ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

◎ Μετασχηματισμός-Ζ

Εμμανουήλ Ζ. Ψαράκης
Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής

Μετασχηματισμός - *z*

Ιδιότητες Μετασχηματισμού-z

- Γραμμικότητα
- Χρονική Ολίσθηση
- Κλιμάκωση στο Επίπεδο-*z*
- Παραγώγιση
- Συνέλιξη στο Πεδίο του Χρόνου
- Κατοπτρισμός στο Πεδίο του Χρόνου
- Συσχέτιση
- Συζυγές Σήμα
- Συνέλιξη στο Μιγαδικό Επίπεδο

Μετασχηματισμός - *z*

Ιδιότητες Μονόπλευρου Μετασχηματισμού-z

- Αριστερή Ολίσθηση
- Δεξιά Ολίσθηση
- Θεώρημα Αρχικής Τιμής
- Θεώρημα Τελικής Τιμής
- Μετασχηματισμός-*z* Περιοδικών Σημάτων

Μετασχηματισμός - *z*

Αναλυτικές Συναρτήσεις

- Συνθήκες Cauchy-Riemann
- Αρμονικές Συναρτήσεις

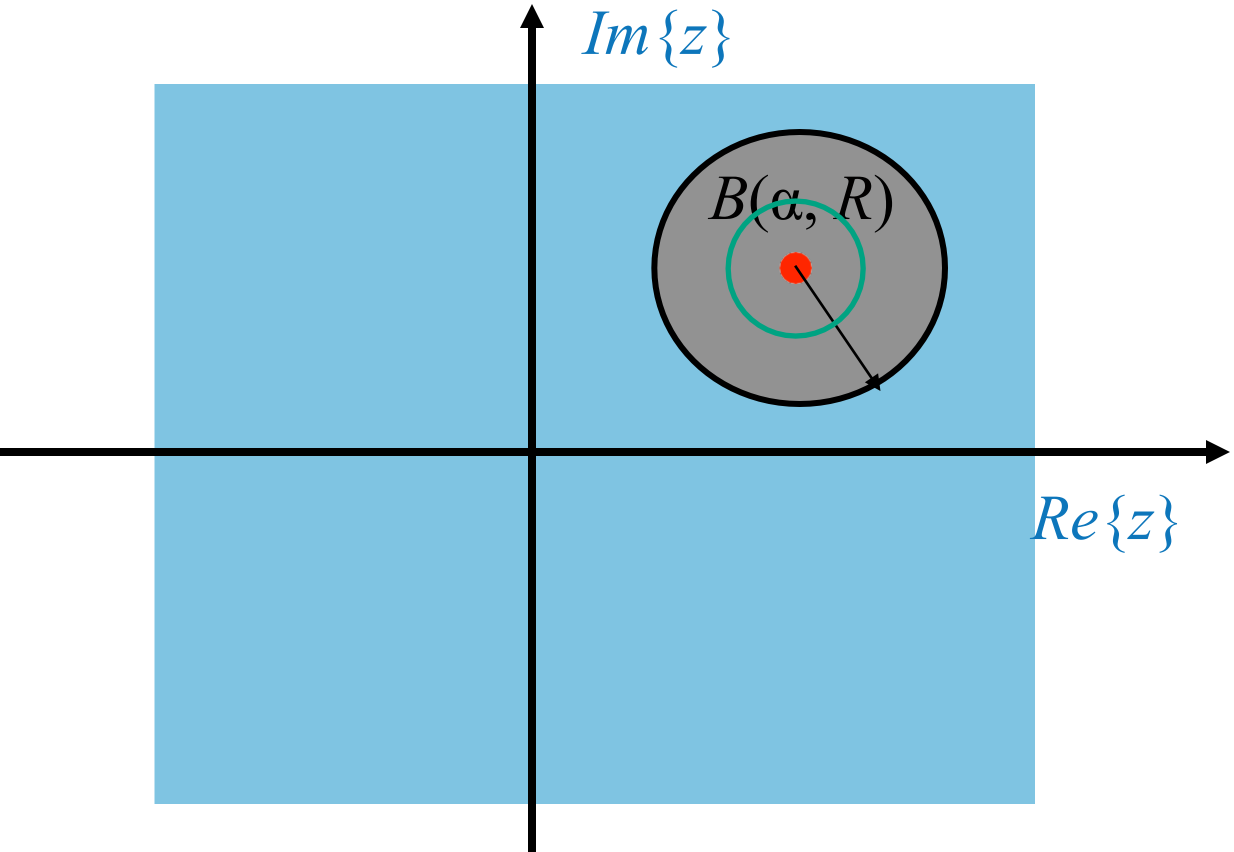
Αναλυτικές Συναρτήσεις και Δυναμοσειρές

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n$$

Μετασχηματισμός - *z*

Αναλυτικές Συναρτήσεις-Θεώρημα του Cauchy

Έστω $f(z)$ μία αναλυτική συνάρτηση στο δίσκο $B(\alpha, R)$ & έστω γ μία κλειστή καμπύλη που κείται εντός του δίσκου. Τότε:

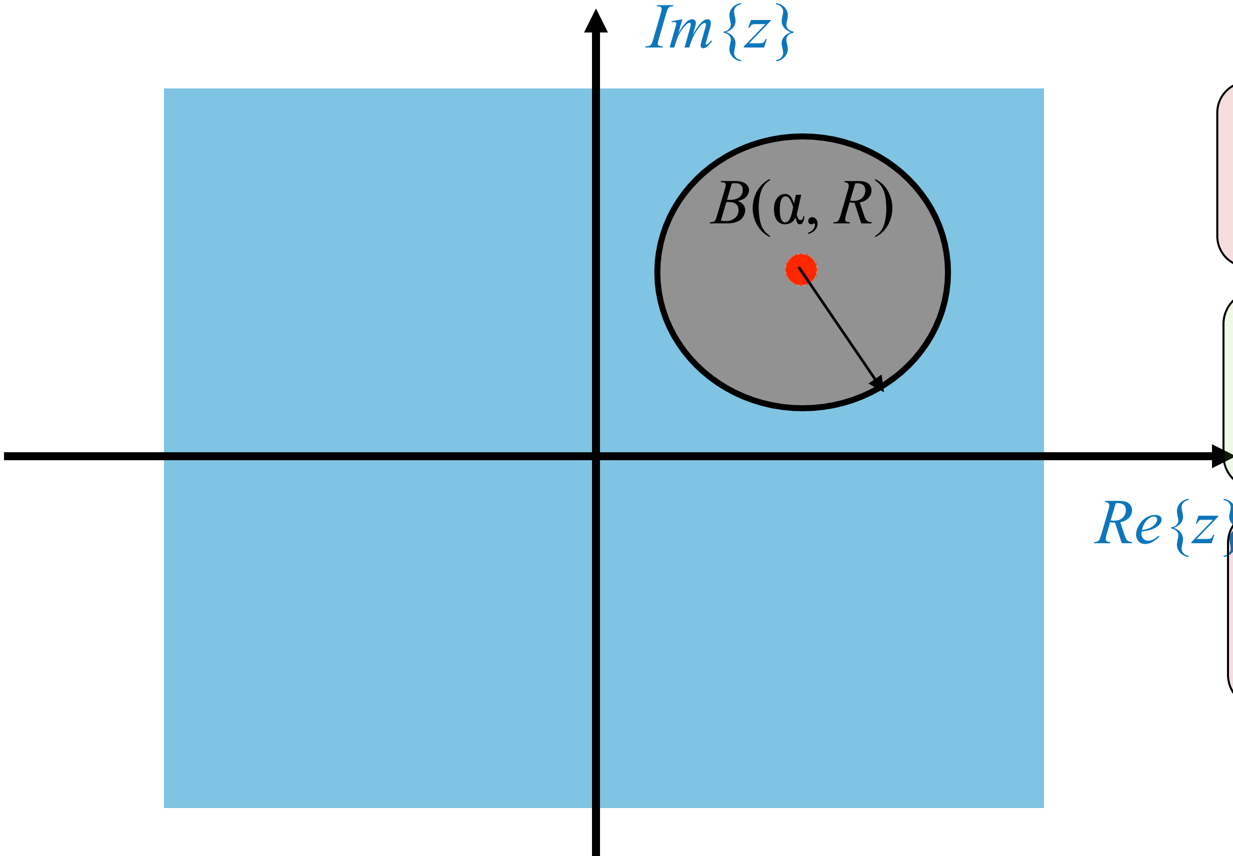


$$\oint_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

Μετασχηματισμός - *z*

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης

Μια Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο $z=\alpha$ αν $\exists\ R>0:$ η $f(z)$ να ορίζεται και να είναι αναλυτική στον κύκλο $B(\alpha, R)-\{\alpha\}$ αλλά όχι στο α.



Παραδείγματα

$$f(z)=\frac{\sin(z)}{z}$$

$$f(z)=\frac{1}{\;}$$

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$$

Μετασχηματισμός - *z*

Απαλειφόμενα Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης

Αν η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο z=α, τότε το σημείο z=α είναι ένα απαλείψιμο σημείο ανωμαλίας αν και μόνο αν:

$$\boxed{\lim_{z \to a}(z-a)f(z)=0}$$

Μετασχηματισμός - *z*

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Αν η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει μία απομονωμένη ανωμαλία στο σημείο z=α, τότε το σημείο z=α είναι ένας πόλος της f(z) αν :

1.

$$\lim_{z\to a} | f(z) | \to \infty$$

2. Αν η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ έχει ένα πόλο στο σημείο z=α και m είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο το ακόλουθο όριο :

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$$

είναι πεπερασμένο, τότε θα λέμε ότι η $f(z)$έχει ένα πόλο τάξης m στο $z=a$

Μετασχηματισμός - z

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Η Μιγαδική Συνάρτηση $f(z)$ μπορεί να γραφεί ως

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

όπου $g(z)$ η ακόλουθη αναλυτική συνάρτηση:

$$g(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + A_{-(m-2)}(z-a)^2 + \ldots$$
$$+ A_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Μετασχηματισμός - z

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Πόλοι

Το τμήμα:

$$S_a(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + \ldots + A_{-1}(z-a)^{m-1}$$

της $g(z)$ ονομάζεται ανώμαλο ή κύριο τμήμα της $f(z)$ στο z=α.

Υπολογισμός των $A_{-(m-k)}$, $k=0,1,\ldots,m-1$

$$A_{-(m-k)} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}S_a(z)\,|_{z=a} \equiv \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\{(z-a)^m f(z)\}_{z=a}$$

Μετασχηματισμός - z

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης -Δυναμοσειρές

Αν $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ είδαμε ότι:

$$g(z) = A_{-m} + A_{-(m-1)}(z-a) + A_{-(m-2)}(z-a)^2 + \ldots$$
$$+ A_{-1}(z-a)^{m-1} + (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Άρα:

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{A_{-(m-1)}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{(z-a)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

και: $\oint_C f(z)dz = n(C,a)A_{-1}$

Μετασχηματισμός - *z*

Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης

Στροφικός Αριθμός ή Δείκτης Καμπύλης ως προς σημείο

$$n(C,a) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{dz}{z-a}$$

Ο $n(C,a)$ είναι ΑΚΕΡΑΙΟΣ!!

Θεώρημα Cauchy

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^k} = \begin{cases} 2\pi j, & k = 1 \\ 0, & k \neq 1 \end{cases}$$

Μετασχηματισμός - *z*

Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ έχει ένα πόλο, πολλαπλότητας *m*, στο σημείο α, μίας περιοχής του μιγαδικού επιπέδου-*z* δηλαδή:

$$f(z) \equiv \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

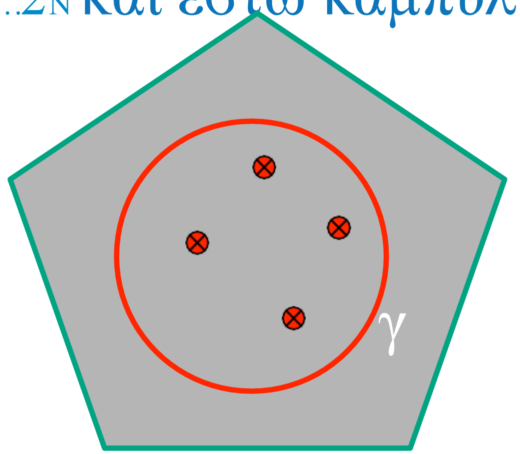
Τότε ορίζουμε σαν ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $f(z)$ στο σημείο *α* την παρακάτω ποσότητα:

$$\mathrm{Res}\{f(z),a\} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}} g(z)\Big]_{z=a} = A_{-1}$$

Μετασχηματισμός - z

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπά Μιγαδικής Συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος μεμονωμένων ανώμαλων σημείων $z_1, z_2, \ldots z_N$ και έστω καμπύλη γ



$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi j \sum_{i=1}^{N} n(C, z_i)\mathrm{Res}(f(z), z_i)$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός - *z*

Ανάπτυγμα σε Απλά Κλάσματα

Αν $R(z)$ είναι μια ρητή μιγαδική συνάρτηση με N πόλους στα σημεία α_i, $i=1,2,\ldots N$, τότε:

$$R(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\sum_{i=1}^{N}\frac{S_i(z)}{(z-a_i)^{m_i}}+P(z)$$

Όπου $S_i(z)$ το ανώμαλο τμήμα της ρητής μιγαδικής συνάρτησης $R(z)$ στο $z=\alpha_i$ και $P(z)$ Πολυώνυμο.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός - *z*

Ουσιώδη Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης

Αν μια απομονωμένη ανωμαλία δεν είναι ούτε απαλείψιμη ούτε πόλος, θα λέμε ότι είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της συνάρτησης.

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός - *z*

Ανώμαλα Σημεία Μιγαδικής Συνάρτησης- Σύνοψη

Έστω *z*=α μία απομονωμένη ανωμαλία της μιγαδικής συνάρτησης *f*(*z*) και έστω

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

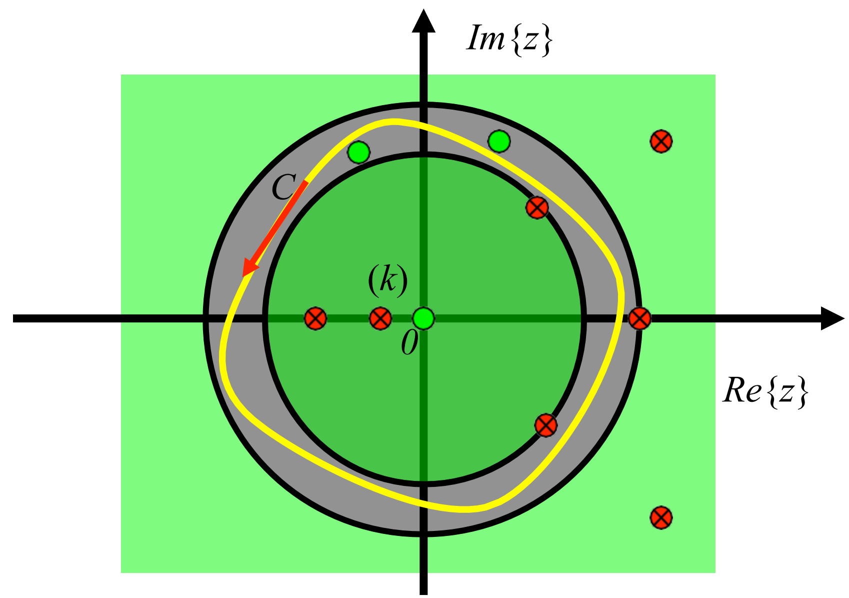
η σειρά *Laurent*. Τότε:

- το *z*=α είναι ένα απαλείψιμο ανώμαλο σημείο αν και μόνο αν $a_n = 0,\ n \le -1$
- το *z*=α είναι ένας πόλος τάξης *m* αν και μόνο αν $a_{-m} \neq 0$ & $a_n = 0, n \le -(m+1)$
- το *z*=α είναι ένα ουσιώδες ανώμαλο σημείο αν $a_n \neq 0$ για μια απειρία αρνητικών τιμών του *n*.

Αντίστροφος Μετασχηματισμός - *z*

Έστω κλειστή καμπύλη C η οποία περικλείει N πόλους (στα σημεία z_i, i=0,1,…N-1), της μιγαδικής ρητής συνάρτησης $X(z)z^{n-1}$ και ανήκει εξ ολοκλήρου στην Περιοχή Σύγκλισης της μιγαδικής συνάρτησης, τότε:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$$



Αντίστροφος Μετασχηματισμός - *z*

Ολοκληρωτικό Υπόλοιπο Μιγαδικής Συνάρτησης

Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική ρητή συνάρτηση $X(z)z^{n-1}$ έχει ένα πόλο, πολλαπλότητας *m*, στο σημείο α, δηλαδή:

$$X(z)z^{n-1} = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

Τότε ορίζουμε σαν ολοκληρωτικό υπόλοιπο της $X(z)z^{n-1}$ στο σημείο *α* την παρακάτω ποσότητα:

$$\operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1}, a\} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}g(z)]_{z=a}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός - z

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Αν υποθέσουμε ότι μία κλειστή καμπύλη C, που ανήκει στην περιοχή σύγκλισης της μιγαδικής ρητής συνάρτησης $X(z)z^{n-1}$ περικλείει N πόλους (στα σημεία z_i, $i=0,1,\ldots N-1$), τότε:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Res}\{X(z)z^{n-1}, z_i\}$$

Αντίστροφος Μετασχηματισμός - *z*

Άλλες Μέθοδοι Υπολογισμού

•Μέθοδος Αναπτύγματος σε Δυναμοσειρά

$$f(z) = \ln(1 + az^{-1}), \ |z| > a$$

$$\ln(1 + az^{-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(az^{-1})^k}{k}$$