Michael Suk-Young Chwe Jane Austen, Game Theorist

CHAPTER FOUR Flossie and the Fox

Flossie Finley, a little girl, is asked by her mother to deliver a basket of eggs to Miz Viola's place. Her mother warns her to watch out for the *fox*, who loves eggs. <u>Flossie says that she doesn't know what a fox looks like</u>; she doesn't remember ever seeing one. **"Oh well, a fox be just a fox. That aine so scary."**

Flossie skips along and encounters <u>a strange creature, who announces that he is a fox</u>. Flossie looks him over carefully and says, "<u>I just purely don't believe it . . . I don't believe you a fox</u>." Fox says that of course he is a fox: "A little girl like you should be simply terrified of me. Whatever do they teach children these days?" But Flossie replies, "I aine never seen a fox before. So, why should I be scared of you and I don't even-now know you a real fox for a fact?" Flossie goes on her way.

Fox, quite disconcerted, runs after Flossie and invites her to feel his thick fur. Flossie replies that he must be a rabbit. Fox then explains that he has a long pointed nose. Flossie replies that he must be a rat. After a while, they meet a cat, and Fox asks the cat to please explain to Flossie that he is indeed a fox. The cat says that he is a fox because he has sharp claws and yellow eyes, but Flossie concludes that he must therefore also be a cat. Desperately, <u>Fox says that he has a bushy tail. Flossie replies that he must be a squirrel</u>.

Fox begs Flossie to believe him, but it is too late because *one of Mr. McCutchin's hounds arrives to apprehend Fox.* As he dashes away, <u>Fox shouts that the hound knows who he is</u>*:* <u>"Like I told you, I am a fox!" Flossie replies, "I know,"</u> and walks unharassed to Miz Viola's.

Τι γνωρίζει η Flossie για το πλάσμα;

Τι γνωρίζει η Αλεπού για την γνώση της Flossie;

Σε ποιόν πρέπει να αποδοθεί η πρόταση

"Oh well, a fox be just a fox. That aine so scary."

M_{Flo} Μοντέλο Kripke (possible worlds semantics) για το αφήγημα ‘Flossie and the Fox’

Agents / Actors   Flossie   creature

Primitive propositions (*ατομικές προτάσεις*)

creature-is-fox   Flossie-knows

Κάθε ατομική πρόταση θεωρείται ως ***προτασιακό γράμμα***.

States of the world (*καταστάσεις*)

S1	creature is fox,	Flossie knows
S2	creature is fox,	Flossie does not know
S3	creature is other,	Flossie does not know
S4	creature is other,	Flossie knows

Κάθε *κατάσταση* θεωρείται ως ***απόδοση τιμών αλήθειας*** στα προτασιακά γράμματα (ατομικές προτάσεις)

	creature-is-fox	Flossie-knows
S1	T	T
S2	T	F
S3	F	F
S4	F	T

Possibility relations

Για καθέναν agent X , ορίζεται μία ***σχέση ισοδυναμίας*** $\approx_X$ μεταξύ των καταστάσεων:

$S2 \approx_{Flossie} S3$ οι καταστάσεις S2 , S3 είναι ισοδύναμες για την Flossie

Κάθε άλλο ζεύγος *διαφορετικών* καταστάσεων είναι διακριτές μεταξύ τους για την Flossie

$S1 \approx_{creature} S2$ $S3 \approx_{creature} S4$

Οι καταστάσεις { S1 , S2 } είτε { S3 , S4 } είναι ισοδύναμες για το creature

Κάθε άλλο ζεύγος *διαφορετικών* καταστάσεων είναι διακριτές μεταξύ τους για το creature

Ορισμός της αλήθειας σε ένα μοντέλο Kripke M

Ορίζουμε πότε μία φόρμουλα φ *αληθεύει* στην καταάσταση s
ενός μοντέλου M (με σύμβολα, $(M , s) \models \varphi$)

1. Η ατομική πρόταση γ *αληθεύει* στην κατάσταση s , όταν: $s(\gamma) = true$.

2. Για οποιεσδήποτε φόρμουλες φ , ψ :

Η φόρμουλα $(\varphi \wedge \psi)$ *αληθεύει* στην κατάσταση s όταν:
η φ αληθεύει στην s *και* η ψ αληθεύει στην s .

Η φόρμουλα $(\varphi \vee \psi)$ *αληθεύει* στην κατάσταση s όταν:
η φ αληθεύει στην s *είτε* η ψ αληθεύει στην s .

Η φόρμουλα $(\neg\varphi)$ αληθεύει στην κατάσταση s όταν:
η φ *δεν* αληθεύει στην s .

. Η φόρμουλα $(\varphi \rightarrow \psi)$ *αληθεύει* στην κατάσταση s όταν:
η φόρμουλα $((\neg\varphi) \vee \psi)$ αληθεύει στην s .

3. Για οποιαδήποτε φόρμουλα φ :

Για καθέναν agent X

Η φόρμουλα $(K_X \varphi)$ *αληθεύει στην κατάσταση* s του M όταν:
Η φόρμουλα φ αληθεύει *σε κάθε κατάσταση* u
που είναι ισοδύναμη για τον παίκτη X με την κατάσταση s

$(M , s) \models (K_X \varphi)$ όταν:
σε κάθε κατάσταση u *όπου* $u \approx_X s$ **:** $(M , u) \models \varphi$

Η φόρμουλα $(K_X \varphi)$ *δεν αληθεύει στην κατάσταση* s όταν:
Η φόρμουλα φ δεν αληθεύει *σε μία (τουλάχιστον) κατάσταση* u
που είναι ισοδύναμη για τον παίκτη X *με* την κατάσταση s

$(M , s) \not\models (K_X \varphi)$ όταν:
υπάρχει μία (τουλάχιστον) *κατάσταση* u , $u \approx_X s$, ώστε**:** $(M , u) \not\models \varphi$

ΟΡΙΣΜΟΣ Μία φόρμουλα φ αληθεύει στο μοντέλο M (με σύμβολα, $M \models \varphi$)
όταν η φ αληθεύει σε κάθε κατάσταση του M **.**

Παραδείγματα

$s1 \approx_{creature} s2$ $\qquad$ $s3 \approx_{creature} s4$

Να βρεθεί αν αληθεύουν τα παρακάτω:

$(M_{Flo}, s1) \models (K_{creature}\ \text{Flossie-knows})$ false

$(M_{Flo}, s3) \models (K_{creature}\ \text{Flossie-knows})$ false

$(M_{Flo}, s1) \models \neg(K_{creature}\ \text{Flossie-knows})$

$(M_{Flo}, s2) \models \neg(K_{creature}\ \text{Flossie-knows})$

$(M_{Flo}, s2) \models (K_{creature}\ \neg\text{Flossie-knows})$ false

$(M_{Flo}, s4) \models (K_{creature}\ \neg\text{Flossie-knows})$ false

$s2 \approx_{Flossie} s3$

$(M_{Flo}, s2) \models \neg\ \text{Flossie-knows}$ true

$(M_{Flo}, s2) \models (K_{Flossie}\ \neg(K_{creature}\ \neg\text{Flossie-knows}))$ true

Άσκηση 1

Έστω s , t δύο καταστάσεις ενός μοντέλου Kripke M , που είναι ισοδύναμες για τον agent X .

Επιβεβαιώστε ότι, για κάθε τροπική (modal) φόρμουλα φ :

$$(M , s) \models (K_X \ \varphi) \quad \textit{άν και μόνο άν} \quad (M , t) \models (K_X \ \varphi) .$$

Άσκηση 2

α Έστω s μία κατάσταση ενός μοντέλου Kripke M , όπου $(M , s) \models \varphi \vee \psi$.

Θα ήταν σωστό να συμπεράνουμε ότι:

$$(M , s) \models \varphi \quad \textit{είτε} \quad (M , s) \models \psi \ ;$$

β Έστω s μία κατάσταση ενός μοντέλου Kripke M , όπου $(M , s) \models (K_X \ \varphi \vee \psi)$.

Θα ήταν σωστό να συμπεράνουμε ότι:

$$(M , s) \models (K_X \ \varphi) \quad \textit{είτε} \quad (M , s) \models (K_X \ \psi) \ ;$$

Άσκηση 3

Επιβεβαιώστε ότι, για κάθε τροπική φόρμουλα φ και:κάθε μοντέλο M :

$$M \models (K_X \ \varphi) \rightarrow \varphi .$$

Άσκηση 4

Επιβεβαιώστε ότι, για κάθε τροπική φόρμουλα φ και:κάθε μοντέλο M :

$$M \models (K_X \ \varphi) \rightarrow K_X (K_X \ \varphi) .$$