ΤΜΗΜΑ ΜΗΥΠ

ΠΜΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ (ΥΔΑ)

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΓΝΩΣΗΣ ΜΕ ΛΟΓΙΚΗ

Ι. ΧΑΤΖΗΛΥΓΕΡΟΥΔΗΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

Δίνεται η παρακάτω γνώση

Ο Γιώργος εργάζεται στην Πάτρα, ενώ ο Παύλος στο Αίγιο. Ο Γιώργος είναι το αφεντικό του Πλούτο και ο Παύλος του Μπόμπι. Καθένας διαμένει εκεί που εργάζεται. Καθένας που έχει αφεντικό διαμένει εκεί που διαμένει και το αφεντικό του.

Μας ζητείται να αποφανθούμε

1. Αν ο Πλούτο διαμένει στην Πάτρα
2. Ποιοι διαμένουν στο Αίγιο

Αυτά απαιτούν λογικό συλλογισμό

1. *Αφού ο Πλούτο έχει αφεντικό τον Γιώργο και ο Γιώργος διαμένει στην Πάτρα, άρα και ο Πλούτο διαμένει στην Πάτρα*
2. *Προφανώς ο Παύλος. Όμως διαμένει και ο Μπόμπι, αφού έχει αφεντικό τον Παύλο που διαμένει στο Αίγιο*.

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ

Το ζητούμενο είναι πώς αυτό μπορεί να γίνει αυτόματα στον υπολογιστή:

Χρειάζεται μια **γλώσσα αναπαράστασης** των προτάσεων του κειμένου (**Λογική Πρώτης Τάξεως**):

$$\left.\begin{array}{l}
\text{works-in(george, patras)} \\
\text{works-in(paul, rio)} \\
\text{master(george, pluto)} \\
\text{master(paul, boby)} \\
(\forall x)(\forall y)(\text{works-in}(x, y) \Rightarrow \text{lives-in}(x, y)) \\
(\forall x)(\forall y)(\forall z)((\text{master}(x, y) \wedge \text{lives-in}(x, z)) \Rightarrow \text{lives-in}(y, z))
\end{array}\right\} \text{Λογικές Προτάσεις}$$

Και ένας **μηχανισμός** διαχείρισης των λογικών προτάσεων **για εξαγωγή συμπερασμάτων.**

ΛΟΓΙΚΗ ΩΣ ΓΛΩΣΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (1)

ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΛΟΓΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΑΣ

- **Σύνταξη (syntax**)
- **Σημαντική/Σημασιολογία (semantics)** ή **Θεωρία Μοντέλων (model theory)**
- **Αποδεικτική Θεωρία (proof theory)**

ΛΟΓΙΚΗ ΩΣ ΓΛΩΣΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (2)

ΘΕΩΡΙΑ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

(Προσδιορισμός έννοιας προτάσεων)

Ερμηνεία (Interpretation): $I = < D , f_I >$

D : Σύνολο πρωτογενών οντοτήτων

f_I : Ερμηνευτική συνάρτηση

σύμβολο $\xleftrightarrow{f_I}$ οντότητα(ες)

Μοντέλο (model) πρότασης: $I \models \varphi$ (φ αληθής με βάση την I)

Η I ικανοποιεί την φ ή I είναι μοντέλο της φ

Μοντέλο συνόλου προτάσεων S:

I μοντέλο S ανν $\forall \varphi \in S$, I μοντέλο φ

ΛΟΓΙΚΗ ΩΣ ΓΛΩΣΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (3)

Ικανοποιήσιμη (satisfiable) πρόταση:

ανν $\exists$ I : I μοντέλο της φ (I |= φ)

Ικανοποιήσιμο ή συνεπές (consistent) σύνολο προτάσεων:

ανν $\exists$ I : $\forall$φ $\in$ S, I μοντέλο φ

ΛΟΓΙΚΗ ΩΣ ΓΛΩΣΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (4)

Λογική συνεπαγωγή (logical implication)

Από πρόταση: **φ1 |= φ2** ανν $\forall$I : I |= φ1 => I |= φ2

Ιδιότητες: ανακλαστική, μεταβατική

Από σύνολο προτάσεων: **S |= φ’** ανν $\forall$φ $\in$ S, $\forall$I: I |= φ => I |= φ’

Άλλη ορολογία

έγκυρο επακόλουθο (valid consequence)
λογική συνέπεια (logical consequence)
σημαντική συνέπεια (semantic consequence)

Λογική ισοδυναμία

φ1 $\equiv$ φ2 ανν φ1 |= φ2 και φ2 |= φ1

ΛΟΓΙΚΗ ΩΣ ΓΛΩΣΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (5)

ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
(Παραγωγή προτάσεων)

Εξαγώγιμη πρόταση: S |- φ
ανν φ $\in$ S ή αποτέλεσμα εφαρμογής ΚΕΣ σε προτάσεις του S ή εξαγώγιμες από το S

Προτάσεις στο S $\rightarrow$ Υποθέσεις (premises) ή Αξιώματα (axioms)

Εξαγώγιμες από το S $\rightarrow$ Συμπεράσματα (conclusions) ή Θεωρήματα (theorems)

ΛΟΓΙΚΗ ΩΣ ΓΛΩΣΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (6)

Απόδειξη (proof) πρότασης φ από S

Μια ακολουθία προτάσεων με τελευταία τη φ και κάθε άλλη είτε από το S είτε εξαγχθείσα από το S

Άλλη ορολογία:

Συνεπαγωγή (deduction)

Εξαγωγή (derivation)

ΛΟΓΙΚΗ ΩΣ ΓΛΩΣΣΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ (7)

Ορθή (sound) διαδικασία-Ορθοί ΚΕΣ

Αν κάθε πρόταση που μπορεί να εξαχθεί από το S συνεπάγεται λογικά από το S.

$$S \vdash \varphi \Rightarrow S \models \varphi$$

(Αποτρέπει την παραγωγή λανθασμένων λύσεων)

Πλήρης (complete) διαδικασία-Πλήρεις ΚΕΣ

Αν κάθε πρόταση που συνεπάγεται λογικά από το S μπορεί να εξαχθεί από το S.

$$S \models \varphi \Rightarrow S \vdash \varphi$$

(Αποτρέπει την παράλειψη λύσεων)

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (1)

ΣΥΝΤΑΞΗ

ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ

- Σταθερές $\{C_i\}$: Κάθε C_i παριστάνει ένα στοιχείο του D.
- Λογικές σταθερές : {T, F}
- Μεταβλητές $\{v_i\}$: Κάθε v_i παριστάνει ένα υποσύνολο του D.
- Κατηγορήματα $\{P_i^n\}$: $D^n \rightarrow \{T, F\}$
- Συναρτήσεις $\{f_i^n\}$: $D^n \rightarrow D$

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (2)

- <u>Λογικά συνδετικά</u>: $\neg$ (not), $\vee$ (or), $\wedge$ (and), $\Rightarrow$ (implies), $\Leftrightarrow$ (equivalent)
- <u>Ποσοδείκτες</u>: $\forall$ (καθολικός/universal)

  $\exists$ (υπαρξιακός/existential)

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (3)

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ

- Ατομική έκφραση ή άτομο: $P^n (t_1, t_2, \ldots, t_n)$
- Όρος:
  i. σταθερά, ii. μεταβλητή,
  iii. $f^n (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, όπου t_i όρος.
- ΚΣΕ (Καλά Σχηματισμένη Έκφραση):
  1. άτομο
  2. $\neg F$, $(F \vee G)$, $(F \wedge G)$, $(F \Rightarrow G)$, $(F \Leftrightarrow G)$
  όπου F, G ΚΣΕς
  3. $(\forall x)\ F$, $(\exists x)\ F$, όπου x ελεύθερη μεταβλ. και F ΚΣΕ.

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (4)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ (ΚΣΕ)

$(\forall x)\ (\exists y)\ \mathrm{GREATER}(x, y)$
$(\forall x)\ ((Q(x) \wedge P(y)) \Rightarrow R(x)$
$(\forall x)\ (P(x) \Rightarrow (\exists y)\ Q(x, y))$
$(\forall x)\ (\neg\ (\exists y)\ \mathrm{on}(x, y) \Rightarrow \mathrm{clear}(x))$

Εμβέλεια (scope) ποσοδείκτη

- Η έκφραση στην οποία εφαρμόζεται
- Ό,τι βρίσκεται στα δεξιά του

Ανοικτή πρόταση

- Περιέχει ελεύθερες μεταβλητές

Κλειστή πρόταση

- Δεν περιέχει ελεύθερες μεταβλητές

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (5)

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΚΣΕ

Συζευκτική Κανονική Μορφή-ΣΚΜ
(Conjunctive Normal Form-CNF)

$(F \vee G) \wedge (\neg F \vee G) \wedge \ldots.$

Διαζευκτική Κανονική Μορφή-ΔΚΜ
(Disjunctive Normal Form-DNF)

$(F \wedge G) \vee (\neg F \wedge G) \vee \ldots.$

Κανονική Μορφή Prenex-ΚΜΡ
(Prenex Normal Form-PNF)

$(Q_1\, x_1)\ (Q_2\, x_2)\ \ldots\ (Q_n\, x_n)\ (F)$

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (6)

ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΑ

Ερμηνευτική Συνάρτηση

1. $f_I(c_i) = d_i \in D$
2. $f_I(v_i) = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\} \subseteq D$
3. $f_I(f_i^{\,n}) = \{ << d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{1n} > \; d_1 >,$

$<< d_{21}, d_{22}, \ldots, d_{2n} > \; d_2 >,$

$\ldots$

$<< d_{m1}, d_{m2}, \ldots, d_{mn} > \; d_m >\}$

όπου $\forall j, \quad (d_{j1}, d_{j2}, \ldots, d_{jn}) = d_j \in D \; (D^n \rightarrow D)$

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (7)

4. $f_I(P_i^n) = \{ < d_{11}, d_{12}, \ldots, d_{1n} >,$

$< d_{21}, d_{22}, \ldots, d_{2n} >,$

$\ldots$

$< d_{m1}, d_{m2}, \ldots, d_{mn} >\}$

όπου $\forall j$, $< d_{j1}, d_{j2}, \ldots, d_{jn} > \subseteq D \quad (D^n \rightarrow \{T, F\})$

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (8)

Σημασιολογικοί Κανόνες

1. Αν $\varphi \equiv P^n (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ τότε

   $I \models \varphi$ ανν $< t_1 , t_2 , \ldots, t_n > \in f_I (P^n)$

2. Αν $\varphi \equiv \neg F$ τότε $I \models \varphi$ ανν $I \not\models F$

3. Αν $\varphi \equiv (F \vee G)$ τότε $I \models \varphi$ ανν $I \models F$ ή $I \models G$

4. Αν $\varphi \equiv (F \wedge G)$ τότε $I \models \varphi$ ανν $I \models F$ και $I \models G$

5. Αν $\varphi \equiv (F \Rightarrow G)$ τότε $I \models \varphi$ ανν $I \not\models F$ ή $I \models G$

6. Αν $\varphi \equiv (\forall x) F$ τότε $I \models \varphi$ ανν $\forall x \in D \Rightarrow I \models F$

7. Αν $\varphi \equiv (\exists x) F$ τότε $I \models \varphi$ ανν $\exists x \in D \Rightarrow I \models F$

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (9)

Παράδειγμα

Απλή γλώσσα ΚΛΠΤ
* τρεις σταθερές: a, b, c
* κατηγορήματα : P^1, Q^1, R^2

<u>Μια ερμηνεία</u>

D = {μαρία, γιάννης, γιώργος}

f: f(a) = μαρία
f(b) = γιάννης
f(c) = γιώργος
f(P) = {μαρία}
f(Q) = {γιάννης, γιώργος}
f(R) = {<μαρία, γιάννης>, <γιάννης, μαρία>}

<u>Υπονοούμενες σχέσεις</u>

P (γυναίκα), Q(άνδρας) R(έχει-συζευχθεί)

ΛΟΓΙΚΗ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ-ΛΠΤ (FIRST ORDER LOGIC-FOL) (10)

ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΠΡΟΤΑΣΕΩΝ

1. P(a) → T
2. R(a, b) → T
3. P(c) $\Rightarrow$ R(b, c) → T
4. ($\exists$x) P(x) → T
5. ($\forall$x) ($\forall$y) (P(x) $\wedge$ Q(y)) $\Rightarrow$ R(y, x) → F

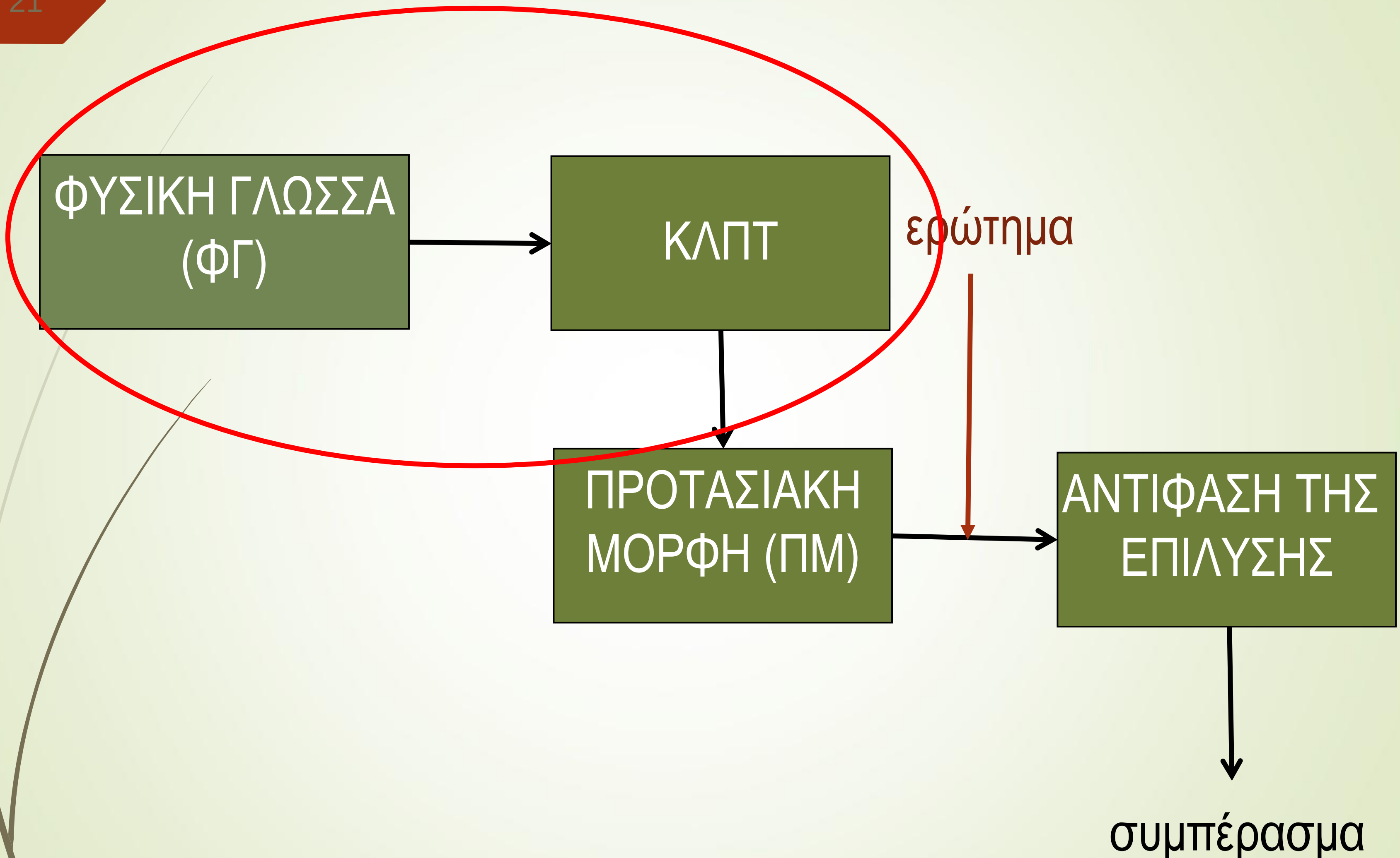
ΑΛΛΑΓΗ ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

f(b) = γιώργος, f(c) = γιάννης.

Τότε

2. R(a, b) → F

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ



ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΦΓ ΣΕ ΚΛΠΤ (1)

Υποδείξεις-Διαδικασία:

1. Προσδιορισμός κατηγορημάτων (ρήματα, ουσιαστικά, επιθετικοί προσδιορισμοί)
2. Προσδιορισμός συναρτήσεων (ρήματα ή επιθετικοί προσδιορισμοί που υποδηλώνουν σχέση 1-1)
3. Προσδιορισμός ορισμάτων (αριθμός, τύπος: σταθερά, μεταβλητή, συναρτησιακός τύπος, σύμβολα)
4. Προσδιορισμός ποσοδεικτών των μεταβλητών
5. Σχηματισμός ατομικών εκφράσεων (ατόμων)
6. Συνδυασμός ατομικών εκφράσεων-σχηματισμός πρότασης

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΦΓ ΣΕ ΚΛΠΤ (1)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

«Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί»

$(\forall x)$ άνθρωπος(x) $\Rightarrow$ θνητός(x)

«Όλοι μένουν εκεί που εργάζονται»

$(\forall x)\ (\exists y)$ εργάζεται(x, y) $\Rightarrow$ μένει(x, y)

$(\forall x)$ μένει(x, τόπος_εργασίας_του(x))

Χρήση σειράς ποσοδεικτών

$(\forall x)\ (\exists y)$ μένει(x, y)

$(\exists y)\ (\forall x)$ μένει(x, y)

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΦΓ ΣΕ ΚΛΠΤ (2)

Λανθασμένη χρήση του $\wedge$

«Όλοι οι φίλαθλοι αγαπούν το ποδόσφαιρο»

$(\forall x)$ φίλαθλος(x) $\wedge$ αγαπά(x, ποδόσφαιρο)

$(\forall x)$ φίλαθλος(x) $\Rightarrow$ αγαπά(x, ποδόσφαιρο)

Ισοδυναμία: $A \Rightarrow (B \Rightarrow \Gamma) \equiv (A \wedge B) \Rightarrow \Gamma$

“All humans eat some food”

$(\forall x)\ (\exists y)\ (human(x) \wedge food(y) \Rightarrow eats(x, y))$

$(\forall x)\ (\exists y)\ (human(x) \Rightarrow (food(y) \Rightarrow eats(x, y)))$

ΧΡΗΣΗ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

- Η χρήση του τελεστή ‘=’ είναι ορισμένες φορές απαραίτητη για την έκφραση μια πρότασης ΦΓ σε ΚΛΠΤ. Ο τελεστής αυτός χρησιμοποιείται συνήθως με ενδοθεματική γραφή: x=y.
- Υπάρχουν ειδικοί τρόποι και κανόνες χειρισμού της ισότητας και αντίστοιχες λογικές για την εξαγωγή/απόδειξη προτάσεων.
- Μπορεί όμως να γίνει χειρισμός και στα πλαίσια της ΚΛΠΤ προσθέτοντας απλώς κάποια αξιώματα που αφορούν την ισότητα:
    - $\forall x\ (x=x)$
    - $\forall x \forall y\ (x=y \Rightarrow y=x)$
    - $\forall x \forall y \forall z\ (x=y \wedge y=z \Rightarrow x=z)$

ΧΡΗΣΗ ΙΣΟΤΗΤΑΣ

"Every student loves some student"

$\forall x\ (\ student\ (x) \Rightarrow \exists y\ (student(y) \wedge loves(x,y)))$

"Every student loves some other student"

$\forall x\ (\ student\ (x) \Rightarrow \exists y\ (student(y) \wedge \neg\ (x = y) \wedge loves(x,y)))$.