Κεφάλαιο 1

Οι μιγαδικοί αριθμοί

1.1 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς αφού $x^2 \geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x. Διατυπώνεται λοιπόν το ερώτημα κατά πόσον υπάρχει ένα σύστημα αριθμών που κατά κάποια έννοια επεκτείνει τους πραγματικούς αριθμούς και είναι τέτοιο ώστε η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ να έχει λύση. Αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο σύστημα υπάρχει και αυτό είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Στη συνέχεια με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών με $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών και με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών. Επίσης με $\mathbb{Q}$ συμβολίζουμε τους ρητούς αριθμούς.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Στο σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ με τη γνωστή πρόσθεση

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1.1}$$

ορίζουμε την πράξη του πολαπλασιασμού με τη σχέση

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.2}$$

Παρατηρούμε ότι για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \tag{1.3}$$

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0) \tag{1.4}$$

$$(x, y)(1, 0) = (x, y), \tag{1.5}$$

δηλαδή το $(0, 0)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, το $(-x, -y)$ είναι το αντίθετο του (x, y), ενώ το $(1, 0)$ είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Εάν $(x, y) \neq (0, 0)$ και (a, b) είναι το αντίστροφο στοιχείο του (x, y), εάν αυτό υπάρχει, τότε θα πρέπει

$$(x, y)(a, b) = (xa - yb, xb + ya) = (1, 0).$$

Υπενθυμίζουμε ότι $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ εάν και μόνον εάν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$, τότε από την παραπάνω ισότητα προκύπτουν οι σχέσεις $xa - yb = 1$ και $xb + ya = 0$. Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε

$$a = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad b = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Οι αριθμοί a και b υπάρχουν, καθόσον $x^2 + y^2 > 0$ οποτεδήποτε $(x, y) \neq (0, 0)$, επομένως το αντίστροφο του (x, y) το οποίο συμβολίζουμε με $(x, y)^{-1}$ είναι το

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right). \tag{1.6}$$

Το σύνολο των σημείων $z = (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις (1.1) και (1.2) συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$ και τα στοιχεία του καλούμε *μιγαδικούς αριθμούς* (complex numbers). Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{C}$ είναι σώμα, ικανοποιούνται δηλαδή οι νόμοι

M1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.

M2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

M3. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{0} = (0, 0)$, έτσι ώστε $z + \mathbf{0} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

M4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός $-z$, έτσι ώστε $z + (-z) = \mathbf{0}$.

M5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.

M6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

M7. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{1} = (1, 0)$, έτσι ώστε $z \cdot \mathbf{1} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

M8. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός z^{-1} έτσι ώστε $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.

M9. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

Απόρροια των πράξεων (1.1) και (1.2) είναι ότι $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$ και $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$, έτσι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \tag{1.7}$$

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, σημείο της ευθείας, μπορεί να ταυτοποιηθεί με το $(x, 0)$, σημείο του επιπέδου. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \qquad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

δηλαδή το σώμα των μιγαδικών αριθμών επεκτείνει κατά φυσιολογικό τρόπο το σώμα των πραγματικών αριθμών, και υπό το πρίσμα της ταυτοποίησης $x \equiv (x, 0)$ μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Στη συνέχεια θα γράφουμε 0 αντί για $\mathbf{0}$ και 1 αντί για $\mathbf{1}$. Θέτοντας $i = (0, 1)$ σύμφωνα με την παραπάνω ταυτοποίηση η (1.7) γράφεται

$$(x, y) = x + iy. \tag{1.8}$$

Ο μιγαδικός αριθμός i λέγεται *φανταστική μονάδα* (imaginary unit) για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω. Εάν $z = (x, y)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $z = x + iy$. Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε το άθροισμα $z_1 + z_2$ και το γινόμενο $z_1 z_2$ δίνονται, μέσω των (1.1) και (1.2), από τις σχέσεις

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.9}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{1.10}$$

Όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, επαγωγικά ορίζουμε $z^{n+1} = z^n z$, για κάθε φυσικό αριθμό n. Παρατηρούμε ότι

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1,$$

σύμφωνα με την ταυτοποίηση, γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία φανταστική μονάδα. Επειδή $-i = (0,-1)$ θα είναι

$$(-i)^2 = (0,-1)(0,-1) = (-1,0) = -1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $i^2 + 1 = 0$ και $(-i)^2 + 1 = 0$.

Παρατήρηση 1.1. Ας θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Από τον αντιμεταθετικό νόμο (νόμος M5) έχουμε $iy = yi$ οπότε ο μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy, \qquad \text{ή} \qquad z = x + yi.$$

Επίσης από την μοναδικότητα του αντίθετου μιγαδικού αριθμού έπεται ότι

$$i(-y) = (-1)iy = -iy.$$

Έτσι από τις (1.8), (1.4) και (1.6) έπεται ότι οι $-z$ και z^{-1}, εφόσον $z \neq 0$, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$-z = -x + i(-y) = -x - iy \tag{1.11}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{1.12}$$

Παρατήρηση 1.2. Έστω $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε κάνοντας χρήση του νόμου M9 (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) && (\text{νόμος M9}) \\
&= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 && (\text{νόμος M9}) \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 && (\text{νόμος M5}) \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 && (i^2 = -1) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) && (\text{νόμος M9})
\end{aligned}$$

που είναι η (1.10). Ο πολλαπλασιασμός δηλαδή, μιγαδικών αριθμών μπορεί να εκτελεσθεί με χρήση της οικείας, από τους πραγματικούς αριθμούς, επιμεριστικής ιδιότητας.

Παρατήρηση 1.3. Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπως στους πραγματικούς αριθμούς, η αφαίρεση και το πηλίκο ορίζονται, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) + (-x_2 + i(-y_2)) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{1.13}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}. \tag{1.14}$$

Παρατηρούμε ότι για $z_1 = 1 = 1 + i0$ και $z_2 = z = x + iy$ από την τελευταία σχέση έπεται

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = z^{-1}. \tag{1.15}$$

Επακόλουθο της τελευταίας αυτής σχέσης είναι η

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2}. \tag{1.16}$$

• Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, τότε από τον ορισμό του $\mathbb{C}$ έχουμε ότι $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$. Ο x λέγεται *πραγματικό μέρος* (real part) του z και γράφουμε $x = \operatorname{Re} z$, και ο y λέγεται *φανταστικό μέρος* (imaginary part) του z και γράφουμε $y = \operatorname{Im} z$. Έτσι εάν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\operatorname{Re} z = z$ και $\operatorname{Im} z = 0$, ενώ εάν $z = iy$, με $y \in \mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re} z = 0$ και $\operatorname{Im} z = -iz$.

• Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι *ίσοι* και γράφουμε $z_1 = z_2$, εάν και μόνον εάν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$, ισοδύναμα $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ και $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

• Δείξαμε λοιπόν ότι το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ αποτελεί μία φυσιολογική επέκταση των πραγματικών αριθμών, όπου στο σύστημα αυτό η εξίσωση $z^2 + 1 = 0$ έχει λύση.

• Κλείνουμε αυτή τη παράγραφο με μία παρατήρηση. Δεν υπάρχει στο $\mathbb{C}$ μία διάταξη που να είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και να επεκτείνει τη γνωστή διάταξη του $\mathbb{R}$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι μία τέτοια υπάρχει και αν τη συμβολίσουμε με '$\leq$', τότε θα πρέπει να ισχύει $0 \leq 1$, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Επίσης ένα από τα δύο είναι αληθές: είτε $0 \leq i$, είτε $0 \geq i$. Εάν $0 \leq i$, τότε πολλαπλασιάζοντας με i παίρνουμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι άτοπο. Όμοια εάν $0 \geq i$ τότε πολλαπλασιάζοντας πάλι με i θα είχαμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι επίσης άτοπο.

1.2 Το μέτρο ο συζυγής και το όρισμα μιγαδικού αριθμού

Ορισμός 1.1. Έστω $z = x + iy$ ένας μιγαδικός αριθμός.

(1) *Το μέτρο* (modulus) του z, συμβολίζεται με $|z|$, ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.17}$$

(2) *Ο συζυγής* (conjugate) του z, συμβολίζεται με $\bar{z}$, ορίζεται να είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\bar{z} = x - iy. \tag{1.18}$$

Παρατηρούμε ότι αν $z \in \mathbb{R}$, ισοδύναμα $y = 0$, τότε $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$, δηλαδή το μέτρο μιγαδικού αριθμού γενικεύει την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Για το λόγο αυτό το μέτρο το λέμε και απόλυτη τιμή. Επιπλέον αν $z \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{z} = z$.

Παράδειγμα 1.1. Να βρεθεί το μέτρο και ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $-i(2 - i3)$.

Εάν $z = -i(2 - i3)$, τότε $z = -i2 + 3i^2 = -3 - i2$, οπότε

$$\begin{aligned} |z| &= |-i(2-i3)| = |-3-i2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} \\ \bar{z} &= \overline{-i(2-i3)} = \overline{-3-i2} = -3 + i2. \end{aligned}$$

Οι ιδιότητες του μέτρου και του συζυγούς μιγαδικού αριθμού συνοψίζονται στη

Πρόταση 1.1. *Ισχύουν οι ιδιότητες:*

(1) $|z| \geq 0$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$, *και* $|z| = 0$ *εάν και μόνον εάν* $z = 0$.

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, *για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών* z_1 *και* z_2.

(3) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, *για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών* z_1 *και* z_2 *με* $z_2 \neq 0$.

(4) $z = \bar{z}$ *εάν και μόνον εάν* $z \in \mathbb{R}$.

(5) $z = \bar{\bar{z}}$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

(6) $|z| = |\bar{z}|$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

(7) $|z|^2 = z\bar{z}$, *για κάθε* $z \in \mathbb{C}$.

(8) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, *για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών* z_1 *και* z_2.

(9) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, *για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών* z_1 *και* z_2.

(10) $\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, *για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών* z_1 *και* z_2 *με* $z_2 \neq 0$.

Απόδειξη. Έστω $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, και $z_2 = x_2 + iy_2$ να είναι μιγαδικοί αριθμοί.

(1) Επειδή $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, είναι προφανές ότι $|z| \geq 0$, ενώ $|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(2) Από την σχέση (1.10) έπεται ότι $|z_1 z_2| = |(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_1 + x_2 y_2)|$ έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2} = \sqrt{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &= |z_1||z_2|. \end{aligned}$$

(3) Από την (1.15) για $z \neq 0$ έχουμε

$$1 = z\frac{1}{z} \Longrightarrow 1 = \left|z\frac{1}{z}\right| = |z|\left|\frac{1}{z}\right| \Longrightarrow \frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|$$

με χρήση της ιδιότητας 2, επομένως για $z_2 \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(4) Έστω $z = x + iy$, τότε $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow 0 = i2y \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(5) Έστω $z = x + iy$, τότε $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

(6) Έστω $z = x + iy$, τότε $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

(7) Εάν $z = x + iy$, έχουμε $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

(8) Από την (1.9) έπεται ότι $\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(9) Έχουμε $\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_1 + x_2y_2) = \overline{z_1 z_2}$, μιας και από την (1.10) $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_1 + x_2y_2)$.

(10) Από την (1.15) για $z \neq 0$ έχουμε

$$1 = z\frac{1}{z} \Longrightarrow 1 = \bar{1} = \overline{\left(z\frac{1}{z}\right)} = \bar{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \Longrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

με χρήση της ιδιότητας 9, επομένως για $z_2 \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1\frac{1}{z_2}} = \bar{z}_1\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1\frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 1.4. Εάν $z = x + iy$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε $x = \operatorname{Re} z$ και $y = \operatorname{Im} z$. Επειδή $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$, και $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = i2y$, συμπεραίνουμε

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{1.19}$$

Επίσης $x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, όμοια $y \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \qquad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|. \tag{1.20}$$

Άσκηση 1.1. Να δειχθεί ότι ο αριθμός a είναι πραγματικός εάν και μόνον εάν $\operatorname{Re} a = a$.

Παρατήρηση 1.5. Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί θυμίζουμε τη γνωστή ιδιότητα της απόλυτης τιμής $|a + b| \leq |a| + |b|$. Το ίδιο ισχύει και για μιγαδικούς αριθμούς. Ας είναι z_1, και z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύει η *τριγωνική ανισότητα*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.21}$$

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 1.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) && (\text{ ιδιότητες 7 και 8 }) \\
&= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} + |z_2|^2 && (\text{ ιδιότητες 7 και 5 }) \\
&= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 && (\text{ σχέση (1.19) }) \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 && (\text{ σχέση (1.20) }) \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 && (\text{ ιδιότητα 2 }) \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2 && (\text{ ιδιότητα 6 })
\end{aligned}$$

απ΄ όπου έπεται η ζητούμενη τριγωνική ανισότητα.

Άσκηση 1.2. Εάν $z \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

Παρατήρηση 1.6. Από τις ιδιότητες που περιγράφονται στη Πρόταση 1.1 έπεται ότι για $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{1.22}$$

που είναι ακριβώς η σχέση (1.15). Επειδή $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, έπεται αμέσως ότι

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{-i}{|i|^2} = -i. \tag{1.23}$$

γενικότερα εάν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| = 1$, από την (1.22) έπεται ότι $1/z = \bar{z}$.

Αν $z = x + iy \neq 0$, τότε $|z| > 0$, οπότε τα κλάσματα

$$\frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{και} \qquad \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ορίζονται και ικανοποιούν τη σχέση

$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{x}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

κατά συνέπεια υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Ορισμός 1.2. Έστω $z \neq 0$, και έστω $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Ορίζουμε σαν *όρισμα* (argument) του z και γράφουμε $\arg z$ το σύνολο όλων των τιμών $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi \,:\, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Παρατήρηση 1.7. Είναι προφανές ότι κάθε διάστημα $(a, a + 2\pi]$, με $a \in \mathbb{R}$ περιέχει ένα μοναδικό όρισμα του z. Εάν θ_a είναι αυτό το όρισμα, $a < \theta_a \leq a + 2\pi$, γράφουμε $\theta_a = \arg_a z$. Έτσι

$$\{\arg_a z\} = \arg z \cap (a, a + 2\pi].$$

Ορισμός 1.3. Ορίζουμε σαν *κύριο* ή *πρωτεύον* (principal) όρισμα του z εκείνο το θ για το οποίο ισχύει $\theta \in (-\pi, \pi]$. Συμβολίζουμε με $\operatorname{Arg} z$ το κύριο όρισμα του z, οπότε για κάθε $z \neq 0$ στο $\mathbb{C}$ είναι $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Παράδειγμα 1.2. Να βρεθεί το όρισμα και το κύριο όρισμα για κάθε έναν από τους αριθμούς (i) $z = 1$, (ii) $z = -2$, (iii) $z = i$, (iv) $z = -1 - i$. Επίσης, εάν $a \neq 0$ να βρεθεί το όρισμα θ_a του $z = -1 - i$ ώστε $\theta_a \in (a, a + 2\pi]$, δηλαδή το $\arg_a(-1 - i)$.

(i) Επειδή $z = x = |z| = 1$, είναι $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, άρα $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, επομένως

$$\arg 1 = \{2k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg} 1 = 0.$$

(ii) Εδώ είναι $x = -2$, $y = 0$ και $|z| = 2$, άρα $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$, άρα $\theta = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, επομένως

$$\arg(-2) = \{(2k + 1)\pi \ : k \in \mathbb{Z}\} = \{-\pi + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg}(-2) = \pi.$$

(iii) Εδώ είναι $x = 0$, $y = 1$ και $|z| = 1$, άρα $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$, άρα $\theta = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, επομένως

$$\arg i = \{\pi/2 + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg} i = \pi/2.$$

(iv) Εδώ είναι $x = y = -1$ και $|z| = \sqrt{2}$, άρα $\cos\theta = \sin\theta = -1/\sqrt{2}$, άρα ένα όρισμα είναι $\theta = 5\pi/4$, και ένα άλλο το $\theta = -3\pi/4$, επομένως

$$\arg(-1 - i) = \{5\pi/4 + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\} = \{-3\pi/4 + 2k\pi \ : k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\text{και} \qquad \operatorname{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4.$$

Σημειώνουμε ότι $5\pi/4 \notin (-\pi, \pi]$.

Επειδή $\operatorname{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4$ ψάχνουμε $k_a \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$a < 2k_a\pi - \frac{3\pi}{4} \leq a + 2\pi.$$

Ισοδύναμα, θέλουμε

$$a + \frac{3\pi}{4} < 2k_a\pi \leq a + \frac{3\pi}{4} + 2\pi \Leftrightarrow \frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8} < k_a \leq \frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8} + 1.$$

Το διάστημα

$$\left(\frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8}, \frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8} + 1\right]$$

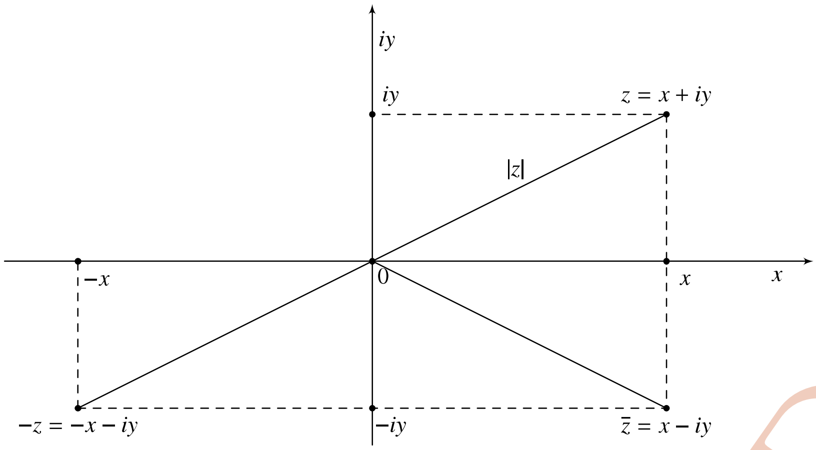
περιέχει μόνο το ένα από τα άκρα του και έχει μήκος 1, κατά συνέπεια περιέχει ακριβώς έναν ακέραιο, τον

$$k_a = \left[\frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8}\right] + 1,$$

όπου με [ ] συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος.

1.3 Το μιγαδικό επίπεδο

Οι πραγματικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε σημεία μιάς προσανατολισμένης ευθείας. Από τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών έπεται ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και του σημείου (x, y) του επιπέδου. Έτσι το επίπεδο του οποίου κάθε σημείο (x, y) ταυτίζουμε με τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ονομάζουμε *μιγαδικό επίπεδο* (complex plane). Ο άξονας των x λέγεται *πραγματικός άξονας* (real axis), ενώ



Σχήμα 1.1: Γραφική απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ και $-z$.

αυτός των y λέγεται *φανταστικός άξονας* (imaginary axis). Το μέτρο $|z|$ είναι η απόσταση του σημείου z από το 0, ενώ ο συζυγής $\bar{z}$ του z είναι το συμμετρικό σημείο του z ως προς τον πραγματικό άξονα.

Το άθροισμα των $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ αντιστοιχεί στο σημείο $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Έτσι λοιπόν ο αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να ταυτιστεί με το διάνυσμα με αρχή το σημείο $(0, 0)$ και πέρας το (x, y) ενώ το μέτρο $|z|$ είναι το μέτρο του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθυγράμου τμήματος από το $(0, 0)$ στο (x, y). Ο $z_1 + z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και z_2, και ο $z_1 - z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και $-z_2$.

Οι αριθμοί z_1 και z_2 ορίζουν ένα παραλληλόγραμο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), και $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Τα $|z_1 + z_2|$ και $|z_1 - z_2|$ είναι τα μέτρα των διαγωνίων του παραλληλογράμου. Από την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας (1.21) προκύπτει *ο νόμος του παραλληλογράμου*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \tag{1.24}$$

ο οποίος μας λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμου ισούται με το άθροίσμα των τετραγώνων των πλευρών του.

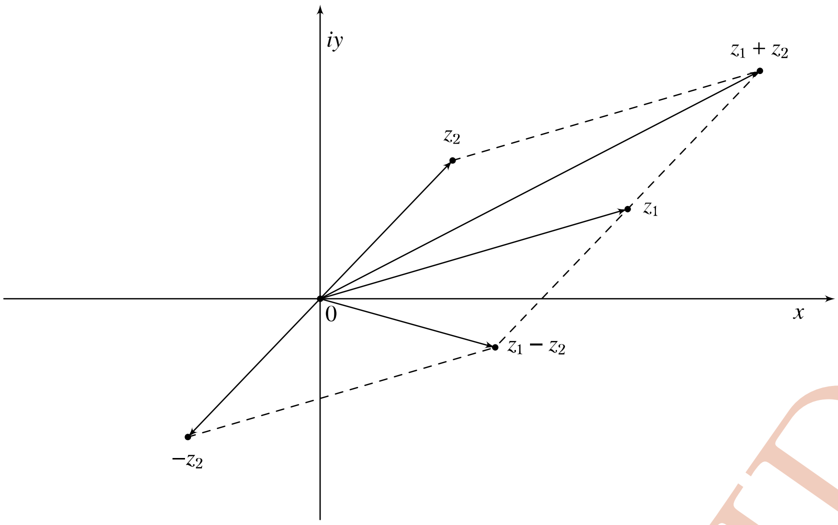
1.3.1 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(x, y) \neq (0, 0)$ τότε ο μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$. Παρατηρούμε ότι

$$|z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = r$$

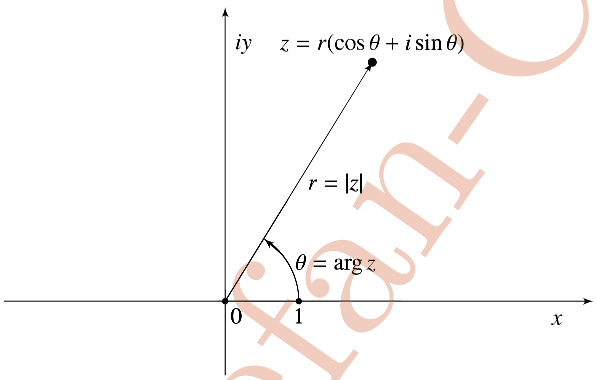
ενώ το $\theta \in \arg z$, είναι καταληπτό σαν τη γωνία (σε ακτίνια) μεταξύ της πραγματικής θετικής ημιευθείας και του ευθυγράμμου τμήματος από το 0 στο z. Η έκφραση

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{1.25}$$



Σχήμα 1.2: Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών.

λέγεται *τριγωνομετρική μορφή* (trigonometric form) ή *πολική μορφή* (polar form) του μιγαδικού αριθμού z.



Σχήμα 1.3: Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Παράδειγμα 1.3. Να γραφούν σε πολική μορφή οι αριθμοί (i) $z = 1+i$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = -2$.

(i) Επειδή $|1+i| = \sqrt{2}$, έχουμε

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

(ii) $1 = 1 + i0 = \cos 0 + i\sin 0$.
(iii) $-2 = 2(-1+i0) = (\cos\pi + i\sin\pi)$.

Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)], \end{aligned}$$

οπότε η πολική μορφή του γινομένου $z_1 z_2$ δίνεται από τη σχέση

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \tag{1.26}$$

Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι μη μηδενικός αριθμός, ισοδύναμα $r \neq 0$, τότε από τη σχέση (1.26) έπεται ότι

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]. \tag{1.27}$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση αυτή προκύπτει επίσης από την (1.22). Εάν τώρα $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι διάφορος του μηδενός, τότε συνδυάζοντας τις (1.26) και (1.27) έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{1.28}$$

Παράδειγμα 1.4. Εάν $z_1 = 2\sqrt{3} - i2$ και $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ να γραφούν οι z_1 και z_2 σε πολική μορφή και να υπολογισθούν οι $z_1 z_2$ και z_1/z_2.

Επειδή $|z_1| = |2\sqrt{3} - i2| = \sqrt{16} = 4$ και $|z_2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ θα έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right], \\ z_2 &= 2\left[\left(-\frac{1}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Από την σχέση (1.26) υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 8\left[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right] \\ &= i8, \end{aligned}$$

ενώ από την (1.28) το πηλίκο

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \\ &= 2\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Εάν $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ με μαθηματική επαγωγή μέσω της (1.26) έχουμε

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)], \tag{1.29}$$

και ειδικά για $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ προκύπτει

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)], \tag{1.30}$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \neq 0$, από τις σχέσεις (1.27) και (1.30) έπεται ότι για $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)],$$

και επειδή $z^0 = 1$, τελικά η σχέση (1.30) ισχύει για κάθε ακέραιο $0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Εάν $z = \cos\theta + i\sin\theta$ η (1.30) μετασχηματίζεται στην

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{1.31}$$

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή σαν *τύπος του de Moivre*.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή του τύπου του de Moivre είναι η εύρεση ριζών μιγαδικών αριθμών. Θέτουμε λοιπόν το εξής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εάν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $n \geq 2$ είναι ένας φυσικός αριθμός να βρεθούν μιγαδικοί z τέτοιοι ώστε $z^n = w$. Έστω ότι $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε παρατηρούμε ότι ο αριθμός $z_0 = r^{1/n}(\cos(\theta/n) + i\sin(\theta/n))$ ικανοποιεί την

$$z_0^n = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)\right]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = w, \tag{1.32}$$

δηλαδή ο z_0 είναι μία λύση του προβλήματος. Όμως και οι $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n] + i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$, $k = 1, 2, \ldots$ είναι λύσεις μιας και

$$z_k^n = \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n = r(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)) = w. \tag{1.33}$$

Από τις (1.32) και (1.33) βλέπουμε ότι οι αριθμοί $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n] + i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$ ικανοποιούν $z_k^n = w$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$. Στη συνέχεια θυμίζουμε ότι για n σταθερό κάθε $k \in \mathbb{N}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $k = m + ln$ όπου $m = 0, 1, \ldots, n-1$ και $l \in \mathbb{N}$ (διαίρεση του k δια n). Έτσι εάν $k \geq n$, τότε

$$\begin{aligned}
z_k &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2m\pi+2ln\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2m\pi+2ln\pi}{n}\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2m\pi}{n} + 2l\pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2m\pi}{n} + 2l\pi\right)\right)\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2m\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2m\pi}{n}\right)\\
&= z_m
\end{aligned}$$

όπου $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. **Συμπέρασμα**: Οι n το πλήθος μιγαδικοί αριθμοί

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{1.34}$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και λέγονται *ν*οστες ρίζες του $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Παράδειγμα 1.5. Επειδή $1 = \cos 0 + i\sin 0$, οι *n-οστες ρίζες της μονάδας* είναι οι αριθμοί

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{1.35}$$

Εάν ορίσουμε

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{1.36}$$

τότε από τον τύπο του de Moivre έπεται ότι οι *ν*οστες ρίζες της μονάδας είναι οι 1, ω_n, ω_n^2, $\ldots$, ω_n^{n-1}. Παρατηρούμε ότι $\omega_n^n = 1$. Οι *ν*οστες ρίζες της μονάδας είναι οι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο.

Παράδειγμα 1.6. Να βρεθούν αριθμοί z τέτοιοι ώστε $z^2 = -2$ (τετραγωνικές ρίζες του -2).

Είναι $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, οπότε οι αριθμοί που ζητούμε δίνονται από τη σχέση

$$z_k = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1.$$

Έτσι έχουμε

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = i\sqrt{2}, \qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -i\sqrt{2}.$$

Πράγματι $z_0^2 = (i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$ και $z_1^2 = (-i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$.

1.4 Γεωμετρικοί τόποι στο μιγαδικό επίπεδο

Η ευθεία των πραγματικών αριθμών, σαν υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, μπορεί να εκφρασθεί σαν το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μηδενικό φανταστικό μέρος, δηλαδή

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Επίσης κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με τον συζυγή του, κατά συνέπεια

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \bar{z} = z\}.$$

Γενικότερα, υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου μπορούν να εκφρασθούν με κατάλληλες αλγεβρικές σχέσεις. Άλλα παραδείγματα είναι το σύνολο $\{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Re} z > 0\}$ που παριστάνει το ημιεπίπεδο στα δεξιά του φανταστικού άξονα, και το $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \text{ και } \operatorname{Im} z > 0\}$ που παριστάνει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου.

Ας θεωρήσουμε τώρα τους μιγαδικούς αριθμούς z με την ιδιότητα $|z| = 1$. Έτσι εάν $z = x + iy$ οι αριθμοί αυτοί ικανοποιούν τη σχέση $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ή $x^2 + y^2 = 1$ που είναι η εξίσωση του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας 1. Επομένως το υποσύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ είναι το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, ενώ το $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ είναι το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.[1] Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ λέγεται *ανοικτός δίσκος* κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r, ενώ το $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$ λέγεται *κλειστός δίσκος* κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας r. Εάν w είναι ένας σταθερός μιγαδικός αριθμός τότε οι αριθμοί z που ικανοποιούν τη σχέση $|z - w| = r$, όπου r είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, είναι όλοι εκείνοι των οποίων η απόσταση από τον w ισούται με r, άρα το

$$C(w,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}$$

περιγράφει τον κύκλο κέντρου w και ακτίνας r. Έτσι τα $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| \le r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| > r\}$, και $\{z \in \mathbb{C} : |z| \ge r\}$ περιγράφουν αντίστοιχα τον ανοικτό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, τον κλειστό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, το εξωτερικό του κλειστού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r, και το εξωτερικό του ανοικτού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r.

Παράδειγμα 1.7. Να περιγραφεί το σύνολο

$$F = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}.$$

Εάν $z = x + iy \in F$, τότε $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = y$, κατά συνέπεια το F είναι η ευθεία $y = x$ του επιπέδου.

Παράδειγμα 1.8. Εάν z_0 και $z_1 \neq 0$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να περιγραφεί το σύνολο

$$L = \{z : z = z_0 + tz_1, \text{ όπου } t \in \mathbb{R}\}.$$

Έστω ότι $z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ με $-\pi < \theta \le \pi$, τότε,

$$\begin{aligned} tz_1 &= tr(\cos\theta + i\sin\theta), && \text{εάν } t \ge 0,\\ tz_1 &= -tr(-\cos\theta - i\sin\theta) = -tr(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)), && \text{εάν } t < 0, \end{aligned}$$

(γιατί;) επομένως το σύνολο $L' = \{z : z = tz_1, \text{ όπου } t \in \mathbb{R}\}$ είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία 0 και z_1 (του μιγαδικού επιπέδου). Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τα σημεία 0, tz_1 $z_0 + tz_1$ και z_0 σχηματίζουν παραλληλόγραμο στο οποίο οι πλευρές δια των σημείων $z_0, z_0 + tz_1$ και των $0, tz_1$ είναι παράλληλες. Άρα το σύνολο L είναι ευθεία που περνά από το z_0 και είναι παράλληλη στην L', ή ισοδύναμα L είναι η ευθεία που περνά από τα σημεία z_0 και $z_0 + z_1$, ή ισοδύναμα η ευθεία που περιέχει το z_0 και είναι παράλληλη στο διάνυσμα z_1.

[1] Κάθε κύκλος, με θετική ακτίνα, χωρίζει το επίπεδο σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα. Το ένα είναι φραγμένο και το άλλο μη φραγμένο. Το φραγμένο υποσύνολο το λέμε εσωτερικό του κύκλου, και το μή φραγμένο υποσύνολο το λέμε εξωτερικό του κύκλου.

Παράδειγμα 1.9. Εάν z_0 και $z_1 \neq 0$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να δειχθεί ότι το σύνολο

$$E = \left\{ z : \operatorname{Im} \frac{z - z_0}{z_1} = 0 \right\}$$

περιγράφει την ευθεία που περνά από το z_0 και είναι παράλληλη στο z_1.

Εάν $z \in E$ τότε $\operatorname{Im}[(z - z_0)/z_1] = 0$, επομένως $(z - z_0)/z_1 = \lambda$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε $z - z_0 = \lambda z_1$ ή $z = z_0 + \lambda z_1$, δηλαδή $z \in L$ (Παράδειγμα 1.8). Έτσι $E \subset L$. Επειδή ισχύει και το αντίστροφο έχουμε τελικά ότι $E = L$.

1.5 Ασκήσεις

1. Να γραφούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί στη μορφή $a + ib$:

   (α′) $(-3 + i)(1 - i2)$

   (β′) $\dfrac{1}{9 + i2}$.

   (γ′) $(\sqrt{7} + i\sqrt{3})(\sqrt{7} - i\sqrt{3})$.

   (δ′) $\dfrac{7 - i}{3 + i5}$.

2. Εάν $z \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

   (α′) $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

   (β′) $(1 + z)^n = 1 + \binom{n}{1} z + \binom{n}{2} z^2 + \cdots + \binom{n}{k} z^k + \cdots + \binom{n}{n-1} z^{n-1} + z^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις i^n, για κάθε ακέραιο αριθμό n.

4. Εάν $z \in \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

   (α′) $z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$

   (β′) $z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw)$.

5. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $1 \pm i$ ικανοποιούν την εξίσωση $z^2 - 2z + 2 = 0$.

6. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί να βρεθούν οι τιμές τους σε κάθε μία από τις εφράσεις:

   (α′) $5x + i6 = -8 + i2y$.

   (β′) $i(2x - 4y) = 4x + 2 + i3y$.

   (γ′) $(3x + i)^2 = 8 + iy$.

   (δ′) $x + iy = (x - iy)^2$.

7. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$. **Υπόδειξη**: Θέτουμε $z = x + iy$ στην εξίσωση και αφού κάνουμε πράξεις κοιτάζουμε ξεχωριστά το πραγματικό και φανταστικό μέρος.

8. Εάν $z \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι: (i) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ και (ii) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

9. Εάν z, w, v και u είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδειχθούν οι ισότητες:

(α΄) $\dfrac{1}{zw} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{w}$.

(β΄) $\dfrac{z+w}{v} = \dfrac{z}{v} + \dfrac{w}{v}$, $v \neq 0$.

(γ΄) $\dfrac{zw}{vu} = \dfrac{z}{v}\dfrac{w}{u}$, $v \neq 0$ και $u \neq 0$.

(δ΄) $\dfrac{zw}{zv} = \dfrac{w}{v}$, $z \neq 0$ και $v \neq 0$.

10. Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών:

(α΄) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$. (β΄) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$. (γ΄) $\left(\dfrac{2+i3}{3-i4}\right)^3$. (δ΄) $(1+i)^3$.

11. Να βρεθούν τα x και y, όταν $x + iy = |x + iy|$.

12. Εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί να δειχθεί ότι: (i) $|z| = |-z|$ και (ii) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

13. Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής να δειχθεί ότι εάν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \tag{1.37}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

14. Να δειχθεί ότι εάν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

15. Να δειχθεί ότι εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(α΄) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

(β΄) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

(γ΄) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *Νόμος του παραλληλογράμου.*

16. Αποδείξτε τις ιδιότητες του ορίσματος:

(α΄) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

(β΄) $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

17. Δείξτε ότι εάν $\mathrm{Re}\, z_1 > 0$ και $\mathrm{Re}\, z_2 > 0$, τότε
$$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2.$$
Δώστε αντιπαράδειγμα όπου $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$.

18. Η συνάρτηση $\tan\theta$ είναι ένα προς ένα στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, κατά συνέπεια η αντίστροφη συνάρτηση arctan ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με τη σχέση $\arctan t = \theta$ αν και μόνον αν $\tan\theta = t$ και $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Εάν $z = x + iy$ δείξτε ότι

(α΄) $\mathrm{Arg}\, z = \arctan \dfrac{y}{x}$, εάν $x > 0$.

(β΄) $\mathrm{Arg}\, z = \arctan \dfrac{y}{x} + \pi$, εάν $x < 0$ και $y \geq 0$.

(γ΄) $\mathrm{Arg}\, z = \arctan \dfrac{y}{x} - \pi$, εάν $x < 0$ και $y < 0$.

(δ΄) $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y > 0$.

(ε΄) $\operatorname{Arg} z = -\dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y < 0$.

19. Να βρεθούν οι ρίζες:

(α΄) $(2i)^{1/2}$ (β΄) $(1)^{1/3}$ (γ΄) $(-i)^{1/2}$ (δ΄) $(-1)^{1/3}$.

20. Αφού αποδειχθεί το δυωνυμικό θεώρημα

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \text{με } a \text{ και } b \text{ στο } \mathbb{C}$$

(βλ. Άσκηση 2) κάνοντας χρήση αυτού και του τύπου του de Moivre να αποδειχθεί ότι

(α΄) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$, (β΄) $\sin 3\theta = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$.

21. Αφού αποδειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 1$ ισχύει

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z},$$

για κάθε $n \geq 2$, με χρήση της ταυτότητας να αποδειχθούν οι

(α΄) $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2\sin(\theta/2)}$ $(0 < \theta < 2\pi)$.

(β΄) $1 + \omega_n + \omega_n^2 + \cdots + \omega_n^{n-1} = 0$, όπου $\omega_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

22. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις σχέσεις:

(α΄) $z + \bar{z} = 1$, (β΄) $z - \bar{z} = i$, (γ΄) $z + \bar{z} = |z|^2$, (δ΄) $\bar{z} = |z|$.

23. Να περιγραφούν γεωμετρικά οι σχέσεις:

(α΄) $1 < \operatorname{Re} z < 2$, (γ΄) $|\operatorname{Im} z| \geq 1$, (ε΄) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$,

(β΄) $1 < |z| < 2$, (δ΄) $|z| = \operatorname{Im} z + 1$, (ϛ΄) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1$.

24. Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}(az + b)$.

25. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που είναι τέτοιοι ώστε

(α΄) $|z-i| = |z+i|$, (β΄) $|z-i| < |z-1|$, (γ΄) $|z-4| \geq |z|$.

26. Πότε η εξίσωση $az + b\bar{z} + c = 0$ παριστάνει ευθεία;

27. Η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία που λέγονται εστίες είναι σταθερό.

   (α΄) Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 και άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες ίσο με $2c$, όπου $c > 0$.

   (β΄) Εάν $z_1 = -a$ και $z_2 = a$, όπου a είναι θετικός αριθμός, να δειχθεί ότι η εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες x και y γράφεται

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

28. Εάν $z_0 \neq z_1$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right] = 0.$$

29. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z - z_0}{z_1}\right] > 0.$$