NP-πλήρη προβλήματα #1

Μεγάλη Κλίκα

Υποθέστε ένα γράφημα $G = (V, E)$ με n κόμβους. Μια μεγάλη κλίκα είναι ένα πλήρες υπογράφημα του G με τουλάχιστον $n/2$ κόμβους. Πιο τυπικά, έστω η γλώσσα

$$\text{MK} = \{\langle G \rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει κλίκα μεγέθους τουλάχιστον } n/2\}.$$

Θεώρημα 1. *Η γλώσσα* MK *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι MK $\in$ NP. Έστω ένα στιγμιότυπο $\langle G \rangle$ και ένα σύνολο κόμβων S το οποίο πρέπει να εξετάσουμε αν αποτελεί κλίκα μεγέθους τουλάχιστον $n/2$. Πρώτα ελέγχουμε αν το S περιέχει τουλάχιστον $n/2$ κόμβους και έπειτα ελέγχουμε αν υπάρχουν όλες οι ακμές μεταξύ των κόμβων του S. Οι έλεγχοι αυτοί μπορούν να γίνουν σε πολυωνυμικό χρόνο και άρα, MK $\in$ NP.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα

$$\text{Κλικα} = \{\langle G, k \rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει κλίκα μεγέθους } k\},$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι NP-πλήρης. Με αρχή ένα γράφημα G και έναν ακέραιο k κατασκευάζουμε ένα γράφημα G' ως εξής:

- Αν $k = n/2$, τότε $G = G'$.
- Αν $k > n/2$, τότε το G' προκύπτει από το G προσθέτοντας $x = 2k - n$ νέους απομονωμένους κόμβους. Έτσι, το G' έχει $n' = 2k$ κόμβους και περιέχει κλίκα μεγέθους $k = n'/2$ αν και μόνο αν το G περιέχει κλίκα μεγέθους k.
- Αν $k < n/2$, τότε το G' προκύπτει από το G προσθέτοντας $x = n - 2k$ νέους κόμβους κάθε ένας από τους οποίους συνδέεται με όλους τους κόμβους του G'. Έτσι, το G' έχει $n' = n + x = 2(n - k)$ κόμβους και περιέχει κλίκα μεγέθους $k + x = n - k = n'/2$ αν και μόνο αν το G περιέχει κλίκα μεγέθους k.

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι $\langle G \rangle \in$ Κλικα αν και μόνο αν $\langle G \rangle \in$ MK. □

Μερικά σχόλια: Ας δούμε πρώτα την περίπτωση όπου $k > n/2$. Σε αυτήν την περίπτωση θέλουμε όταν το G έχει κλίκα μεγέθους k, το G' να έχει κλίκα μεγέθους $n'/2$. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν το G' περιέχει $n' = n + x$ κόμβους έτσι ώστε οι x νέοι κόμβοι να μην συμβάλουν στην κλίκα και να ισχύει ότι

$$k = \frac{n'}{2} = \frac{n + x}{2} \Rightarrow x = 2k - n.$$

Αντίστοιχα, στην περίπτωση όπου $k < n/2$ θέλουμε όταν το G έχει κλίκα μεγέθους k, το G' να έχει κλίκα μεγέθους $n'/2$. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο αν το G' περιέχει $n' = n + x$ κόμβους έτσι ώστε οι x νέοι κόμβοι να συμβάλουν στην κλίκα και να ισχύει ότι

$$k + x = \frac{n'}{2} = \frac{n + x}{2} \Rightarrow x = n - 2k.$$

Πως θα έπρεπε να σκεφτούμε ώστε να αποδείξουμε ότι η γλώσσα

$$\text{AMK} = \{\langle G\rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει κλίκα μεγέθους τουλάχιστον } n/3\}.$$

είναι NP-πλήρης? Κάνουμε αναγωγή από την Κλικα και διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με την τιμή του k. Αν $k = n/3$, τότε θέτουμε $G' = G$ και ισχύει προφανώς ότι το G έχει κλίκα μεγέθους k αν και μόνο αν το G' έχει κλίκα μεγέθους $k = n/3$. Αν $k > n/3$, τότε το G' προκύπτει από το G προσθέτοντας x κόμβους οι οποίοι δεν συμβάλουν στη κλίκα έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$k = \frac{n'}{3} = \frac{n+x}{3} \Rightarrow x = 3k - n.$$

Έτσι, το G έχει κλίκα μεγέθους k αν και μόνο αν το G' έχει κλίκα μεγέθους $k = n'/3$. Τέλος, αν $k < n/3$, τότε το G' προκύπτει από το G προσθέτοντας x κόμβους οι οποίοι συμβάλουν στη κλίκα (συνδέονται με όλους τους κόμβους στο G') έτσι ώστε να ισχύει ότι

$$k + x = \frac{n'}{3} = \frac{n+x}{3} \Rightarrow x = n - 3k.$$

Έτσι, το G έχει κλίκα μεγέθους k αν και μόνο αν το G' έχει κλίκα μεγέθους $k + x = n'/3$.

Μεγάλο Ανεξάρτητο Σύνολο

Υποθέστε ένα γράφημα $G = (V, E)$ με n κόμβους. Ένα μεγάλο ανεξάρτητο σύνολο είναι ένα σύνολο τουλάχιστον $n/2$ κόμβων του γραφήματος οι οποίοι δεν συνδέονται μεταξύ τους. Πιο τυπικά, έστω η γλώσσα

$$\text{ΜΑΣ} = \{\langle G\rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους } n/2\}.$$

Θεώρημα 2. *Η γλώσσα* ΜΑΣ *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ΜΑΣ $\in$ NP. Έστω ένα στιγμιότυπο $\langle G\rangle$ και ένα σύνολο κόμβων S για το οποίο πρέπει να εξετάσουμε αν περιέχει $n/2$ κόμβους που ανά δύο δεν συνδέονται μεταξύ τους. Προφανώς ο έλεγχος αυτός μπορεί να πραγματοποιηθεί σε πολωνυμικό χρόνο εξετάζοντας με ωμή βία όλα τα ζευγάρια κόμβων του S. Άρα, ΜΑΣ $\in$ NP.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα

$$\text{ΑΣ} = \{\langle G, k\rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους } k\},$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι NP-πλήρης. Με αρχή ένα γράφημα G και έναν ακέραιο k κατασκευάζουμε ένα γράφημα G' ως εξής:

- Αν $k = n/2$, τότε $G = G'$.
- Αν $k > n/2$, τότε το G' προκύπτει από το G προσθέτοντας $x = 2k - n$ νέους κόμβους κάθε ένας από τους οποίους συνδέεται με όλους τους κόμβους του G'. Έτσι, το G' έχει $n' = 2k$ κόμβους και περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $k = n'/2$ αν και μόνο αν το G περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k.
- Αν $k < n/2$, τότε το G' προκύπτει από το G προσθέτοντας $x = n - 2k$ νέους απομονωμένους κόμβους. Έτσι, το G' έχει $n' = n + x = 2(n - k)$ κόμβους και περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους $k + x = n - k = n'/2$ αν και μόνο αν το G περιέχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k.

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι $\langle G\rangle \in$ ΑΣ αν και μόνο αν $\langle G\rangle \in$ ΜΑΣ. $\square$

Μακρύτερη Διαδρομή

Υποθέστε ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ και δύο κόμβους s και t. Υπάρχει μονοπάτι από τον s στον t με μήκος τουλάχιστον k, για κάποιον ακέραιο k, το οποίο να περνά από κάθε κόμβο το πολύ μία φορά?

Μπορούμε να περιγράψουμε το πρόβλημα και σαν γλώσσα ως εξής:

$$\text{ΜΔ} = \{\langle G, s, t, k\rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει } s - t \text{ μονοπάτι μήκους τουλάχιστον } k \\ \text{το οποίο περνά από κάθε κόμβο το πολύ μία φορά}\}.$$

Θεώρημα 3. *Η γλώσσα* ΜΔ *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι ΜΔ $\in$ NP. Έστω ένα στιγμιότυπο $\langle G, s, t, k\rangle$ και ένα σύνολο κόμβων S το οποίο πρέπει να εξετάσουμε αν αποτελεί $s - t$ μονοπάτι επί του G το οποίο περνά από κάθε κόμβο το πολύ μία φορά και έχει μήκος τουλάχιστον k. Το S πρέπει να έχει αρχή τον κόμβο s, τέλος τον κόμβο t, μέγεθος τουλάχιστον $k + 1$ (έτσι ώστε οι ακμές του μονοπατιού να είναι τουλάχιστον k σε πλήθος) και να μην περιέχει δύο φορές τον ίδιο κόμβο. Όλα αυτά μπορούν να επαληθευτούν σε πολυωνυμικό χρόνο και, επομένως, ΜΔ $\in$ NP.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα

$$\text{ΧΔ} = \{\langle G, s, t\rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει } s - t \text{ μονοπάτι Hamilton από τον } s \text{ στον } t\},$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι NP-πλήρης. Θα αποδείξουμε ότι

$$\langle G, s, t, n-1\rangle \in \text{ΜΔ} \text{ αν και μόνο αν } \langle G, s, t\rangle \in \text{ΧΔ}.$$

[$\Rightarrow$] Έστω ότι $\langle G, s, t\rangle \in$ ΧΔ και S ένα $s-t$ μονοπάτι Hamilton στο G. Το S ξεκινά από τον s, περνά από κάθε κόμβο του γραφήματος ακριβώς μία φορά και καταλήγει στον t. Δηλαδή, έχει μήκος $n - 1$. Επομένως, $\langle G, s, t, n-1\rangle \in$ ΜΔ.

[$\Leftarrow$] Έστω ότι $\langle G, s, t, n-1\rangle \in$ ΜΔ και S ένα $s-t$ μονοπάτι στο G το οποίο περνά το πολύ μία φορά από κάθε κόμβο και έχει μήκος τουλάχιστον $n - 1$. Το S είναι μονοπάτι Hamilton καθώς πρέπει να περιέχει όλους τους κόμβους του γραφήματος για να έχει μήκος τουλάχιστον $n - 1$. Επομένως, $\langle G, s, t\rangle \in$ ΧΔ. □

TSP

Υποθέστε ένα πλήρες γράφημα $G = (V, E)$ και μια συνάρτηση βάρους $w : E \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζει ένα βάρος για κάθε ακμή του G. Υπάρχει κύκλος που να περνά από όλους τους κόμβους του G και να έχει συνολικό βάρος το πολύ k, για κάποιον ακέραιο k? Για ευκολία, έναν κύκλο που περνά από όλους τους κόμβους του G θα τον καλούμε *ταξίδι* (tour).

Μπορούμε να περιγράψουμε το πρόβλημα και σαν γλώσσα ως εξής:

$$\text{TSP} = \{\langle G, w, k\rangle : \text{Το } G \text{ έχει ταξίδι με ολικό βάρος το πολύ } k\}.$$

Θεώρημα 4. *Η γλώσσα* TSP *είναι NP-πλήρης.*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι TSP $\in$ NP. Έστω ένα στιγμιότυπο $\langle G, w, k\rangle$ και ένα σύνολο κόμβων S το οποίο πρέπει να ελέγξουμε αν αποτελεί ταξίδι επί του G και έχει ολικό βάρος το πολύ k. Προφανώς αυτό μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο ελέγχοντας όλες τις ακμές που ορίζουν οι κόμβοι του S. Άρα, TSP $\in$ NP.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα κάνουμε αναγωγή από τη γλώσσα

$$\text{ΧΚ} = \{\langle G\rangle : \text{Το } G \text{ περιέχει κύκλο Hamilton}\},$$

η οποία γνωρίζουμε ότι είναι NP-πλήρης. Με δεδομένο ένα γράφημα $G = (V, E)$, κατασκευάζουμε το πλήρες γράφημα $G' = (V, E')$, και ορίζουμε το βάρος κάθε ακμής $e \in E'$ ως

$$w(e) = \begin{cases} 1, & \text{αν } e \in E \\ 2n, & \text{αν } e \notin E \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε ότι $\langle G\rangle \in$ ΧΚ αν και μόνο αν $\langle G', w, n\rangle \in$ TSP.

[$\Rightarrow$] Έστω ότι $\langle G\rangle \in$ ΧΚ και C ο κύκλος Hamilton που περιέχει το G. Κάθε ακμή e που ανήκει στον C έχει βάρος $w(e) = 1$ στο G'. Αυτό σημαίνει ότι ο C αποτελεί ταξίδι με ολικό βάρος n στο G'. Επομένως, $\langle G', w, n\rangle \in$ TSP.

[$\Leftarrow$] Έστω ότι $\langle G, w, n\rangle \in$ TSP και C το ταξίδι με ολικό βάρος το πολύ n που περιέχει το G'. Εφόσον κάθε ακμή $e \notin E$ έχει βάρος μεγαλύτερο του n, το C πρέπει να αποτελείται μόνο από ακμές που υπάρχουν στο G. Ακόμη, αφού το ολικό βάρος είναι το πολύ n, το πλήθος των ακμών πρέπει να είναι το πολύ n, το οποίο σημαίνει ότι το C περνά από κάθε κόμβο του γραφήματος ακριβώς μία φορά (εκτός από τον τελευταίο κόμβο ο οποίος συμπίπτει με τον πρώτο) και αποτελεί κύκλο Hamilton στο G. Επομένως, $\langle G\rangle \in$ ΧΚ. $\square$