

Three wise men puzzle, synchronized

C sees B, C's hats only B sees C's hat only C sees nobody's hat

Common knowledge initially: there are at most two black hats

(1) C says: I don't know my color

Common knowledge now: there is at most one black hat on B, C

(2) B says: I don't know my color

Common knowledge now: there is no black hat on C

(3) A says: my color is white

Three wise men puzzle, unsynchronized

C sees B, C's hats only B sees C's hat only C sees nobody's hat

Common knowledge initially: there are at most two black hats

The wise men remain silent. After some time A says: my color is white

Two wise girls puzzle, synchronized

girl1 sees girl2's hat only girl2 sees nobody's hat

Common knowledge initially: there is at most one black hat

(1) girl1 says: I don't know my color

Common knowledge now: there is no black hat on girl2

(2) girl2 says: my color is white

Two wise girls puzzle, unsynchronized

girl1 sees girl2's hat only girl2 sees nobody's hat

Common knowledge initially: there is at most one black hat

The girls remain silent. After some time girl2 says: my color is white

Μέθοδος ανάλυσης των παιχνιδιών χωρίς συγχρονισμό

Ονομάζουμε *sequent* μία τυπική δήλωση της μορφής $\Gamma \rightarrow \Delta$, όπου Γ, Δ είναι σύνολα τύπων.

Λέμε ότι το sequent $\Gamma \rightarrow \Delta$ *ισχύει*, όταν θεωρούμε ότι υπάρχει ένας αποδεκτός συλλογισμός μέσω του οποίου: υποθέτοντας την *σύζευξη* των τύπων του Γ , συμπεραίνεται η *διάζευξη* των τύπων του Δ .

Σημείωση: Όταν το Γ είναι κενό, η σύζευξη των τύπων του είναι *true*.

Όταν το Δ είναι κενό, η διάζευξη των τύπων του είναι *false*.

Οι συλλογισμοί που θεωρούνται αποδεκτοί περιγράφονται έμμεσα, ορίζοντας το σύνολο των sequents που ισχύουν.

Ο ορισμός των sequents που ισχύουν δίνεται ως ένα σύστημα Σ *τυπικών αποδείξεων*, που μας παρέχει (1) κάποια *αξιώματα* (αρχικές τυπικές δηλώσεις που εκλαμβάνονται ως αυταπόδεικτες) και (2) κάποιους *απαγωγικούς κανόνες*, που καθορίζουν πότε μία τυπική δήλωση μπορεί να *αποδειχτεί σε ένα βήμα* αναφέροντας κάποιες άλλες δηλώσεις που έχουν ήδη αποδειχτεί.

Θα λέμε ότι ένα sequent ισχύει, αν και μόνο αν μπορεί να αποδειχτεί χρησιμοποιώντας τα αξιώματα και τους κανόνες του Σ .

Θα χρησιμοποιήσουμε το Gentzen calculus $KD4^2$ που περιγράφεται στο άρθρο 'A note on the wise girls puzzle', με ορισμένες προσαρμογές (οι μεταβλητές φ, θ κοκ ονομάζουν τυχαίες φόρμουλες):

Αξιώματα $\theta \rightarrow \theta$

Κανόνας ($B_k \rightarrow B_k$)
$$\frac{X, \Gamma, B_k(\Delta) \rightarrow \theta}{X, B_k(\Gamma \cup \Delta) \rightarrow B_k(\theta)}$$

Κανόνας (B_k)
$$\frac{\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n \rightarrow \theta}{B_k(\varphi_1), B_k(\varphi_2), \dots B_k(\varphi_n) \rightarrow B_k(\theta)}$$

Η έκφραση “αποδεικνύεται ότι $\Gamma \rightarrow \Delta$ ” σημαίνει ότι υπάρχει μια τυπική απόδειξη του $\Gamma \rightarrow \Delta$ στο (τροποποιημένο) σύστημα $KD4^2$.

Θεώρημα Αν η φόρμουλα θ είναι προτασιακή ταυτολογία, αποδεικνύεται ότι $\rightarrow \theta$.

Λήμμα A Αποδεικνύεται ότι $\Gamma, \varphi_1, \dots \varphi_n \rightarrow \theta$, αν και μόνο αν

αποδεικνύεται ότι $\Gamma \rightarrow (\varphi_1 \wedge \dots \varphi_n) \Rightarrow \theta$.

Πόρισμα του Λήμματος A

Αν η φόρμουλα $(\varphi_1 \wedge \dots \varphi_n) \Rightarrow \theta$ είναι προτασιακή ταυτολογία, αποδεικνύεται ότι $\varphi_1, \dots \varphi_n \rightarrow \theta$.

Λήμμα B Αν αποδεικνύεται ότι $X \rightarrow \theta$,
θα αποδεικνύεται και ότι $X \rightarrow B_k(\theta)$.

Εφαρμόζουμε τον κανόνα $(B_k \rightarrow B_k)$ με $\Gamma = \Delta = \{\}$ -- η φόρμουλα $B_k()$ είναι *true*.

Πόρισμα του Λήμματος B

Αν η φόρμουλα θ είναι προτασιακή ταυτολογία, αποδεικνύεται ότι $\rightarrow B_k(\theta)$.

Αρχικές πεποιθήσεις της παίκτριας 1 $\Gamma_1 = \{B1(1W \vee 2W), B1(2W)\}$

Αρχικές πεποιθήσεις της παίκτριας 2 $\Gamma_2 = \{B2(1W \vee 2W),$
 $B2(B1(1W \vee 2W)),$
 $B2(2W \Rightarrow B1(2W)), B2(\neg 2W \Rightarrow (B1 \neg 2W))\}$

Proposition 3 Αποδεικνύεται ότι $\Gamma_2, B2(\neg B1(1W)) \rightarrow B2(2W)$

Η έκφραση “η φόρμουλα φ προκύπτει για την παίκτρια 2” σημαίνει ότι: στο (τροποποιημένο) τυπικό σύστημα $KD4^2$, αποδεικνύεται ότι:

$\Gamma_2, B2(\neg B1(1W)) \rightarrow \varphi$.

Για κάθε μία από τις παρακάτω φόρμουλες, δείχνουμε ότι προκύπτει για την παίκτρια 2.

1. $B2(\neg 2W \Rightarrow B1 \neg 2W)$ επειδή είναι στο Γ_2

2. $B2((B1 \neg 2W) \Rightarrow (B1(1W)))$

Αποδεικνύεται ότι: $(1W \vee 2W), \neg 2W \rightarrow 1W$ με το **Λήμμα A**,
επειδή η φόρμουλα $((1W \vee 2W) \wedge \neg 2W) \Rightarrow 1W$ είναι ταυτολογία.

Με τον Κανόνα $(B_k \rightarrow B_k)$, $(1W \vee 2W), (B1 \neg 2W) \rightarrow (B1(1W))$.

Με το **Λήμμα A**, $(1W \vee 2W) \rightarrow ((B1 \neg 2W) \Rightarrow (B1(1W)))$.

Με τον Κανόνα $(B_k \rightarrow B_k)$, $B2(1W \vee 2W) \rightarrow B2((B1 \neg 2W) \Rightarrow (B1(1W)))$.

Η φόρμουλα $B2 (1W \vee 2W)$ είναι στο Γ_2 , άρα προκύπτει για την παίκτρια 2 : εφαρμόζουμε τον κσνόνα (*cut*) με την αμέσως προηγούμενη.

3. $B2 (\neg B1 \ 1W \Rightarrow 2W)$

Αποδεικνύεται ότι:

$(\neg 2W \Rightarrow B1 \ \neg 2W), ((B1 \ \neg 2W) \Rightarrow (B1 \ 1W)) \rightarrow (\neg B1 \ 1W \Rightarrow 2W)$.

Εφαρμόζουμε τον Κανόνα (B_k) στο αμέσως προηγούμενο, και συνδυάζουμε το συμπέρασμα με τις φόρμουλες 1. και 2. μέσω του κσνόνα (*cut*).

4. $B2 \ 2W$

Αποδεικνύεται ότι: $\neg B1 \ 1W, (\neg B1 \ 1W \Rightarrow 2W) \rightarrow 2W$.

Με τον Κανόνα ($B_k \rightarrow B_k$), $B2 (\neg B1 \ 1W), B2 (\neg B1 \ 1W \Rightarrow 2W) \rightarrow B2 \ 2W$.

Η φόρμουλα $B2 ((\neg B1 \ 1W))$ είναι στο Γ_2 , άρα προκύπτει για την παίκτρια 2 .

Εφαρμόζουμε τον κσνόνα (*cut*) με την αμέσως προηγούμενη:

$B2 (\neg B1 \ 1W \Rightarrow 2W) \rightarrow B2 \ 2W$.

Εφαρμόζουμε τον κσνόνα (*cut*) με την 3.