

Τυπικές αποδείξεις (formal deductions) για το δίλημμα των τριών φυλακισμένων

Χρησιμοποιούμε ένα μοντέλο **Q** όπου τα possibility relations ορίζονται όπως στο μοντέλο **P**.

Μία φόρμουλα ϕ **ισχύει** σε ένα μοντέλο Kripke M , όταν η ϕ αληθεύει σε κάθε κατάσταση του M .

I Οι φόρμουλες $\neg(K_A \text{ AisWh}) \rightarrow (\text{BisWh} \vee \text{CisWh})$ **ισχύουν στο Q**

$\neg(K_B \text{ AisWh}) \rightarrow (\text{AisWh} \vee \text{CisWh})$

$\neg(K_C \text{ AisWh}) \rightarrow (\text{BisWh} \vee \text{AisWh})$

Άρα, **θα ισχύουν** οι εξής clauses στο **Q**

clause 1: $(K_A \text{ AisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 2: $(K_B \text{ BisWh}) \vee \text{AisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 3: $(K_C \text{ CisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

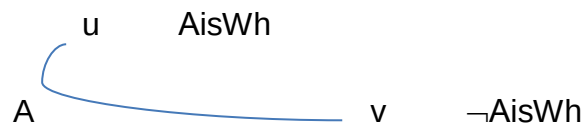
II Η φόρμουλα $\neg(K_A \text{ AisWh})$ αληθεύει στην κατάσταση u του Q , όταν:

$$u(\text{AisWh}) = \text{false} ,$$

ή

$$u(\text{AisWh}) = \text{true} , \quad \text{και}$$

υπάρχει (μία τουλάχιστον) κατάσταση v , όπου



1. $u \approx_A v$ άρα $v(\text{BisWh}) = u(\text{BisWh})$,

$$v(\text{CisWh}) = u(\text{CisWh})$$

2. $v(\text{AisWh}) = \text{false}$.

Αντίστοιχα για τις φόρμουλες $\neg(K_B \text{ BisWh})$, $\neg(K_C \text{ CisWh})$.

Ανάλυση για την Case 3

Ισχύουν οι εξής clauses στο Q :

clause 1: $(K_A \text{ AisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 2: $(K_B \text{ BisWh}) \vee \text{AisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 3: $(K_C \text{ CisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

Αμέσως μετά το Step 3.1:

Παίρνοντας υπόψη τις ανακοινώσεις των παικτών, εξετάζουμε τις clauses

clause 4: $\neg(K_A \text{ AisWh})$

clause 5: $\neg(K_B \text{ BisWh})$

clause 6: $\neg(K_C \text{ CisWh})$

Θεώρημα 1 clause1 , clause2 , clause3 , clause4 , clause5 , clause6

$$\models (\text{BisWh} \vee \text{CisWh}) \wedge (\text{AisWh} \vee \text{CisWh}) \wedge (\text{BisWh} \vee \text{AisWh})$$

Απόδειξη Εφαρμόζουμε τον κανόνα της επίλυσης:

clause 1 with clause 4 gives

clause 7: $\text{BisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 2 with clause 5 gives

clause 8: $\text{AisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 3 with clause 6 gives

clause 9: $\text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

□

Εξετάζουμε το σύνολο των καταστάσεων του Q (τις ονομάζουμε ενδεχόμενες καταστάσεις) για τις οποίες αληθεύουν ταυτόχρονα οι clauses 4, 5, 6 .

Από το **Θεώρημα 1** : οι clauses 7, 8, 9 θα αληθεύουν σε κάθε κατάσταση του Q που είναι ενδεχόμενη κατάσταση.

Παρατήρηση Οι clauses 7, 8, 9 αληθεύουν ταυτόχρονα σε μία κατάσταση, άν και μόνο αν το πολύ ένας παίκτης έχει μαύρο χρώμα.

clause 7: $\text{BisWh} \vee \text{CisWh}$ clause 8: $\text{AisWh} \vee \text{CisWh}$ clause 9: $\text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

clause 1: $(K_A \text{ AisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 2: $(K_B \text{ BisWh}) \vee \text{AisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 3: $(K_C \text{ CisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

clause 4: $\neg(K_A \text{ AisWh})$

clause 5: $\neg(K_B \text{ BisWh})$

clause 6: $\neg(K_C \text{ CisWh})$

Αμέσως μετά το Step 3.2:

Έστω **R** ένα μοντέλο που αποτελείται από τις ενδεχόμενες καταστάσεις του Q {για τις οποίες αληθεύουν οι clauses 4, 5, 6 **στο Q**} με possibility relations που ορίζονται όπως στο **Q**.

1 Από τους κανόνες του παιχνιδιού, οι clauses 1, 2, 3, ισχύουν στο **R**.

Από το **Θεώρημα 1** οι clauses 7, 8, 9 θα ισχύουν στο **R**.

2 Δεν είναι σαφές αν οι clauses 4, 5, 6 ισχύουν **στο R**.

Παίρνοντας υπόψη τις ανακοινώσεις των παικτών, εξετάζουμε σε ποιές καταστάσεις του **R** αληθεύουν οι clauses 4, 5, 6.

Θεώρημα 2 $\forall \sigma [\text{clause7} \wedge \text{clause8} \wedge \text{clause9} \text{ αληθεύει στην κατάσταση } \sigma] ,$
 $\text{clause4} , \text{clause5} , \text{clause6}$

$\models (\text{BisWh} \wedge \text{CisWh} \wedge \text{AisWh})$

Από το **Θεώρημα 2**: η φόρμουλα $\text{BisWh} \wedge \text{CisWh} \wedge \text{AisWh}$ θα αληθεύει στις καταστάσεις του **R** όπου αληθεύουν οι clauses 4, 5, 6.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2

Έστω u μία κατάσταση όπου αληθεύουν οι υποθέσεις της συνεπαγωγής.

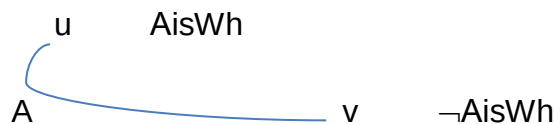
(1) Εξετάζουμε την clause 4, $\neg(K_A \text{ AisWh})$, η οποία αληθεύει στην u .

Θα δείξουμε ότι οι clauses CisWh , BisWh θα αληθεύουν στην u .

α $\text{Av } u(\text{AisWh}) = \text{true}$:

Επειδή η φόρμουλα $\neg(K_A \text{ AisWh})$ αληθεύει στην u , θα υπάρχει (λόγω του **II**)

μία κατάσταση v στην οποία θα αληθεύει η clause $\neg\text{AisWh}$.



Εφαρμόζουμε τον κανόνα της επίλυσης:

$\neg\text{AisWh}$ with clause 8 gives CisWh

$\neg\text{AisWh}$ with clause 9 gives BisWh

Άρα οι clauses CisWh , BisWh θα αληθεύουν στην v .

Λόγω της επιλογής της v θα έχουμε $v(\text{BisWh}) = u(\text{BisWh})$, $v(\text{CisWh}) = u(\text{CisWh})$.

Άρα οι clauses CisWh , BisWh θα αληθεύουν και στην u .

β $\text{Av } u(\text{AisWh}) = \text{false}$: η clause $\neg\text{AisWh}$ αληθεύει στην u .

Χρησιμοποιώντας τις clauses 8, 9 όπως στην προηγούμενη περίπτωση

βρίσκουμε ότι οι clauses CisWh , BisWh θα αληθεύουν στην u .

(2) Εξετάζουμε την clause 5, $\neg(K_B \text{ BisWh})$, η οποία αληθεύει στην u .

Με ανάλογο τρόπο, βρίσκουμε ότι και η clause AisWh θα αληθεύει στην u .

□

Προτεινόμενες ασκήσεις

- 1 Χρησιμοποιείτε φόρμουλες και τυπικές αποδείξεις για να αναλύσετε το πρόβλημα στην Exercise 1.3 - *Reasoning About Knowledge*.
- 2 Χρησιμοποιείτε φόρμουλες και τυπικές αποδείξεις για να αναλύσετε το Muddy Children Puzzle όταν $k = 2$ (δύο λερωμένα παιδάκια).
- 3 Χρησιμοποιείτε φόρμουλες και τυπικές αποδείξεις για να αναλύσετε την **Case 2**.
- 4 Συμπληρώστε την περίπτωση (2) της Απόδειξης του Θεωρήματος 2.
Γιατί η clause $A \vee B$ θα αληθεύει στην κατάσταση u ;