Πρακτική συνεπαγωγή

Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα σχέσεων, όπου x , y , z πραγματικοί αριθμοί

A

$x > 2$ (1)

$z^2 = x - 1$ (2)

B

$x > 2$ (1)

$z^2 = x - 1$ (2)

$z^2 < 1$ (3)

Από τις σχέσεις A ***συνεπάγεται***

$z^2 > 1$

Από τις σχέσεις B ***συνεπάγονται***

$z^2 > 1$ από (1) , (2)

$x < 2$ από (2) , (3)

Αντιφάσκει με την (1)

Ερωτήματα

Για κάθε μία από τις σχέσεις: $x \geq 4$ $(\, y \geq 1$ και $y < 1 \,)$ $(\, y \geq 1$ ή $y < 1 \,)$, βρείτε άν συνεπάγεται

1 Από τις σχέσεις A **2** Από τις σχέσεις B **3** Από τη σχέση $(\, w \geq 0$ ή $w < 0 \,)$

Γενική (κλασσική) ιδέα της συνεπαγωγής

Ένας συλλογισμός με ***Υποθέσεις*** ϕ_1 ϕ_2 ... ϕ_n και ***Συμπέρασμα*** ψ
θεωρείται *σωστός* όταν:

Σε κάθε περίπτωση όπου αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις,
θα αληθεύει και το συμπέρασμα του συλλογισμού.

Ένας συλλογισμός με *Υποθέσεις* ϕ_1 ϕ_2 ... ϕ_n και *Συμπέρασμα* ψ
θεωρείται *λανθασμένος* όταν:

Υπάρχει περίπτωση να αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις,
και να μην αληθεύει το συμπέρασμα του συλλογισμού.

Ένας συλλογισμόςείναι σωστός *άν και μόνο άν* :
Δεν γίνεται να θεωρηθεί λανθασμένος.

Όταν ο συλλογισμός με *Υποθέσεις* ϕ_1 ϕ_2 ... ϕ_n και *Συμπέρασμα* ψ
είναι σωστός: λέμε ότι *αληθεύει η **συνεπαγωγή*** $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$
(ψ συνεπάγεται από τις $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n$) .

Για προτασιακούς τύπους $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n , \psi$

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει όταν:

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα,
είτε $v(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \ldots \text{ and } \phi_n) = \text{false}$, είτε $v(\psi) = \text{true}$

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ δεν αληθεύει *άν και μόνο άν* :

υπάρχει μία (τουλάχιστον) απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, ώστε
$v(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \ldots \text{ and } \phi_n) = \text{true}$, και $v(\psi) = \text{false}$

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει *άν και μόνο άν*:
Δεν υπάρχει απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, ώστε
$v(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \ldots \text{ and } \phi_n) = \text{true}$, και $v(\psi) = \text{false}$

Παραδείγματα

Η συνεπαγωγή $p \to q,\ \neg q \ |= \ \neg p$ αληθεύει

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	**T**

Η συνεπαγωγή $p \to q,\ q \ |= \ p$ δεν αληθεύει

p	q	$p \to q$	true	false
T	T	T	T	F
T	F	F	T	**F**
F	T	T	T	**F**
F	F	T	T	F

Η συνεπαγωγή true |= p ....

false |= p ....

p |= true ....

p |= false ....

Παραδείγματα ταυτοτήτων της άλγεβρας Boole

Για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας των μεταβλητών p , q , s :

$p \vee q = q \vee p$ $\quad\quad$ $p \wedge q = q \wedge p$

$p \vee (q \vee s) = (p \vee q) \vee s$ $\quad\quad$ $p \wedge (q \wedge s) = (p \wedge q) \wedge s$

$p \vee (q \wedge s) = (p \vee q) \wedge (p \vee s)$

$p \wedge (q \vee s) = (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

$\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ $\quad\quad$ $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg\neg p = p$

$(p \rightarrow q) = (\neg p) \vee q$ $\quad\quad$ $\neg(p \rightarrow q) = p \wedge (\neg q)$

Για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους ϕ , χ , ψ :

$\phi \vee \psi = \psi \vee \phi$ $\quad\quad$ $\phi \wedge (\chi \wedge \psi) = (\phi \wedge \chi) \wedge \psi$

$\phi \vee (\chi \wedge \psi) = (\phi \vee \chi) \wedge (\phi \vee \psi)$

$\neg(\phi \vee \chi) = (\neg\phi) \wedge (\neg\chi)$ $\quad\quad$ $\neg(\phi \wedge \chi) = (\neg\phi) \vee (\neg\chi)$ $\quad\quad$ $\neg\neg\phi = \phi$

$(\phi \rightarrow \psi) = (\neg\phi) \vee \psi$ $\quad\quad$ $\neg(\phi \rightarrow \psi) = \phi \wedge (\neg\psi)$

Παράδειγμα μετατροπής προτασιακού τύπου σε συζευκτική κανονική μορφή (CNF)

$\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) = (\neg (p \wedge q) \wedge \neg (\neg p \wedge \neg q)) = ((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q))$

$= ((\neg p \vee \neg q) \wedge ((p \vee q))$

$(\neg p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q) = (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$

$= T \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge T = (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$

Σε μία CNF, τα ορίσματα του $\wedge$ ονομάζονται ***clauses***.

Προτασιακές ταυτολογίες

Ο προτασιακός τύπος ψ είναι *ταυτολογία* όταν:

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, v(ψ) = true

1. Ο τύπος ψ είναι ταυτολογία *άν και μόνο άν*
   ισχύει η αλγεβρική ταυτότητα $\psi = T$.
2. Η αλγεβρική ταυτότητα $\phi = \psi$ ισχύει *άν και μόνο άν* ο τύπος
   $(\phi \wedge \psi) \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$ είναι ταυτολογία.

   Η ταυτότητα $\phi = \psi$ ισχύει *άν και μόνο άν*
   οι τύποι $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\psi \rightarrow \phi)$ είναι ταυτολογίες.

   Η ταυτότητα $\phi = \psi$ ισχύει *άν και μόνο άν* οι τύποι
   $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\neg\phi) \rightarrow (\neg\psi)$ είναι ταυτολογίες.

Γενική ιδέα της ταυτολογίας

Άν ο τύπος ψ έχει τιμή αλήθειας true <u>σε κάθε</u> <u>περίπτωση</u> , ο ψ ονομάζεται *ταυτολογία*.

Γενική ιδέα της συνεπαγωγής

Άν οι τύποι $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n$ (*υποθέσεις*) και ψ (*συμπέρασμα*) είναι τέτοιοι ώστε:
<u>σε κάθε</u> <u>περίπτωση</u> όπου αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις,
θα αληθεύει και το συμπέρασμα

λέμε ότι *αληθεύει η συνεπαγωγή* $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$

Γενική σχέση ταυτολογίας / συνεπαγωγής

Η **συνεπαγωγή** $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει, *άν και μόνο άν*
ο τύπος $(\phi_1 \wedge \phi_2 \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ είναι **ταυτολογία**.

Ο τύπος ψ είναι **ταυτολογία**, *άν και μόνο άν*
η συνεπαγωγή $T \models \psi$ **αληθεύει**

Ερωτήματα

1 Πότε (για ποιούς τύπους) αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές;

true $\models \psi$ — Αληθεύει όταν: $v(\psi)$ = true για κάθε απόδοση τιμών v
ο τύπος ψ είναι *ταυτολογία*

false $\models \psi$ — Αληθεύει για οποιοδήποτε τύπο ψ

$\phi \models$ true — Αληθεύει για οποιοδήποτε τύπο ϕ

$\phi \models$ false — Αληθεύει όταν: $v(\psi)$ = false για κάθε απόδοση τιμών v
ο τύπος ψ είναι ***μη-ικανοποιήσιμος***

2 Αποδείξτε ότι: Η συνεπαγωγή $\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n \models \psi$ αληθεύει, άν και μόνο άν ο τύπος $(\phi_1 \wedge \phi_2 \ \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

Παραδείγματα ταυτολογιών: $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$ $\quad (p \wedge q) \rightarrow q$

$\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \vee \neg p)$ $\quad \neg q \rightarrow \neg(p \wedge q)$

3 Έστω ότι για τους τύπους ϕ, ψ_1, ψ_2, αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \models (\psi_1 \vee \psi_2)$.
Είναι σωστό ότι θα αληθεύει μία (τουλάχιστον) από τις $\phi \models \psi_1$, $\phi \models \psi_2$;

true $\models p \vee (\neg p)$ $\qquad$ true $\models p$ $\qquad$ true $\models \neg p$

4 Ποιές από τις παρακάτω συνεπαγωγές αληθεύουν πάντα (για οποιουσδήποτε ϕ , ψ) ;

$\neg\phi \vee \psi \models \phi \rightarrow \psi$ $\qquad \phi \rightarrow \psi \models \neg\phi \vee \psi$

$\phi \wedge \psi \models \phi \rightarrow \psi$ $\qquad \phi \rightarrow \psi \models \phi \wedge \psi$