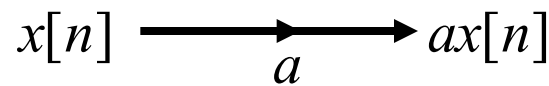
Εξωτερική και Εσωτερική Περιγραφή Συστήματος

Υλοποίηση Συστημάτων – Βασικά Δομικά Στοιχεία

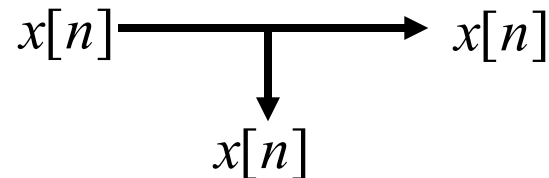
Αθροιστής:



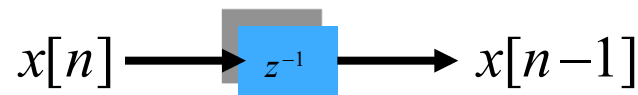
Πολλαπλασιαστής:



Διακλάδωση:



Καθυστέρηση:

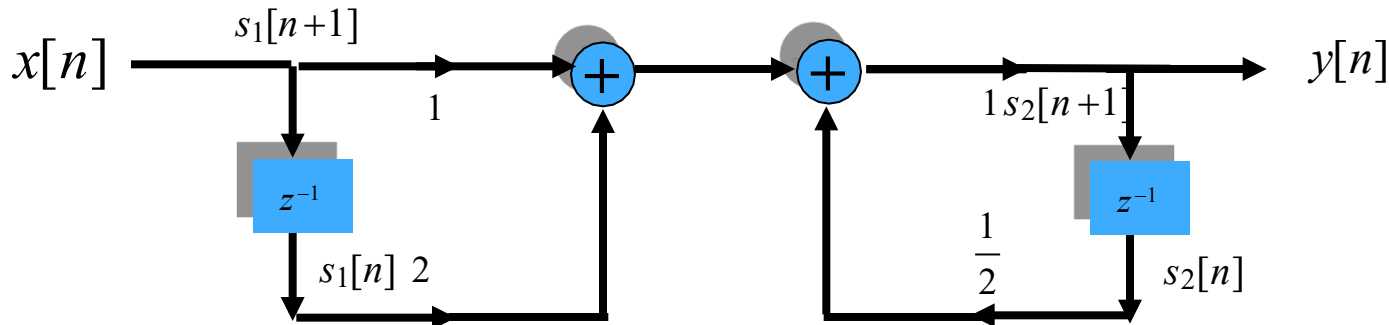


# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

Υλοποίηση Συστημάτων:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] + 2x[n-1]$$

Άμεση Υλοποίηση (Μορφή-I)

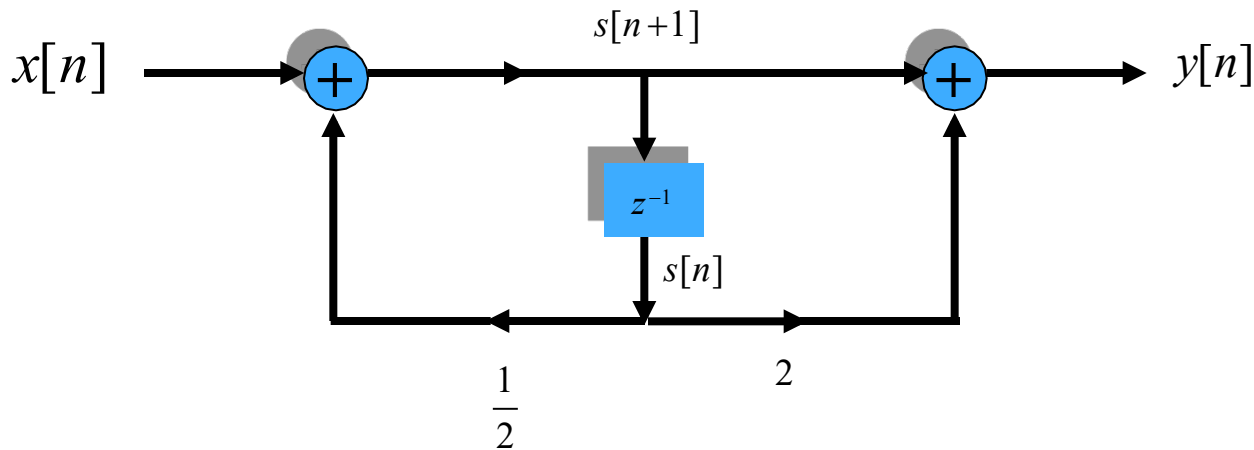


# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

Υλοποίηση Συστημάτων:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] + 2x[n-1]$$

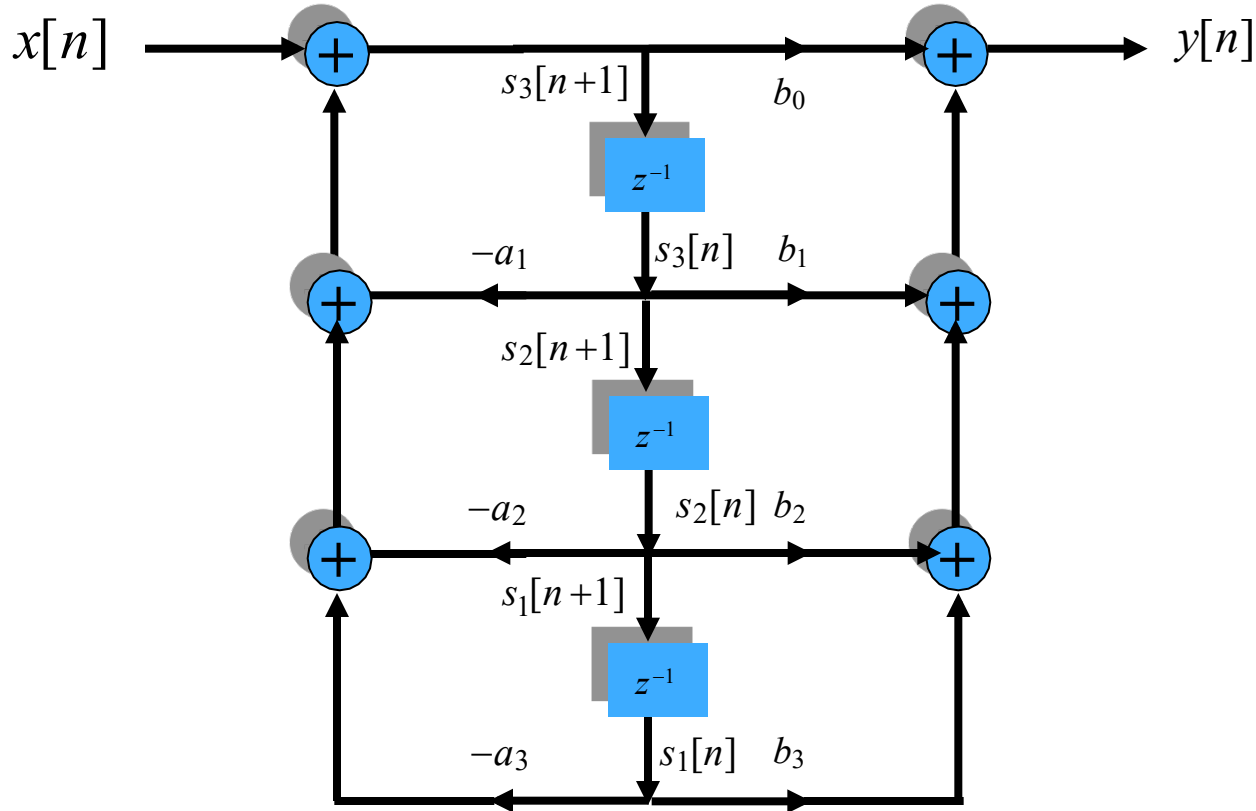
Άμεση Υλοποίηση (Μορφή-II)



# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

Υλοποίηση Συστημάτων:

$$y[n] = -\sum_{m=1}^3 a_m y[n-m] + \sum_{m=0}^3 b_m x[n-m]$$

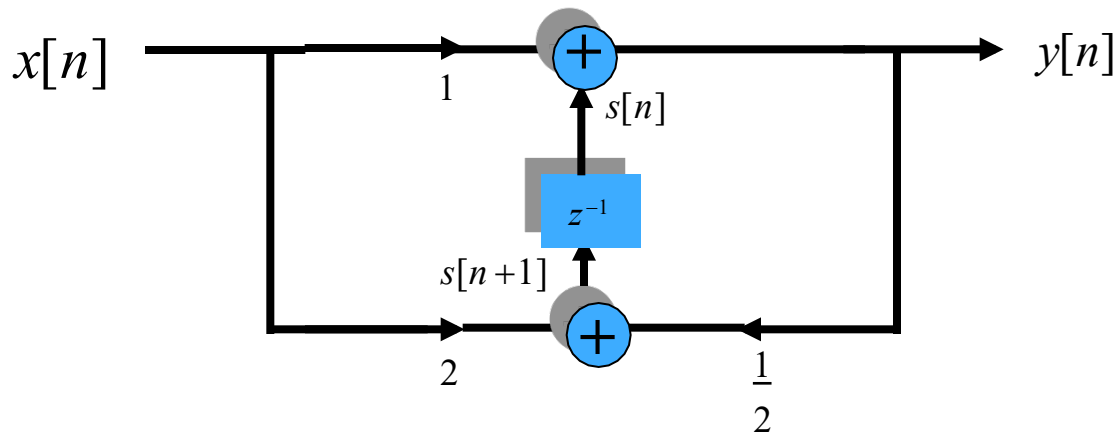


# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

Υλοποίηση Συστημάτων:

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] + 2x[n-1]$$

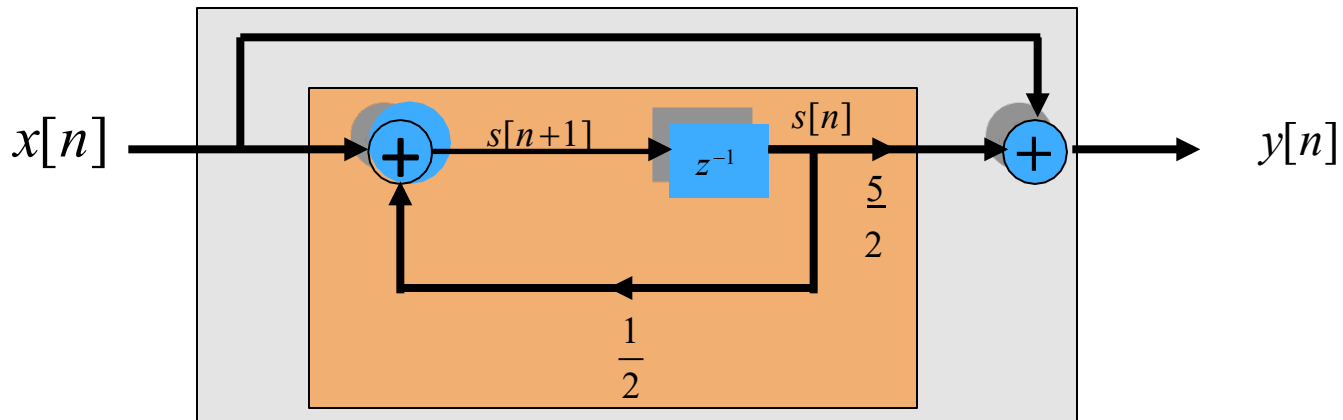
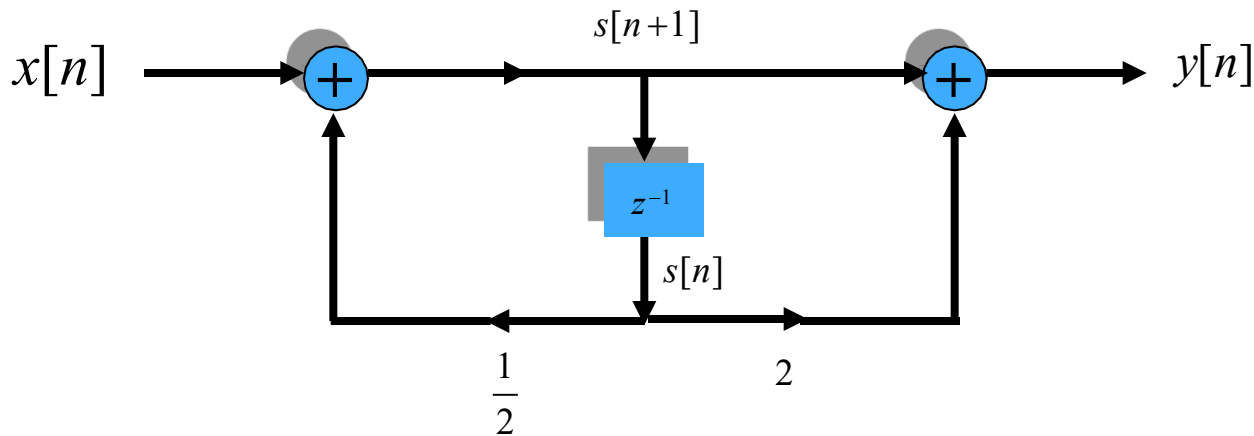
Δυϊκή Ευθείας Υλοποίησης (Μορφή-II)



# Πεπερασμένες Αναδρομικές Αναπαραστάσεις

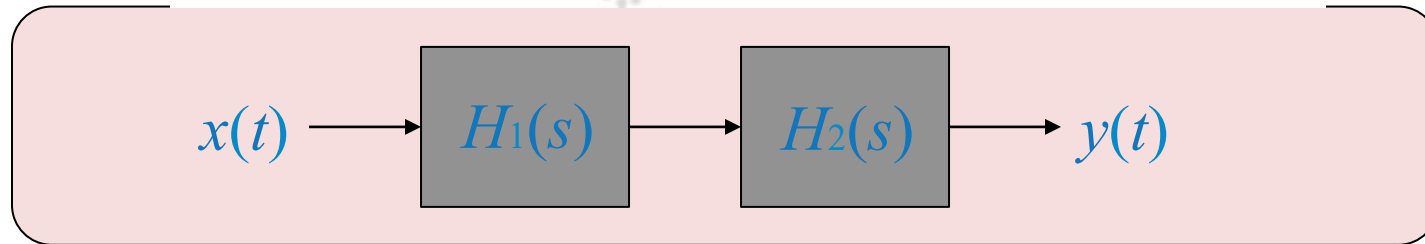
Υλοποίηση Συστημάτων Χώρος Κατάστασης !!!

$$y[n] = \frac{1}{2} y[n-1] + x[n] + 2x[n-1]$$



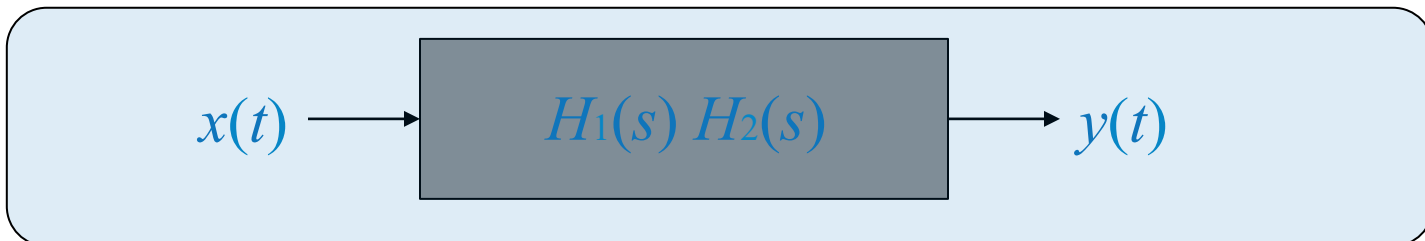
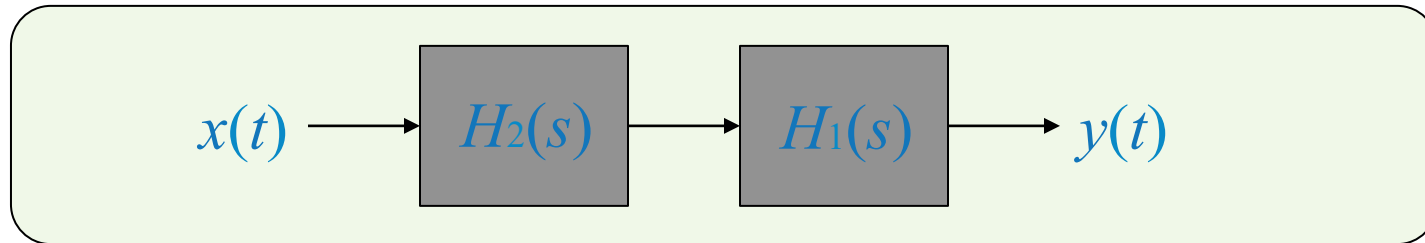
# Προβλήματα Πεπερασμένων Αναπαραστάσεων

## Εξωτερικές και Εσωτερικές Περιγραφές Συστημάτων



?

≡





# Προβλήματα Πεπερασμένων Αναπαραστάσεων Εξωτερικές και Εσωτερικές Περιγραφές Συστημάτων

$$x(t) \longrightarrow H_1(s) \longrightarrow y(t)$$

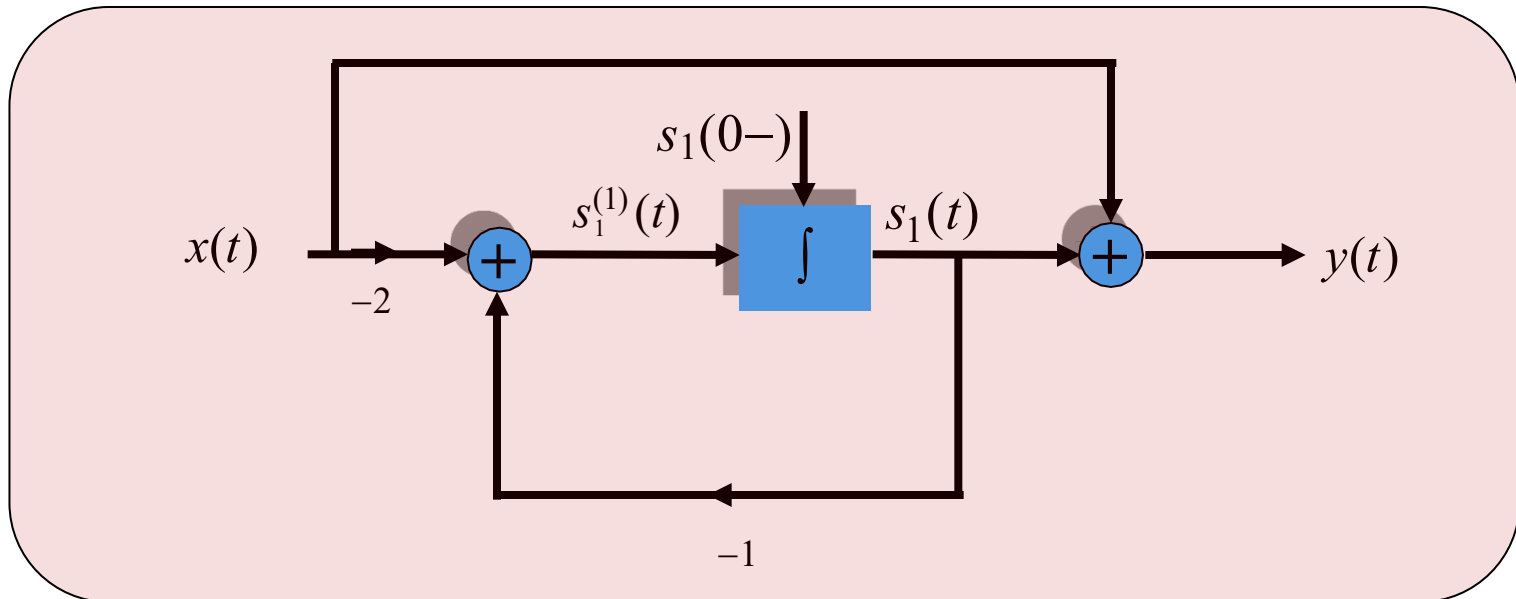
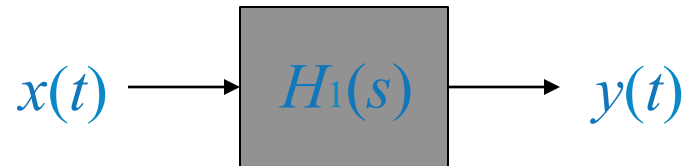
$$H_1(s) : y^{(1)}(t) + y(t) = x^{(1)}(t) - x(t)$$

$$x(t) \longrightarrow H_2(s) \longrightarrow y(t)$$

$$H_2(s) : y^{(1)}(t) - y(t) = x(t)$$

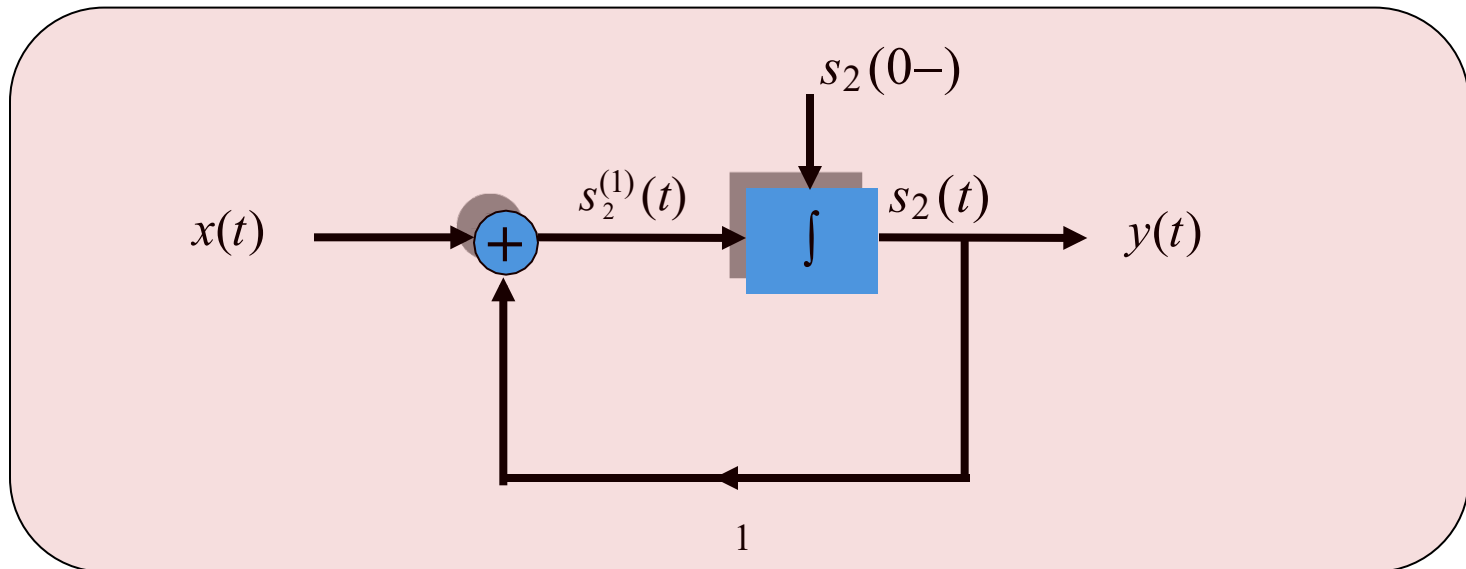
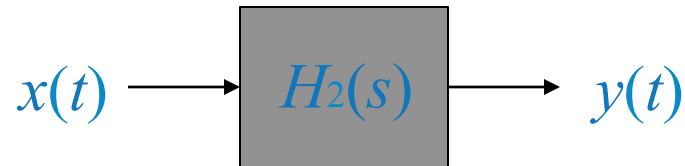
# Προβλήματα Πεπερασμένων Αναπαραστάσεων Εξωτερικές και Εσωτερικές Περιγραφές Συστημάτων

$$y^{(1)}(t) + y(t) = x^{(1)}(t) - x(t)$$



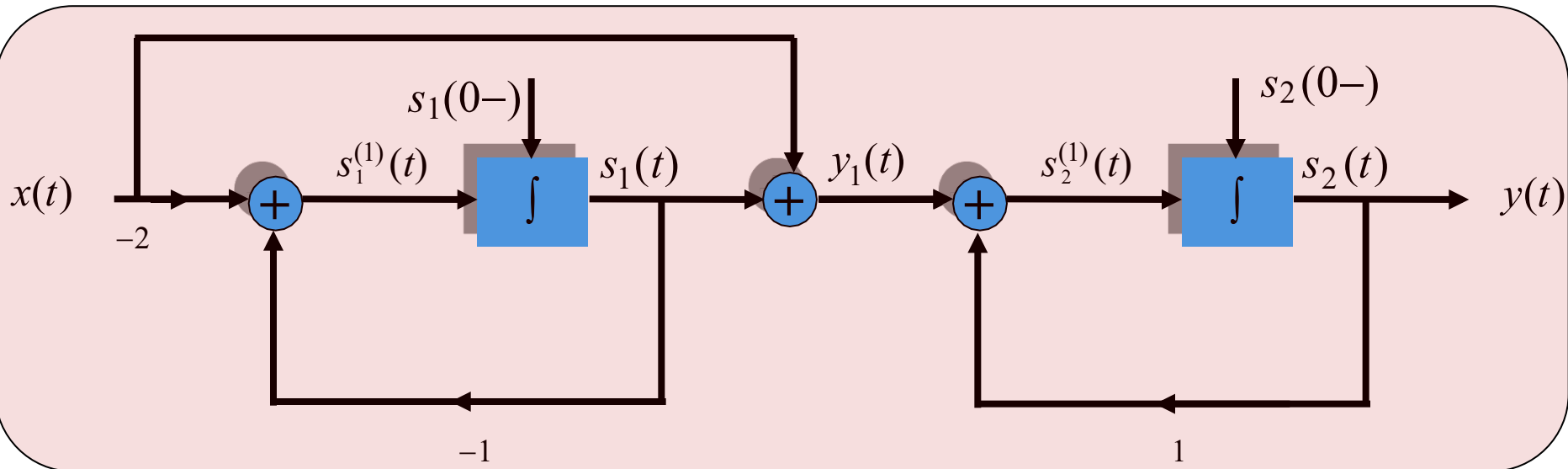
# Προβλήματα Πεπερασμένων Αναπαραστάσεων Εξωτερικές και Εσωτερικές Περιγραφές Συστημάτων

$$y^{(1)}(t) = y(t) + x(t)$$



# Προβλήματα Πεπερασμένων Αναπαραστάσεων Εξωτερικές και Εσωτερικές Περιγραφές Συστημάτων

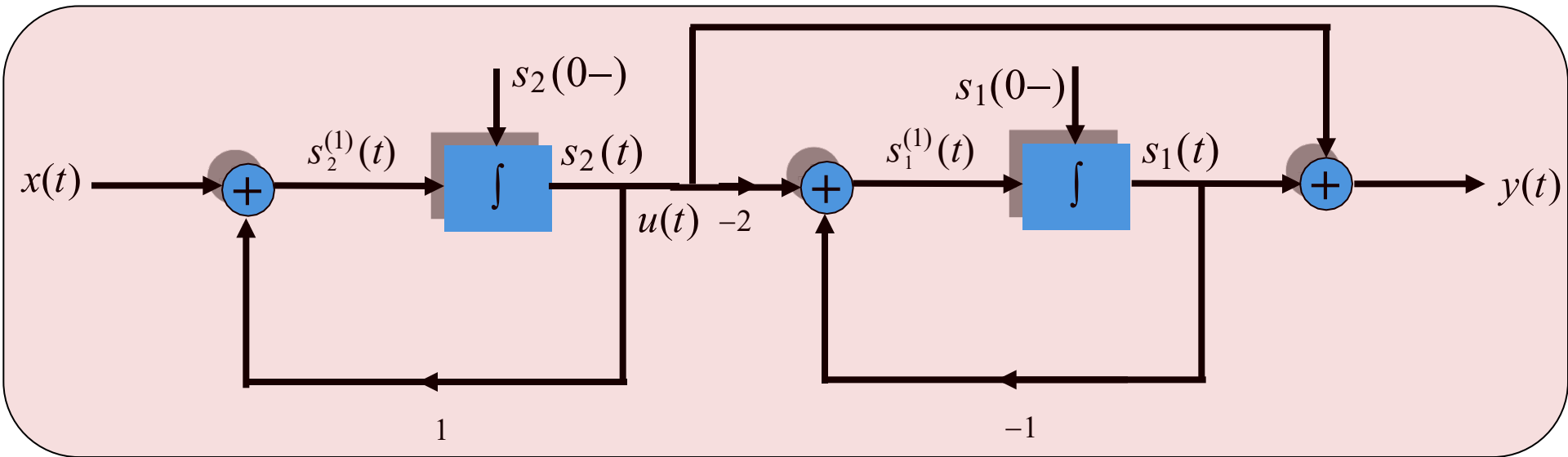
$$x(t) \longrightarrow H_1(s) \longrightarrow H_2(s) \longrightarrow y(t)$$



$$y(t) = y(0)e^t u(t) + \frac{y_1(0)}{2} (e^t - e^{-t}) u(t) + e^{-t} u(t) * x(t)$$

# Προβλήματα Πεπερασμένων Αναπαραστάσεων Εξωτερικές και Εσωτερικές Περιγραφές Συστημάτων

$$x(t) \longrightarrow H_2(s) \longrightarrow H_1(s) \longrightarrow y(t)$$



$$y(t) = ((y(0) + y_1(0))e^{-t} u(t) + e^{-t} u(t) * x(t))$$

# Καταστατικές Αναπαραστάσεις Χρονικά Αναλλοίωτων Συστημάτων

- Συνεχούς Χρόνου

*Εξίσωση Κατάστασης*

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = f(\mathbf{s}(t), x(t))$$

*Εξίσωση Εξόδου*

$$y(t) = g(\mathbf{s}(t), x(t))$$

- Διακριτού Χρόνου

*Εξίσωση Κατάστασης*

$$\mathbf{s}(n+1) = f(\mathbf{s}(n), x(n))$$

*Εξίσωση Εξόδου*

$$y(n) = g(\mathbf{s}(n), x(n))$$

# Καταστατικές Αναπαραστάσεις Χρονικά Μεταβαλλόμενων Συστημάτων

- Συνεχούς Χρόνου

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = f(\mathbf{s}(t), x(t), t)$$

$$y(t) = g(\mathbf{s}(t), x(t), t)$$

- Διακριτού Χρόνου

$$\mathbf{s}(n+1) = f(\mathbf{s}(n), x(n), n)$$

$$y(n) = g(\mathbf{s}(n), x(n), n)$$

# Καταστατικές Αναπαραστάσεις Γραμμικών ΧΑ Συστημάτων

- Συνεχούς Χρόνου

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A\mathbf{s}(t) + bx(t)$$

$$y(t) = c^t \mathbf{s}(t) + d x(t)$$

- Διακριτού Χρόνου

$$\mathbf{s}(n+1) = A\mathbf{s}(n) + b x(n)$$

$$y(n) = c^t \mathbf{s}(n) + d x(n)$$



# Καταστατικές Αναπαραστάσεις Γραμμικών ΧΜ Συστημάτων

## • Συνεχούς Χρόνου

$$\mathbf{s}^{(1)}(t) = A(\mathbf{t})\mathbf{s}(t) + b(\mathbf{t})x(t)$$

$$y(t) = c^t(\mathbf{t})\mathbf{s}(t) + d(\mathbf{t})x(t)$$

## • Διακριτού Χρόνου

$$\mathbf{s}(n+1) = A(\mathbf{n})\mathbf{s}(n) + b(\mathbf{n})x(n)$$

$$y(n) = c^t(\mathbf{n})\mathbf{s}(n) + d(\mathbf{n})x(n)$$