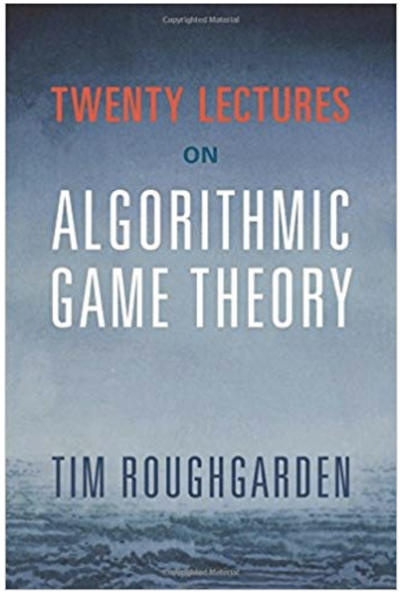
Ζητήματα Στρατηγικής στη Λήψη Αποφάσεων

Γιάννης Καραγιάννης
caragian@ceid.upatras.gr

Σήμερα …

- Διευκρινίσεις για το 3ο σετ ασκήσεων
- Chapter 9: Mechanism design with payment constraints
- Περιορισμοί προϋπολογισμού
- Δημοπρασίες αντιγράφων
- Clinching auction
- Σχεδιασμός μηχανισμών χωρίς χρήματα



Περιορισμοί προϋπολογισμού

- **Περιορίζουν το ποσό** που μπορεί να πληρώσει έναν συμμετέχων
- Στην πράξη: σε μια δημοπρασία μηχανής αναζήτησης, κάθε συμμετέχων δηλώνει μια **προσφορά ανά click** και τον **προϋπολογισμό** του
- Μικρή αλλά **δραστική αλλαγή** του μοντέλου συμπεριφοράς του συμμετέχοντα i με προϋπολογισμό B_i και αποτίμηση v_i
- Αποτέλεσμα ω με πληρωμή p_i:

$$\begin{array}{cc} v_i(\omega) - p_i & p_i \leq B_i \\ -\infty & p_i > B_i \end{array}$$

Δημοπρασία ενός αντικειμένου με προϋπολογισμούς

- Διάλεξε ισοπίθανα έναν από τους συμμετέχοντες
- Πληρωμή = 0

- Γίνεται καλύτερα με DSIC δημοπρασίες;

Δημοπρασίες αντιγράφων

- m πανομοιότυπα αντικείμενα, κάθε συμμετέχων i έχει αποτίμηση v_i για κάθε αντικείμενο και μπορεί να πάρει ένα ή περισσότερα αντικείμενα (αποτίμηση $k \cdot v_i$ για k αντικείμενα)
- **Δημόσιοι** προϋπολογισμοί

- **Τιμή ισορροπίας της αγοράς**: ζήτηση = προσφορά
- **Ζήτηση** του συμμετέχοντα i στην τιμή p

$$D_i(p) = \begin{cases} min\left\{\left\lfloor\frac{B_i}{p}\right\rfloor, m\right\} & p < v_i \\ 0 & p > v_i \end{cases}$$

Δημοπρασίες αντιγράφων

- **Ζήτηση** του συμμετέχοντα i στην τιμή p

$$D_i(p) = \begin{cases} min\left\{\left\lfloor \frac{B_i}{p} \right\rfloor, m\right\} & p < v_i \\ 0 & p > v_i \end{cases}$$

- $D_i(0) = m, D_i(\infty) = 0$, καθώς η τιμή ανεβαίνει, η ζήτηση $D_i(p)$ μικραίνει
- Μειώσεις είτε απότομες (όταν η τιμή υπερβεί την αποτίμηση) είτε κατά μια μονάδα (μείωση της ποσότητας $\left\lfloor \frac{B_i}{p} \right\rfloor$)
- **Συνολική ζήτηση:** $A(p) = \sum_{i=1}^{n} D_i(p),\ A^-(p) = \lim_{q \uparrow p} \sum_{i=1}^{n} D_i(q)\ \ A^+(p) = \lim_{q \downarrow p} \sum_{i=1}^{n} D_i(q)$

Δημοπρασίες αντιγράφων

Δημοπρασία ενιαίας τιμής (uniform price auction)

1. Έστω p η τιμή που εξισώνει την προσφορά και τη συνολική ζήτηση, $A^{-}(p) \geq m \geq A^{+}(p)$
2. Δώσε $D_i(p)$ αντίγραφα σε κάθε συμμετέχοντα i στην τιμή p
3. Αποφάσισε αυθαίρετα τον αριθμό των αντιγράφων για συμμετέχοντες με $v_i = p$ ώστε όλα τα αντίγραφα να δοθούν

Δημοπρασία ενιαίας τιμής

- Η δημοπρασία ενιαίας τιμής **δεν είναι DSIC**
- Δύο αντίγραφα, δύο συμμετέχοντες: $B_1 = +\infty, v_1 = 6, B_2 = v_2 = 5$
- Ας υποθέσουμε αρχικά αληθινές προσφορές. Τότε:
- Αν η τιμή είναι μικρότερη από 5, η συνολική ζήτηση είναι $A(p) = 3$
- Όταν η τιμή γίνει 5, $D_1(5) = 2$ και $D_2(5) = 0$
- Οπότε, η δημοπρασία ενιαίας τιμής κατανέμει 2 αντίγραφα στον συμμετέχοντα 1 στην τιμή 5 (**όφελος = 2**)

Δημοπρασία ενιαίας τιμής

- Η δημοπρασία ενιαίας τιμής **δεν είναι DSIC**
- Δύο αντίγραφα, δύο συμμετέχοντες: $B_1 = +\infty$, $v_1 = 6$, $B_2 = v_2 = 5$
- Ας υποθέσουμε ότι ο συμμετέχων 1 δηλώνει ψευδώς 3 ως προσφορά. Τότε:
- Αν η τιμή είναι μικρότερη από 3, η συνολική ζήτηση είναι $A(p) \geq 3$
- Όταν η τιμή γίνει 3, $D_1(3) = 1$ (γιατί;) και $D_2(3) = 1$
- Οπότε, η δημοπρασία ενιαίας τιμής κατανέμει ένα αντίγραφο στον συμμετέχοντα 1 στην τιμή 3 (**όφελος = 3**)

Δημοπρασία ενιαίας τιμής

- **Σέβεται τους προϋπολογισμούς** των συμμετεχόντων
- **Μονότονος** κανόνας αναθέσεων
- «**Λάθος**» πληρωμές

Clinching auction

- Μαζί με την **τρέχουσα τιμή** p, η δημοπρασία **ελέγχει την τρέχουσα ζήτηση** s (αρχικά m) και **τον υπολειπόμενο προϋπολογισμό** (residual budget) $\widehat{B}_i$ για κάθε συμμετέχοντα i
- Υπολειπόμενη ζήτηση: $\widehat{D}_i(p) = \begin{cases} min\left\{\left\lfloor\frac{\widehat{B}_i}{p}\right\rfloor, m\right\} & p < v_i \\ 0 & p > v_i \end{cases}$
- $\widehat{D}_i^+(p) = \lim_{q \downarrow p} \widehat{D}_i(p)$
- Η δημοπρασία **μειώνει την τρέχουσα τιμή** και **ο συμμετέχων** $\boldsymbol{i}$ **κλειδώνει κάποια αντίγραφα στην τιμή** $\boldsymbol{p}$ αν δεν τα διεκδικεί άλλος, δηλαδή όταν η συνολική υπολειπόμενη ζήτηση των υπολοίπων είναι χαμηλότερη από την τρέχουσα προσφορά

Clinching auction

Αρχικοποίηση: $p = 0$, $s = m$, $\hat{B}_i = B_i$ για κάθε συμμετέχοντα i

Ενόσω $s > 0$ (**υπάρχει προσφορά**)

  Αύξησε την τιμή $\boldsymbol{p}$ στην επόμενη μεγαλύτερη προσφορά ή επόμενη τιμή $\hat{B}_i/k$ για ακέραιο k

  Έστω i ο συμμετέχων με τη μεγαλύτερη υπολειπόμενη ζήτηση $\hat{D}_i^+(p)$

  Ενόσω $\sum_{j \neq i} \hat{D}_j^+(p) < s$ (**χαμηλή υπολειπόμενη ζήτηση αγνοώντας τον $\boldsymbol{i}$**)

    Αν $\sum_{j=1}^{n} \hat{D}_j^+(p) > s$ (**μεγάλη συνολική ζήτηση**)

      Δώσε ένα αντίγραφο στον συμμ. i στην τιμή p. Μείωσε το $\hat{B}_i$ κατά p και το s κατά 1

      Ξαναυπολόγισε τον συμμετέχοντα i με τη μεγαλύτερη υπολειπόμενη ζήτηση $\hat{D}_i^+(p)$

    Αλλιώς, αν $\sum_{j=1}^{n} \hat{D}_j^+(p) \leq s$ (**μικρή συνολική ζήτηση**)

      Δώσε $\hat{D}_j^+(p)$ αντίγραφα σε κάθε συμμετέχοντα j στην τιμή p

      Δώσε αντικείμενα σε συμμετέχοντες l με $v_l = p$

      Θέσε $s = 0$

Clinching auction: παράδειγμα

- Δύο αντίγραφα, δύο συμμετέχοντες: $B_1 = +\infty, v_1 = 6, B_2 = v_2 = 5$
- Υποθέτοντας αληθινές προσφορές, το πρώτο αντίγραφο δίνεται στον συμμ. 1 στην τιμή 5/2 και το δεύτερο πάλι στον 1 στην τιμή 5 (**όφελος = 4.5**)
- Μπορεί να βελτιωθεί δηλώνοντας ψευδή προσφορά?

Clinching auction

- Πάντα **τερματίζει**
- Αναθέτει **ακριβώς m αντίγραφα**
- **Σέβεται τους προϋπολογισμούς**
- Είναι **DSIC** όταν οι προϋπολογισμοί είναι δημόσιοι
- Γιατί; Ο κανόνας ανάθεσης είναι **μονότονος** και οι πληρωμές είναι ακριβώς αυτές που ορίζονται από το Λήμμα του Myerson
- Εναλλακτική απλούστερη απόδειξη …

Clinching auction is DSIC

- Υποθέτοντας δημόσιους προϋπολογισμούς, το μόνο που ελέγχει ο συμμετέχων i είναι **η στιγμή που «βγαίνει εκτός δημοπρασίας»**
- Κάθε αντικείμενο που «σφραγίζει» με τιμή $p < v_i$ (αντίστοιχα, $p > v_i$), συνεισφέρει θετικά (αντ., αρνητικά) στο όφελος
- Επομένως, **η φιλαλήθεια εγγυάται μη αρνητικό όφελος**
- Με ψευδή προσφορά $b_i < v_i$, **η δημοπρασία συμπεριφέρεται το ίδιο μέχρι την τιμή $\boldsymbol{p = b_i}$** και στη συνέχεια ο συμμ. i δεν μπορεί να διεκδικήσει αντίγραφα που θα σφράγιζε σε τιμή στο διάστημα $[b_i, v_i]$ και τα οποία θα αύξαναν το όφελος
- Με ψευδή προσφορά $b_i < v_i$, **η δημοπρασία συμπεριφέρεται το ίδιο μέχρι την τιμή $\boldsymbol{p = v_i}$** και επιπλέον αντίγραφα που μπορεί να πάρει ο συμμ. i με τιμή > v_i θα του μειώσουν το όφελος

Κατανομή κατοικιών

- **House allocation**
- n συμμετέχοντες, κάθε συμμετέχων έχει το σπίτι του
- Κάθε συμμετέχων έχει μια σειρά προτίμησης για όλα τα σπίτια
- Πως μπορούμε **να ανακατανείμουμε τα σπίτια ώστε οι συμμετέχοντες να είναι όσο το δυνατόν πιο χαρούμενοι**;
- **Top trading cycle** (TTC) algorithm

Top trading cycle (TTC) algorithm

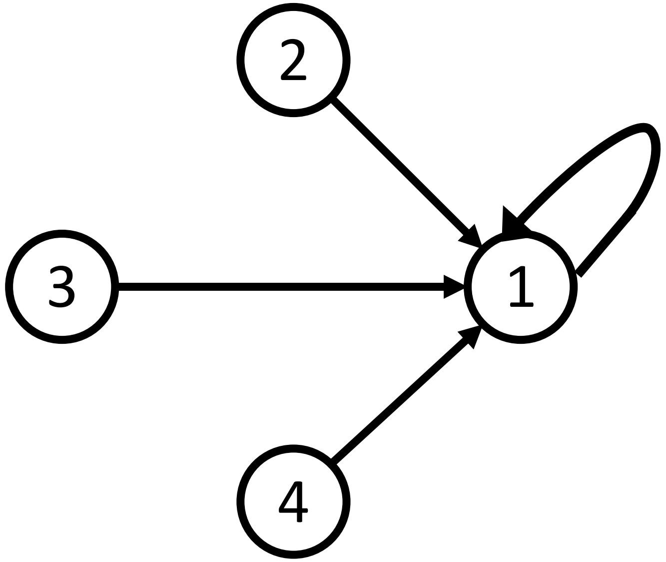
N = σύνολο συμμετεχόντων

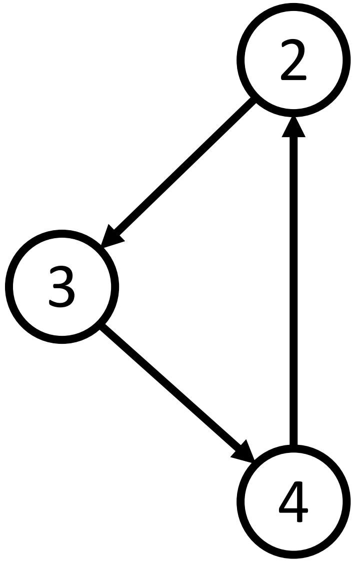
Ενόσω $N \neq \emptyset$

- Κατασκεύασε το κατευθυνόμενο γράφημα G με κόμβους τους συμμετέχοντες ακμή (i, j) αν το προτιμότερο σπίτι για τον συμμετέχοντα i είναι το σπίτι του j
- Υπολόγισε όλους τους κατευθυνόμενους κύκλους του G
- Για κάθε ακμή (i, j) κάθε κύκλου C, δώσε το σπίτι του j στον i
- Βγάλε τους κόμβους του C από το σύνολο N

TTC: παράδειγμα

- Συμμετέχων 1: πρώτη προτίμηση: 1
- Συμμετέχων 2: πρώτη προτίμηση: 1, δεύτερη προτ.: 3
- Συμμετέχων 3: πρώτη προτίμηση: 1, δεύτερη προτ.: 4
- Συμμετέχων 4: πρώτη προτίμηση: 1, δεύτερη προτ.: 2





Top trading cycle

- Ο αλγόριθμος TTC είναι **DSIC**
- Καταρχάς, κάθε συμμετέχων i που πήρε σπίτι στο γύρο k,
  - το προτιμάει σε σχέση με όλα τα σπίτια εκτός από αυτά που δόθηκαν σε προηγούμενους γύρους
  - το πήρε από κάποιον που επίσης πήρε σπίτι στο γύρο k
- Ιδέα απόδειξης: **Καμιά ψευδής δήλωση δεν μπορεί να δώσει στον $\boldsymbol{i}$ κάποιο σπίτι που δόθηκε σε προηγούμενο γύρο**
- Γιατί; Σε κανένα προηγούμενο γύρο δεν υπάρχει ακμή από κάποιον που πήρε σπίτι προς τον i
- **Πόσο ενδιαφέρον είναι αυτό**; Π.χ., ο αλγόριθμος που δεν ανακατανέμει κανένα σπίτι είναι επίσης DSIC

Top trading cycle

- Ονομάζουμε ένα σύνολο συμμετεχόντων **ομάδα βελτίωσης** (blocking coalition) αν υπάρχει τρόπος να ανακατανεμηθούν τα σπίτια μεταξύ τους ώστε όλοι να προτιμούν τη νέα κατανομή
- **Κατανομή πυρήνα** (core allocation): μια κατανομή που δεν έχει ομάδες βελτίωσης
- Η κατανομή που υπολογίζεται από τον αλγόριθμο TTC είναι η **μοναδική** κατανομή πυρήνα
- Γιατί; Πρώτον, είναι η μοναδική **πιθανή** κατανομή πυρήνα
- Δεύτερον, γιατί είναι **όντως** κατανομή πυρήνα

Σύνοψη

- Περιορισμοί προϋπολογισμού
- Δημοπρασίες αντιγράφων
- Uniform-price & Clinching auction
- Σχεδιασμός μηχανισμών χωρίς χρήματα
- House allocation
- Top trading cycle algorithm