Παραδείγματα ταυτοτήτων της άλγεβρας Boole

Για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας των μεταβλητών p , q , s :

$p \vee q = q \vee p$ $\qquad$ $p \wedge q = q \wedge p$

$p \vee (q \vee s) = (p \vee q) \vee s$ $\qquad$ $p \wedge (q \wedge s) = (p \wedge q) \wedge s$

$p \vee (q \wedge s) = (p \vee q) \wedge (p \vee s)$

$p \wedge (q \vee s) = (p \wedge q) \vee (p \wedge s)$

$\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$ $\qquad$ $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$

$\neg\neg p = p$

$(p \rightarrow q) = (\neg p) \vee q$

Για οποιουσδήποτε προτασιακούς τύπους φ , χ , ψ :

$\phi \vee \psi = \psi \vee \phi$ $\qquad$ $\phi \wedge (\chi \wedge \psi) = (\phi \wedge \chi) \wedge \psi$

$\phi \vee (\chi \wedge \psi) = (\phi \vee \chi) \wedge (\phi \vee \psi)$

$\neg(\phi \vee \chi) = (\neg\phi) \wedge (\neg\chi)$ $\qquad$ $\neg(\phi \wedge \chi) = (\neg\phi) \vee (\neg\chi)$ $\qquad$ $\neg\neg\phi = \phi$

$(\phi \rightarrow \psi) = (\neg\phi) \vee \psi$

Παράδειγμα μετατροπής προτασιακού τύπου σε συζευκτική κανονική μορφή (CNF)

$\neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) = (\neg (p \wedge q) \wedge \neg (\neg p \wedge \neg q)) = ((\neg p \vee \neg q) \wedge ((\neg\neg p \vee \neg\neg q)) =$

$= ((\neg p \vee \neg q) \wedge ((p \vee q))$

$(\neg p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q) = (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)$

$= T \wedge (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q) \wedge T = (\neg q \vee p) \wedge (\neg p \vee q)$

Σε μία CNF, τα ορίσματα του $\wedge$ ονομάζονται ***clauses***.

Προτασιακές ταυτολογίες

Ο προτασιακός τύπος ψ είναι *ταυτολογία* όταν:

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, $v(\psi) = \text{true}$

1. Ο τύπος ψ είναι ταυτολογία *άν και μόνο άν* ισχύει η ταυτότητα $\psi = T$.
2. Η ταυτότητα $\phi = \psi$ ισχύει *άν και μόνο άν* ο τύπος $(\phi \wedge \psi) \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))$ είναι ταυτολογία.
3. Η ταυτότητα $\phi = \psi$ ισχύει *άν και μόνο άν* οι τύποι $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\psi \rightarrow \phi)$ είναι ταυτολογίες.
4. Η ταυτότητα $\phi = \psi$ ισχύει *άν και μόνο άν* οι τύποι $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\neg\phi) \rightarrow (\neg\psi)$ είναι ταυτολογίες.

Γενική ιδέα της ταυτολογίας

Άν ο τύπος ψ έχει τιμή αλήθειας true <u>σε κάθε</u> <u>περίπτωση</u> , ο ψ ονομάζεται *ταυτολογία*.

Γενική ιδέα της συνεπαγωγής

Άν οι τύποι $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n$ (*υποθέσεις*) και ψ (*συμπέρασμα*) είναι τέτοιοι ώστε:

<u>σε κάθε</u> <u>περίπτωση</u> όπου αληθεύουν (ταυτόχρονα) όλες οι υποθέσεις,
θα αληθεύει και το συμπέρασμα

λέμε ότι *αληθεύει η συνεπαγωγή* $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$

Γενική σχέση ταυτολογίας / συνεπαγωγής

Η **συνεπαγωγή** $\phi_1 , \phi_2 \ \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει, *άν και μόνο άν*
ο τύπος $(\phi_1 \wedge \phi_2 \ \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi$ είναι **ταυτολογία**.

Ο τύπος ψ είναι **ταυτολογία**, *άν και μόνο άν*
η συνεπαγωγή $T \models \psi$ **αληθεύει**

Για προτασιακούς τύπους $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n , \ \psi$

Ο τύπος ψ είναι *ταυτολογία* όταν:

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, $v(\psi) = \text{true}$

Η *συνεπαγωγή* $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει όταν:

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα,
είτε $v(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \ \ldots \text{ and } \phi_n) = \text{false}$, είτε $v(\psi) = \text{true}$

για οποιαδήποτε απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα,
$v((\phi_1 \wedge \phi_2 \ \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi) = \text{true}$

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ *δεν αληθεύει* όταν:

υπάρχει μία (τουλάχιστον) απόδοση τιμών v στα προτασιακά γράμματα, ώστε
$v(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \ \ldots \text{ and } \phi_n) = \text{true}$, και $v(\psi) = \text{false}$

Για τροπικούς τύπους $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n , \ \psi$

Ο τύπος ψ είναι *(τροπική) ταυτολογία* όταν:

για οποιοδήποτε μοντέλο Kripke M και κατάσταση s του M, $s(\psi) = \text{true}$

Η *(τροπική) συνεπαγωγή* $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ αληθεύει όταν:

για οποιοδήποτε μοντέλο Kripke M και κατάσταση s του M,
είτε $s(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \ \ldots \text{ and } \phi_n) = \text{false}$, είτε $s(\psi) = \text{true}$

για οποιοδήποτε μοντέλο Kripke M και κατάσταση s του M,
$s((\phi_1 \wedge \phi_2 \ \ldots \wedge \phi_n) \rightarrow \psi) = \text{true}$

Η (τροπική) συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$ *δεν αληθεύει* όταν:

υπάρχει ένα (τουλάχιστον) μοντέλο Kripke M και κατάσταση s του M, ώστε
$s(\phi_1 \text{ and } \phi_2 \ \ldots \text{ and } \phi_n) = \text{true}$, και $s(\psi) = \text{false}$

Παραδείγματα

1 Η συνεπαγωγή $p \to q\ ,\ \neg q\ \ |=\ \neg p$ αληθεύει.

Απόδειξη Έστω ότι $v(p \to q) = T$ και $v(\neg q) = T$. Τότε $v(q) = F$. *Από τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης* $\to$, $v(p) = F$. Άρα $v(\neg p) = T$.

2 Η συνεπαγωγή $p \to q\ ,\ \ q\ \ |=\ \ p$ δεν αληθεύει

Απόδειξη Έστω η απόδοση τιμών v όπου: $v(p) = F$, $v(q) = T$. *Από τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης* $\to$, $v(p \to q) = T$.
Η απόδοση τιμών v αποτελεί *αντιπαράδειγμα* για την συνεπαγωγή 2 , αφού οι υποθέσεις αποτιμώνται σε T αλλά το συμπέρασμα αποτιμάται σε F .

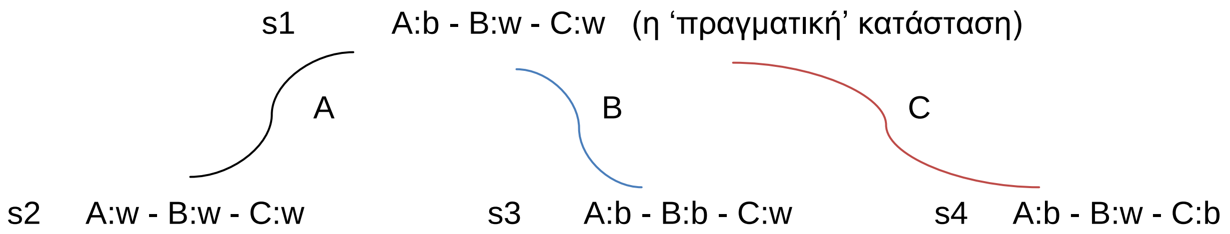
3 Η συνεπαγωγή $(K_A \neg AisWh)\ |=\ \neg AisWh$ αληθεύει

Απόδειξη Έστω ότι $s(K_A \neg AisWh) = T$, όπου s <u>μία κατάσταση ενός μοντέλου Kripke M</u>.
Από τον γενικό ορισμό της τιμής αλήθειας μιάς φόρμουλας $(K_A\ \phi)$,
$s(K_A \neg AisWh) = T$ όταν $u(\neg AisWh) = T$ σε κάθε κατάσταση u όπου $u \approx_Y s$.
Επειδή $s \approx_Y s$, θα είναι $s(\neg AisWh) = T$.

4 Ο τύπος $(K_A \neg AisWh) \vee (K_A\ AisWh)$ δεν είναι ταυτολογία.

Απόδειξη Έστω η κατάσταση s1 του παρακάτω μοντέλου Kripke.

M2



Από τον γενικό ορισμό της τιμής αλήθειας μιάς φόρμουλας $(K_A\ \phi)$,
$s1(K_A \neg AisWh) = F$ και $s1(K_A\ AisWh) = F$.
Επομένως $s1(\ (K_A \neg AisWh) \vee (K_A\ AisWh)\ ) = F$.

Theorem 2.4.1 *For all formulas ϕ and φ, all structures M where each possibility relation K_i is an equivalence relation, and all agents $i = 1, \ldots, n$,*

(a) $M \models (K_i\phi \wedge K_i(\phi \Rightarrow \varphi)) \Rightarrow K_i\varphi$,

(b) *if* $M \models \phi$ *then* $M \models K_i\phi$,

(c) $M \models K_i\phi \Rightarrow \phi$,

(d) $M \models K_i\phi \Rightarrow K_iK_i\phi$,

(e) $M \models (\neg K_i\phi) \Rightarrow K_i\neg K_i\phi$.

Σχετικό εκπαιδευτικό υλικό

Huth – Ryan Logic in Computer Science 2nd Ed.
Ενότητες: 1.1 , 1.3 , 1.4 , 1.5.1 , 1.5.2

Fagin – Halpern – Moses – Vardi Reasoning About Knowledge
Ενότητα 2.1. The Possible-Worlds Model
Ενότητα 2.4. The Propertie of Knowledge , μέχρι και το Theorem 2.4.1.

Προτεινόμενες ασκήσεις

1 "*Γενική επίλυση*" :
Αποδείξτε ότι αληθεύει η συνεπαγωγή $\neg\boldsymbol{\phi} \vee \psi_1 ,\ \boldsymbol{\phi} \vee \psi_2 \models \psi_1 \vee \psi_2$
- i Όταν οι ϕ , ψ_1 , ψ_2 είναι προτασιακές φόρμουλες.
- ii Όταν οι ϕ , ψ_1 , ψ_2 είναι τροπικές φόρμουλες.

2 Αποδείξτε ότι, για κάθε τροπική φόρμουλα ϕ , ο τύπος $(K_X (K_X \phi)) \vee (K_X (\neg K_X \phi))$ είναι ταυτολογία.