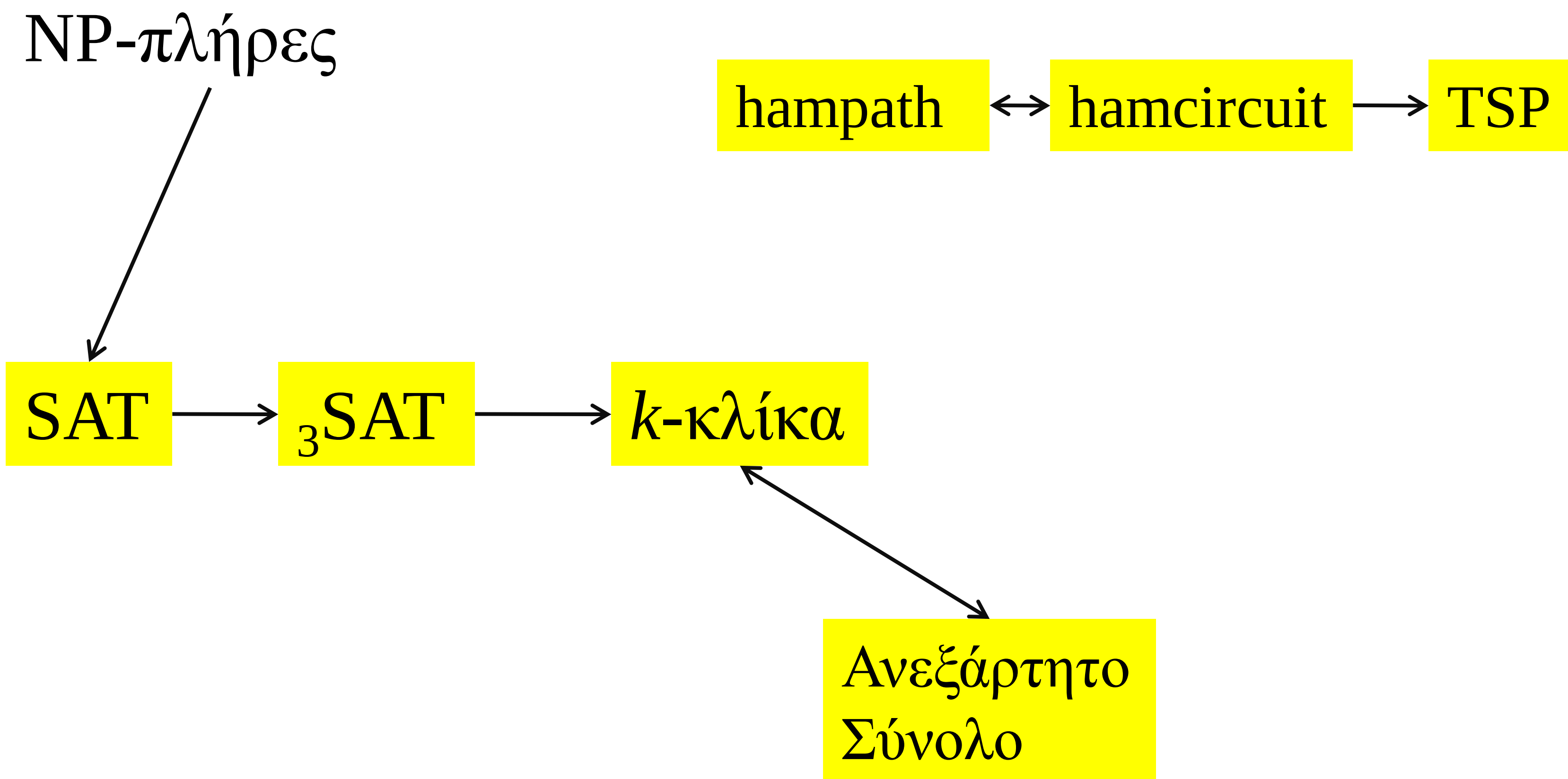
Υπολογιστική Πολυπλοκότητα

Αποδείξεις NP-Πληρότητας

Άρα: Περισσότερες Αναγωγές ☺

Μέχρι Τώρα…


NP-πλήρες
hampath
hamcircuit
TSP
SAT
$_3$SAT
k-κλίκα
Ανεξάρτητο Σύνολο

${}_2$SAT $\in$?

$${}_2\text{SAT} = \{\langle\varphi\rangle \,|\text{ο } \varphi \text{ ικανοποιήσιμος } {}_2\text{CNF τύπος}\}$$

$$(x \vee y) \wedge (\bar{x} \vee z) \wedge (\bar{z} \vee \overline{w}) \wedge (w \vee x)$$

- Είναι το ${}_2$SAT *NP*-πλήρες; Είναι στο *P*;
- Ή μήπως δεν ξέρουμε;;
- Τελικά, το ${}_2$SAT ανήκει στο *P*.

${}_2$SAT $\in$ P

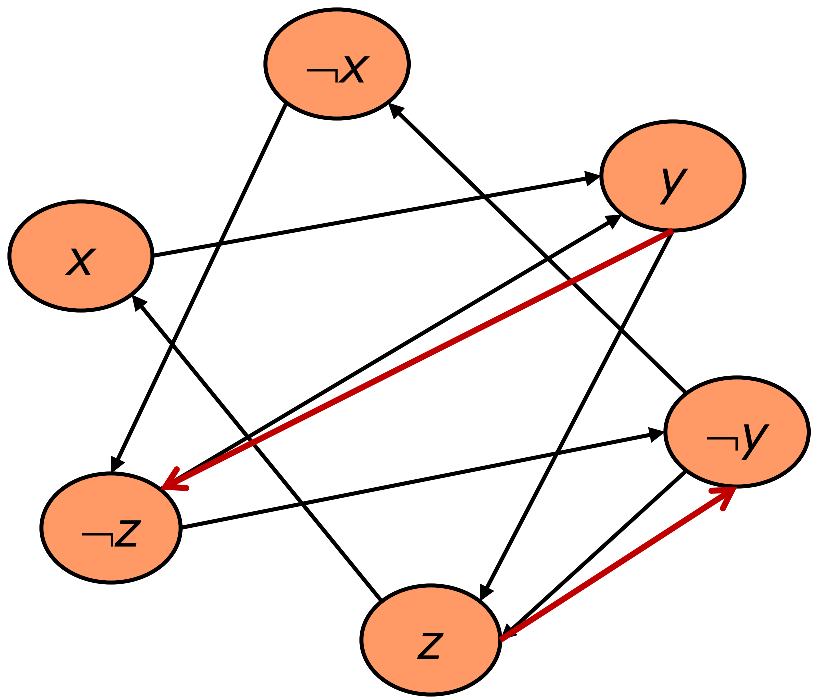
- Κατασκευάζουμε γράφημα G_φ από το στιγμιότυπο φ του ${}_2$SAT:
  - Οι κορυφές είναι οι μεταβλητές του φ
  - Υπάρχει ακμή από a σε b αν και μόνο αν η φράση $(\neg a \vee b)$ ανήκει στο φ. $(a \Rightarrow b)$
  - Αν η (a,b) είναι ακμή τότε και η $(\neg b,\neg a)$ είναι ακμή.

Πρόταση: *η φ είναι μη αληθεύσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μεταβλητή x έτσι ώστε να υπάρχει μονοπάτι από το x στο $\neg x$ και από το $\neg x$ στο x στο G_φ.*

Παράδειγμα

$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (z \vee y)$

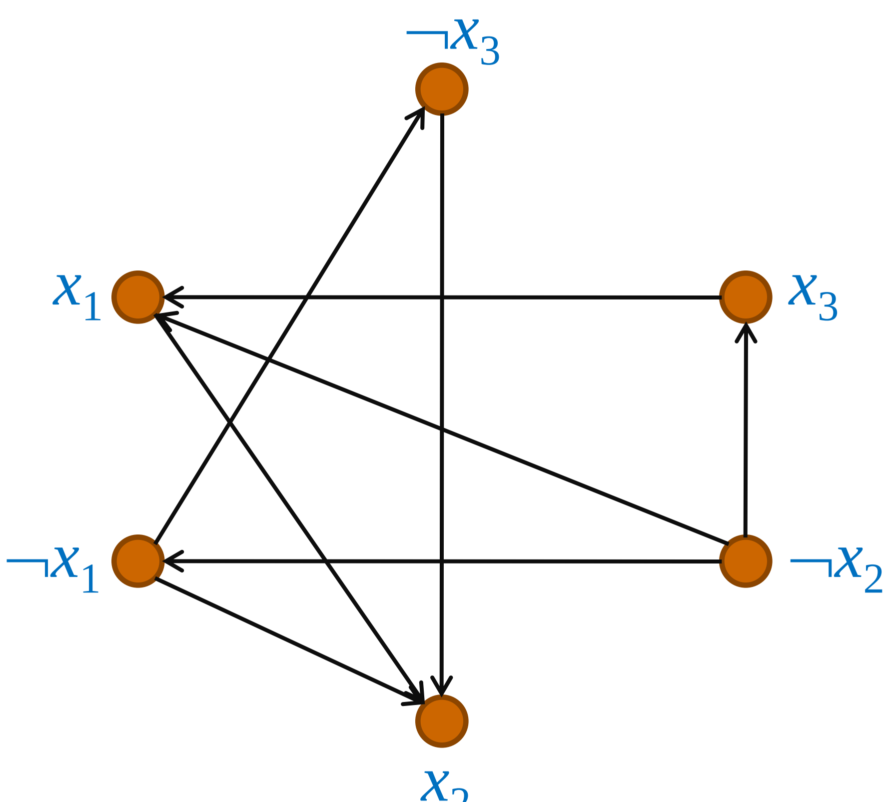
$\wedge (\neg z \vee \neg y)$



Άλλο Παράδειγμα

$$(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \neg x_3)(\neg x_1 \vee x_2)(x_2 \vee x_3) \Leftrightarrow$$

$$(\neg x_1 \Rightarrow x_2)(\neg x_2 \Rightarrow x_1)(\neg x_1 \Rightarrow \neg x_3)(x_3 \Rightarrow x_1)(x_1 \Rightarrow x_2)(\neg x_2 \Rightarrow \neg x_1)(\neg x_2 \Rightarrow x_3)(\neg x_3 \Rightarrow x_2)$$



Παρατήρηση

Ισχυρισμός: Αν το γράφημα περιέχει μονοπάτι από το α στο β, τότε περιέχει και μονοπάτι από το $\neg\beta$ στο $\neg\alpha$.

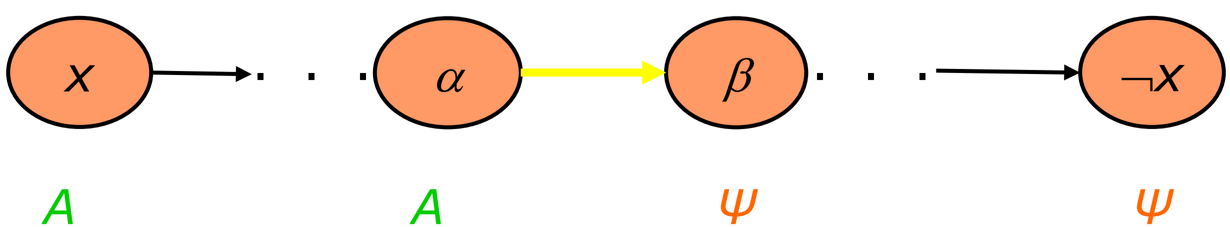
Απόδειξη: Αν υπάρχει ακμή (α,β), τότε υπάρχει και η ακμή $(\neg\beta,\neg\alpha)$.

<u>Πρόταση:</u> η φ είναι μη αληθεύσιμη αν και μόνο αν υπάρχει μεταβλητή x έτσι ώστε να υπάρχει μονοπάτι από το x στο $\neg x$ και από το $\neg x$ στο x στο G_φ (ισχυρά συνδεδεμένο γράφημα).

Ορθότητα

- Έστω ότι υπάρχουν μονοπάτια $x\ldots\neg x$ and $\neg x\ldots x$ για κάποια μεταβλητή x, αλλά υπάρχει και μία αληθοποιός τιμοδοσία ρ.
- Αν $\rho(x)=A$ (παρόμοια για $\rho(x)=\Psi$):

$(\neg\alpha\vee\beta)$ είναι ψευδές!

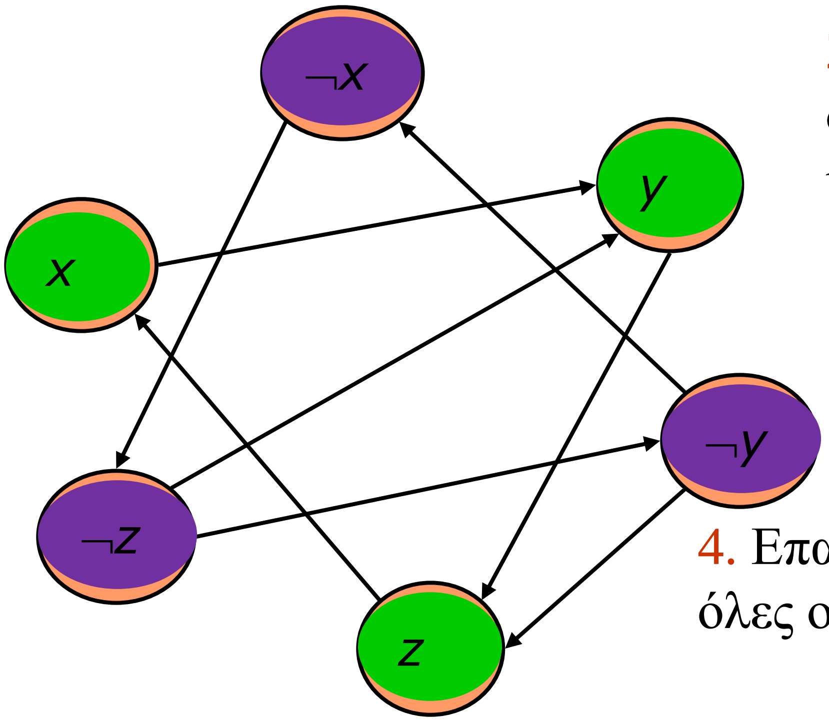


$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg z) \wedge (z \vee y)$

Ορθότητα (2)

- Έστω ότι δεν υπάρχουν τέτοια μονοπάτια.
- Κατασκευάζουμε μία τιμοδοσία ως εξής:

1. Επέλεξε μία μεταβλητή α χωρίς τιμή και χωρίς μονοπάτι από α σε $\neg\alpha$, και δώσε τιμή *A*



2. Δώσε τιμή *A* σε όλες τις γειτονικές κορυφές

3. Δώσε τιμή *Ψ* σε όλα τα συμπληρώματά τους

4. Επανέλαβε διαδικασία μέχρι όλες οι κορυφές να έχουν τιμή

Ορθότητα (2)

Ισχυρισμός: Ο αλγόριθμος είναι σωστός

Απόδειξη:

Έστω ότι x είναι *Α.* Αν υπήρχε μονοπάτι από το x σε y και $\neg y$, τότε:

⇒ Υπάρχει μονοπάτι από το x στο $\neg y$ και από το $\neg y$ στο $\neg x$. Άρα $x \rightarrow \neg x$.

Έστω ότι x είναι *Ψ.* Αν υπήρχε μονοπάτι από το $\neg x$ σε y και $\neg y$, τότε:

⇒ Υπάρχει μονοπάτι από το $\neg x$ στο y και από το y στο x. Άρα $\neg x \rightarrow x$.

Άτοπο.

${}_2$SAT $\in$ P

Έχουμε περιγράψει τον εξής αποδοτικό αλγόριθμο για το ${}_2$SAT:

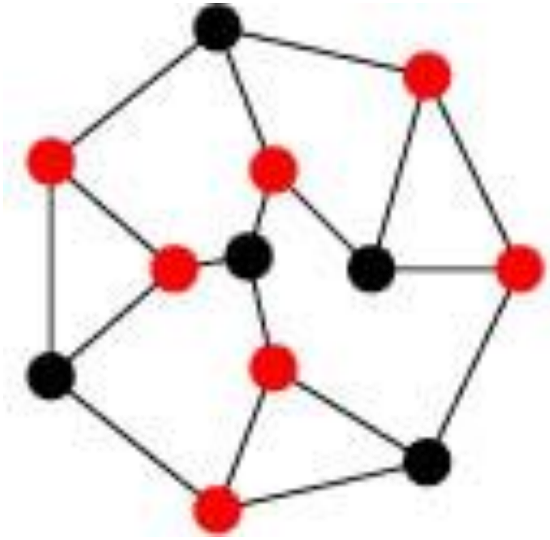
- Για κάθε μεταβλητή x δες αν υπάρχει μονοπάτι από x σε $\neg x$ και αντίστροφα.
- Απορρίπτουμε αν υπάρχει.
- Αποδεχόμαστε διαφορετικά

$\Rightarrow$ ${}_2$SAT$\in$P

Κομβικό Κάλυμμα

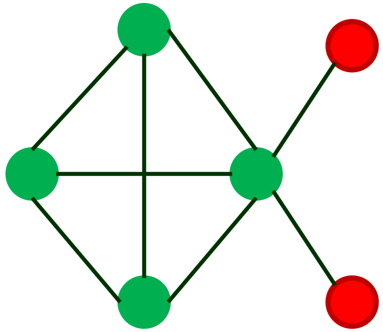
ΚΚ = $\{\langle G,k \rangle$ | το G είναι έναν ακατεύθυντο γράφημα και περιέχει κομβικό κάλυμμα k κόμβων$\}$

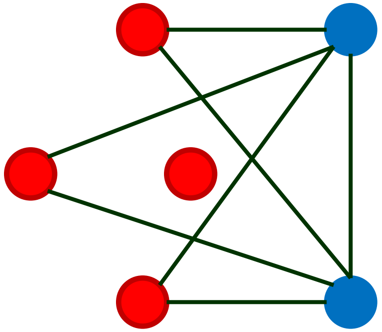
Σύνολο k κόμβων έτσι ώστε κάθε ακμή να καταλήγει σε έναν από αυτούς τους κόμβους.



Κλίκα $\leq_P$ Κομβικό Κάλυμμα

- Πρώτα αποδείξτε ότι το Κομβικό Κάλυμμα ανήκει στο **NP**
- Έπειτα, ανάγουμε την k-κλίκα στο κομβικό κάλυμμα
  - Υπολόγισε το συμπλήρωμα G_C του γραφήματος G σε πολυωνυμικό χρόνο
  - Το G έχει κλίκα μεγέθους k αν και μόνο αν το G_C έχει κομβικό κάλυμμα μεγέθους $|V| - k$





Κλίκα $\leq_P$ Κομβικό Κάλυμμα

- Αν ο G έχει κλίκα μεγέθους k, το G_C έχει κομβικό κάλυμμα μεγέθους $|V| - k$
  - Έστω V' η k-κλίκα
  - Τότε το $V - V'$ είναι ένα κομβικό κάλυμμα στο G_C
    - Έστω (u,v) μία οποιαδήποτε ακμή στο G_C
    - Τότε οι u και v δεν μπορεί να ανήκουν ταυτόχρονα στο V' (Γιατί;)
    - Άρα τουλάχιστον ένα από τα u ή v είναι στο V-V', και επομένως η ακμή (u, v) καλύπτεται από το V-V'
    - Αφού αυτό είναι αληθές για κάθε ακμή στο G_C, το V-V' είναι ένα κομβικό κάλυμμα

Κλίκα $\leq_P$ Κομβικό Κάλυμμα

- Αν το G_C έχει κομβικό κάλυμμα $V' \subseteq V$, με $|V'|=|V| - k$, τότε το G έχει κλίκα μεγέθους k
  - Για κάθε $u,v \in V$, αν $(u,v) \in G_C$ τότε $u \in V'$ ή $v \in V'$ ή και τα δύο (Γιατί;)
  - Αντιθετοαντίστροφο: αν $u \notin V'$ και $v \notin V'$, τότε $(u,v) \in E$
  - Με άλλα λόγια, όλες οι κορυφές στο $V\text{-}V'$ είναι συνδεδεμένες με μία ακμή και άρα το $V\text{-}V'$ είναι κλίκα
  - Αφού $|V| - |V'| = k$, το μέγεθος της κλίκας είναι k

Κάλυμμα Συνόλου

Κάλυμμα Συνόλου: Δοθέντος ενός συνόλου στοιχείων U, μίας συλλογής $S_1, S_2, \ldots, S_m$ υποσυνόλων του U, και έναν ακέραιο k, υπάρχει συλλογή από $\leq k$ από αυτά τα σύνολα των οποίων η ένωση να δίνει U;

- Εφαρμογή:
  - m κομμάτια λογισμικού
  - Σύνολο U από n δυνατότητες που θα θέλαμε να έχει το σύστημά μας.
  - Το i-οστό κομμάτι κώδικα παρέχει ένα υποσύνολο $S_i \subseteq U$ δυνατοτήτων.
  - Στόχος: να επιτύχουμε τις n δυνατότητες με το μικρότερο πλήθος κομματιών λογισμικού.

- π.χ:

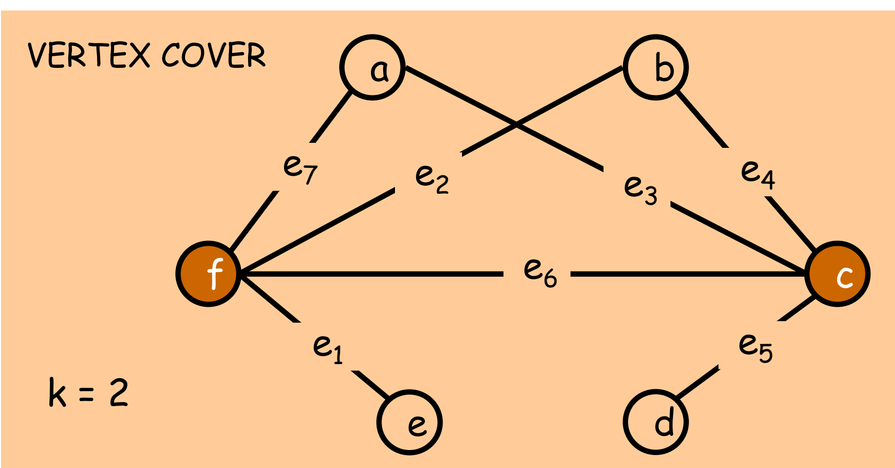
$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$

$k = 2$

$S_1 = \{3, 7\}$	$S_4 = \{2, 4\}$
$S_2 = \{3, 4, 5, 6\}$	$S_5 = \{5\}$
$S_3 = \{1\}$	$S_6 = \{1, 2, 6, 7\}$

Κομβικό Κάλυμμα $\leq_P$ Κάλυμμα Συνόλου

- Απόδειξη: Δοθέντος ενός στιγμιοτύπου κομβικού καλύμματος, $\langle G=(V,E), k\rangle$, κατασκευάζουμε ένα κάλυμμα συνόλου ίδιου μεγέθους
- Κατασκευή:
  - Παράγουμε ένα στιγμιότυπο Καλύμματος Συνόλου:
    - $k = k,\ \ U = E,\ \ S_v = \{e \in E : e$ είναι προσκείμενη στην $v\}$
  - Κάλυμμα συνόλου μεγέθους $= k$ αν και μόνο αν κομβικό κάλυμμα $= k$.



SET COVER

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$
$k = 2$

$S_a = \{3, 7\}$ $S_b = \{2, 4\}$
$S_c = \{3, 4, 5, 6\}$ $S_d = \{5\}$
$S_e = \{1\}$ $S_f = \{1, 2, 6, 7\}$

MAX2SAT

MAX2SAT(k) – δοθέντος ενός λογικού τύπου με 2 λεξιγράμματα ανά φράση, υπάρχει τιμοδοσία έτσι ώστε τουλάχιστον k φράσεις να ικανοποιούνται;

Θεώρημα: Το *MAX2SAT* είναι NP-πλήρες

- Έστω οι παρακάτω 10 φράσεις:

$$(x)(y)(z)(w)(\neg x \vee \neg y)(\neg y \vee \neg z)(\neg z \vee \neg x)(x \vee \neg w)(y \vee \neg w)(z \vee \neg w)$$

- Αν το $(x \vee y \vee z)$ είναι ΑΛΗΘΕΣ, τότε 7 φράσεις ικανοποιούνται ενώ αν το $(x \vee y \vee z)$ είναι ΨΕΥΔΕΣ, τότε το πολύ 6 φράσεις ικανοποιούνται.

$_3$SAT $\leq_P$ MAX2SAT

- Έστω φ ο λογικός τύπος με k φράσεις και 3 λεξιγράμματα ανά φράση. Για κάθε φράση $(x \vee y \vee z)$ του φ, $R(\varphi)$ θα περιέχει 10 νέες φράσεις όπως το παράδειγμα πριν, όπου w είναι μία νέα μεταβλητή (διαφορετική για κάθε φράση)

- Η φ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν τουλάχιστον $7k$ φράσεις της $R(\varphi)$ ικανοποιούνται.

- Το MAX2SAT ανήκει στο NP

- **Παρατήρηση:** Κατασκευάσαμε ένα εξάρτημα (οι 10 νέες φράσεις) που είχαν κάποια ενδιαφέρουσα ιδιότητα και επέτρεπε την αναγωγή.

Αναγωγές από SAT

- Θα πρέπει να αναζητήσουμε δομές στην άλλη γλώσσα που να αντιστοιχούν στις μεταβλητές και φράσεις.
  - Οι δομές αυτές αποκαλούνται *εξαρτήματα*

$_3$SAT $\leq_P$ ΚΛΙΚΑ

- Κόμβος → Λεξίγραμμα
- Τριάδες → Φράσεις
- Τιμοδοσία Λεξιγράμματος → Συμμετοχή στην κλίκα
- Φράση με ΑΛΗΘΕΣ Λεξιγραμμα → Κόμβος από τριάδα που συμμετέχει στην κλίκα (για να πάρουμε το k)

Άθροισμα Υποακολουθίας

Μας δίνεται μία ακολουθία αριθμών $x_1, \ldots, x_k$, και ένας αριθμός στόχος t και μας ζητείται να βρούμε αν υπάρχει υποακολουθία που να έχει άθροισμα t.

Το πρόβλημα είναι NP-πλήρες:

- Δείξτε ότι ανήκει στο NP
- ${}_3$SAT $\leq_P$ Άθροισμα Υποακολουθίας

Εξαρτήματα

- Μεταβλητή → Ζεύγος αριθμών στην ακολουθία
- Φράση → Σε συγκεκριμένη θέση στις δεκαδικές αναπαραστάσεις των αριθμών

- Η μεταβλητή x_i → σε δύο αριθμούς y_i και z_i. Κάθε υποακολουθία θα περιλαμβάνει ή το y_i ή το z_i ανάλογα με την τιμοδοσία της x_i.
- Φράση → η θέση που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση του στόχου t, περιέχει μία τιμή που επιβάλλει ένα από τα λεξιγράμματα της φράσης να παίρνει την τιμή ΑΛΗΘΕΣ.

Παράδειγμα

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)\ (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)$$

		1	**2**	**3**	c_1	c_2	c_3
x_1	y_1	1	0	0	1	0	1
$\neg x_1$	z_1	1	0	0	0	1	0
x_2	y_2		1	0	0	1	0
$\neg x_2$	z_2		1	0	1	0	1
x_3	y_3			1	0	1	1
$\neg x_3$	z_3			1	1	0	0
	g_1				1	0	0
	h_1				1	0	0
	g_2					1	0
	h_2					1	0
	g_3						1
	h_3						1
	t	1	1	1	3	3	3

Κατασκευή Πίνακα

	1	**2**	**…**	l	c_1	c_2	**…**	c_k
y_1	1	0	0	0	1	0	0	0
z_1	1	0	0	0	0	0	0	0
y_2		1	0	0	0	0	0	0
z_2		1	0	0	1	0	0	0
…								
g_1					1	0	0	0
h_1					1	0	0	0
g_2						1	0	0
h_2						1	0	0
…								
t	1	1	…	1	3	3	…	3

Απόδειξη

Πολυωνυμικός Χρόνος Κατασκευής της Αναγωγής

$\Rightarrow$ Έστω φ αληθεύσιμη: επιλέγουμε με βάση την τιμοδοσία τις κατάλληλες γραμμές και βρίσκουμε τον αριθμό στόχο

$\Leftarrow$ Έστω ότι κάποια υποακολουθία έχει άθροισμα τον αριθμό στόχο:

- Κάθε ψηφίο είναι 0 ή 1
- Κάθε στήλη περιέχει το πολύ πέντε 1

Άρα δεν παράγεται κρατούμενο

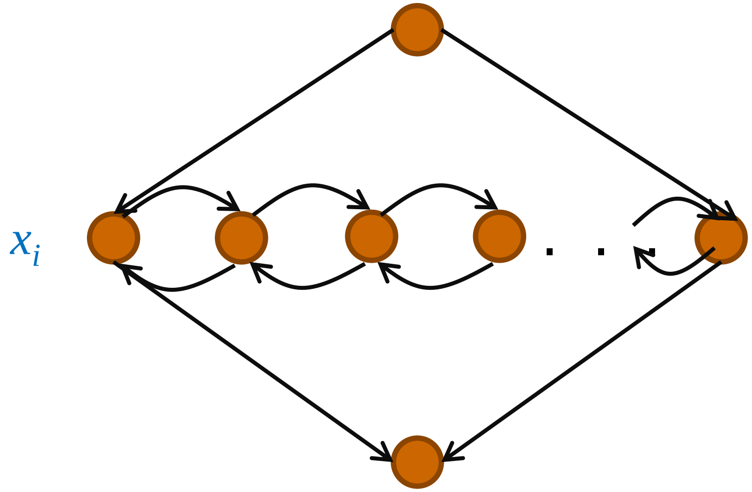
- Πρέπει να υπάρχουν ή y_i ή z_i που συμμετέχουν
- Υπάρχει τουλάχιστον ένα λεξίγραμμα που συμμετέχει σε φράση

3SAT $\leq_P$ HAMPATH

HAMPATH = $\{\langle G, s, t\rangle$ |το *κατευθυντό G* έχει Hamiltonian μονοπάτι από τον *s* στο *t*$\}$

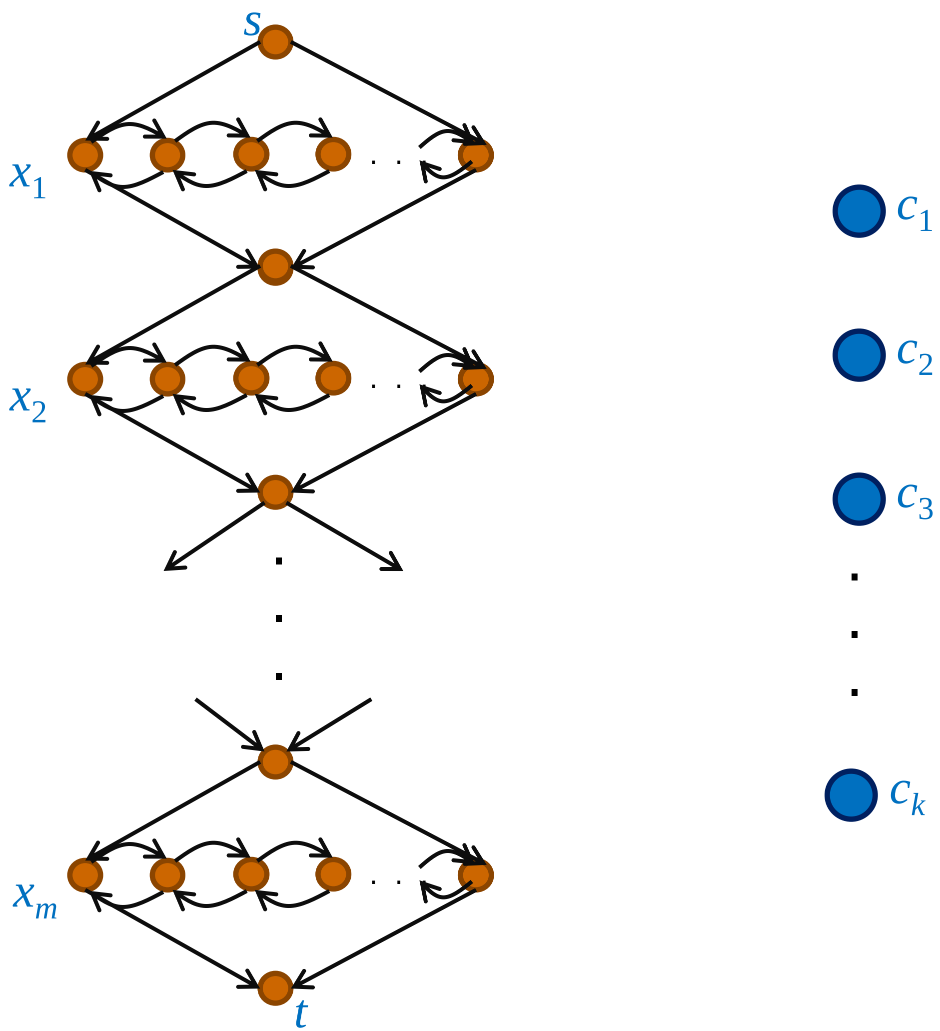
Εξαρτήματα:

- Μεταβλητή → Ρομβοειδής δομή που μπορεί να διανυθεί κατά δύο τρόπους ανάλογα με την τιμοδοσία της μεταβλητής
- Φράση → Ένας κόμβος από τον οποίο η διέλευση αντιστοιχεί στην ικανοποιησιμότητα της συγκεκριμένης φράσης

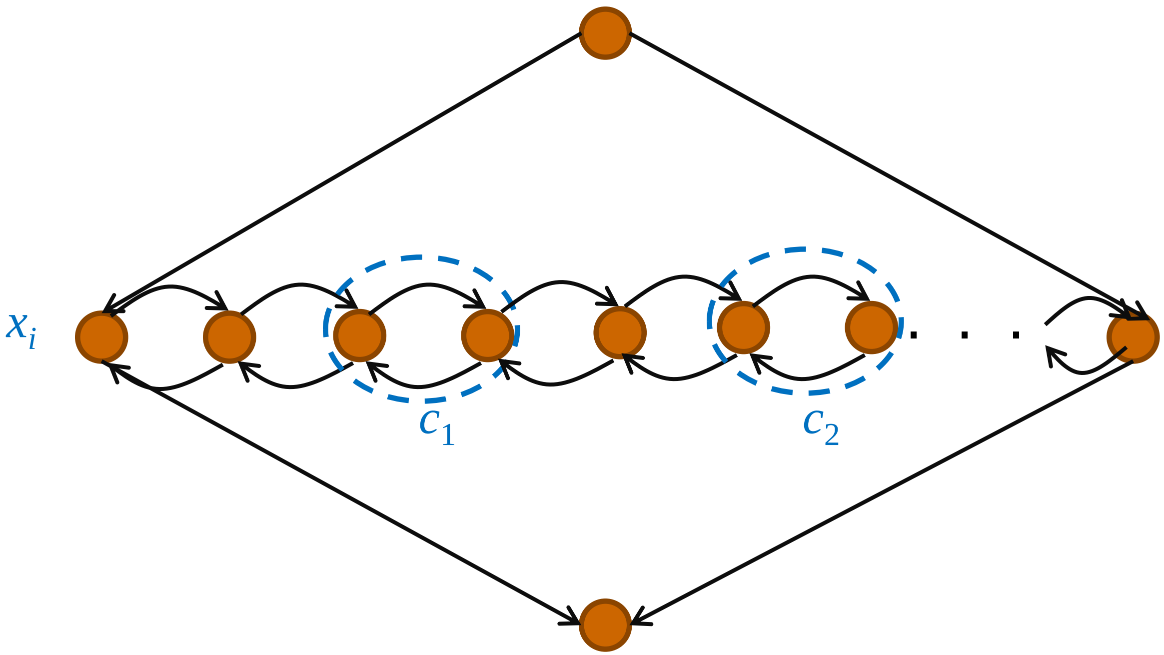


Γενική Δομή Γραφήματος

(Λείπουν κάποιες ακμές)

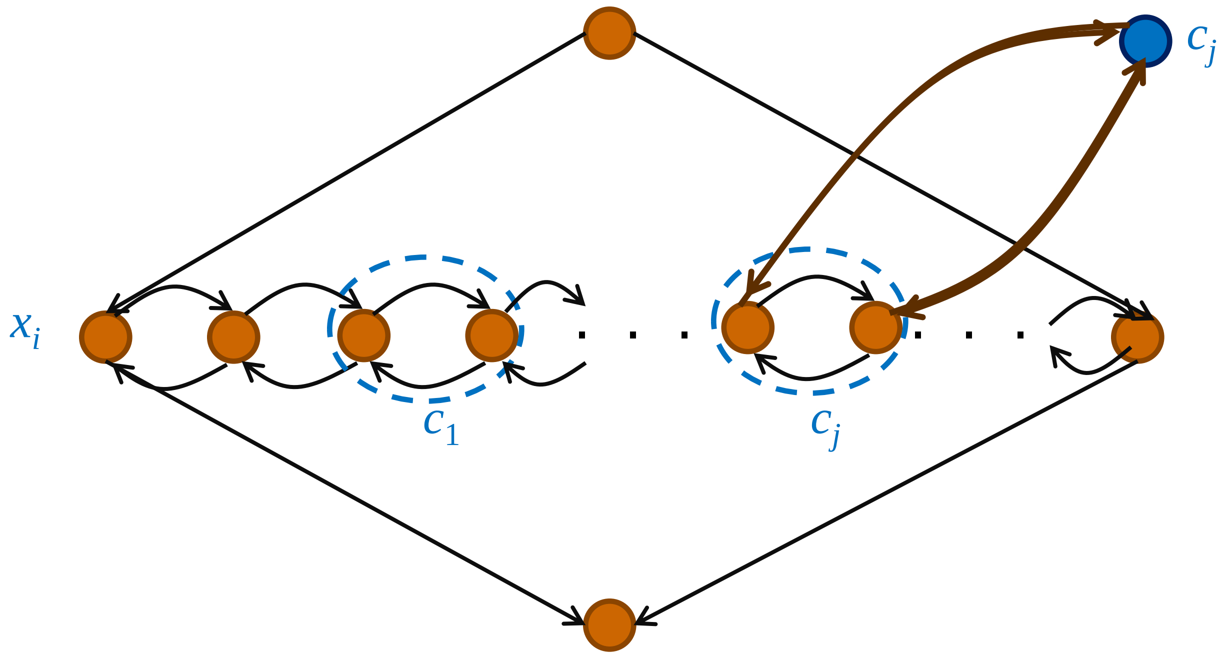


Το Λεξίγραμμα



Συνολικά έχουμε 3*k*+1 κόμβους μεταξύ των δύο ακραίων κόμβων.

Το Λεξίγραμμα



Τρεις περιπτώσεις:

- Το x_i δεν ανήκει στην φράση c_j
- Το x_i ανήκει στην φράση c_j
- Το $\neg x_i$ ανήκει στην φράση c_j

Η κατασκευή του γραφήματος G ολοκληρώθηκε.

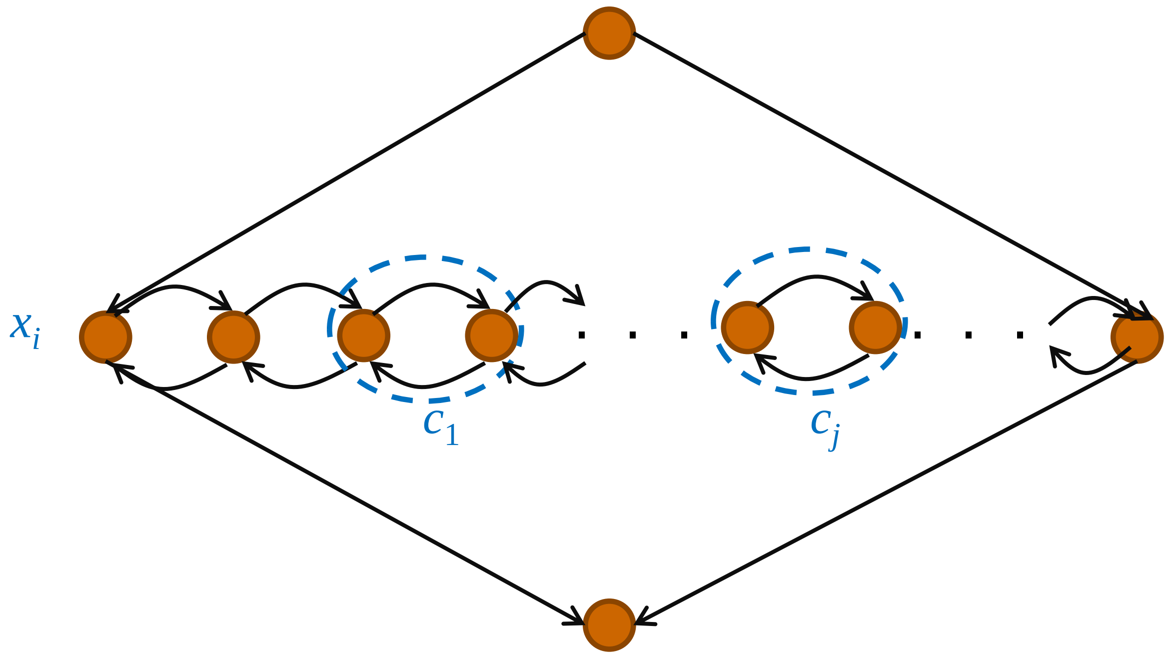
Αναγωγή

<u>**Λήμμα:**</u> Η φ είναι ικανοποιήσιμη αν και μόνο αν ο G έχει Hamiltonian μονοπάτι από το s στο t.

$\Rightarrow$ Στρατηγική:

- Στην αρχή δεν θα πάρουμε καθόλου υπόψη τους κόμβους φράσεις
- Θα διαπεράσουμε τα ρομβοειδή υπογραφήματα

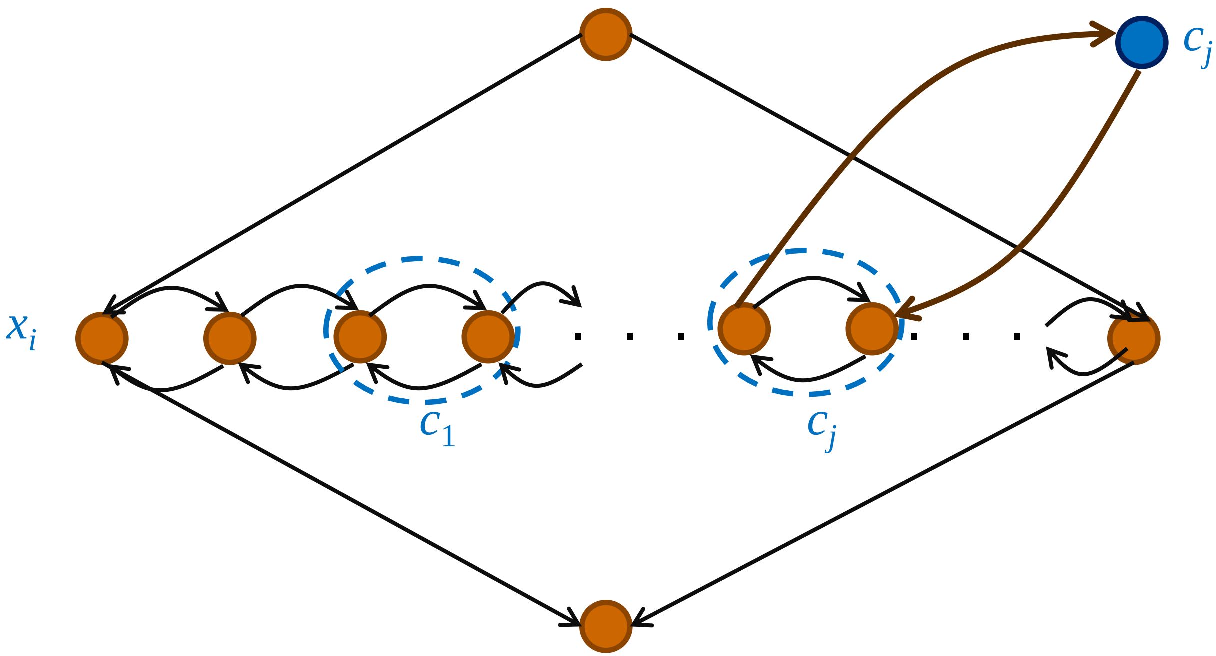
Διαπέραση Ρόμβων



Δύο περιπτώσεις:

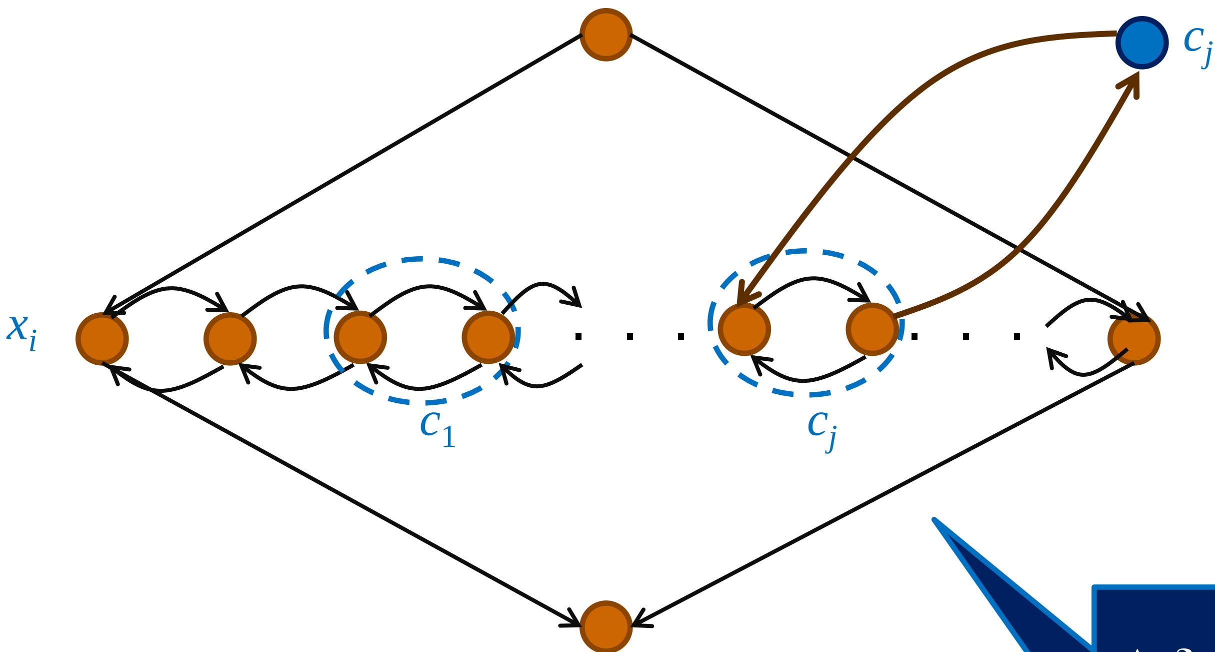
- x_i είναι ΑΛΗΘΕΣ
- x_i είναι ΨΕΥΔΕΣ

Οι Κόμβοι Φράσεων



Το x_i είναι ΑΛΗΘΕΣ και ανήκει στο c_j

Οι Κόμβοι Φράσεων (2)



Δεδομένου ότι για κάθε κόμβο φράσης περνάμε από μία μεταβλητή μόνο, η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Το $\neg x_i$ είναι ΑΛΗΘΕΣ και ανήκει στο c_j

Αναγωγή - $\Leftarrow$

Ένα *κανονικό* Hamiltonian μονοπάτι διαπερνά τις ρομβοειδής δομές με δύο τρόπους:

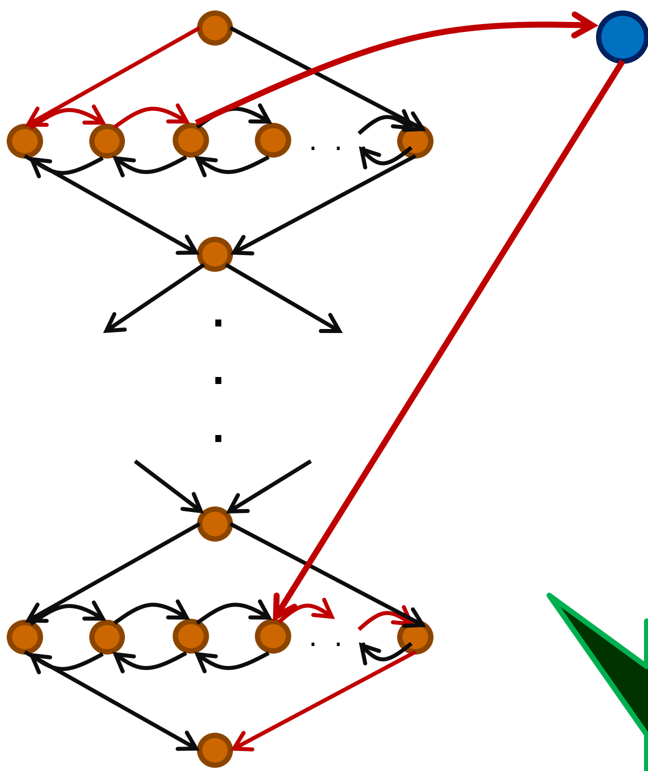
- Αν το x_i διαπερνά από αριστερά προς δεξιά, τότε δίνουμε τιμή ΑΛΗΘΕΣ
- Αν το x_i διαπερνά από δεξιά προς αριστερά, τότε δίνουμε τιμή ΨΕΥΔΕΣ

Επίσης:

- Κάθε κόμβος φράση εμφανίζεται μόνο μία φορά
- Η πηγή της παράκαμψης προς κόμβο-φράση καθορίζει ποιο λεξίγραμμα είναι ΑΛΗΘΕΣ

Κανονικά Hamiltonian Μονοπάτια

Λήμμα: Όλα τα Hamiltonian μονοπάτια είναι *κανονικά*.



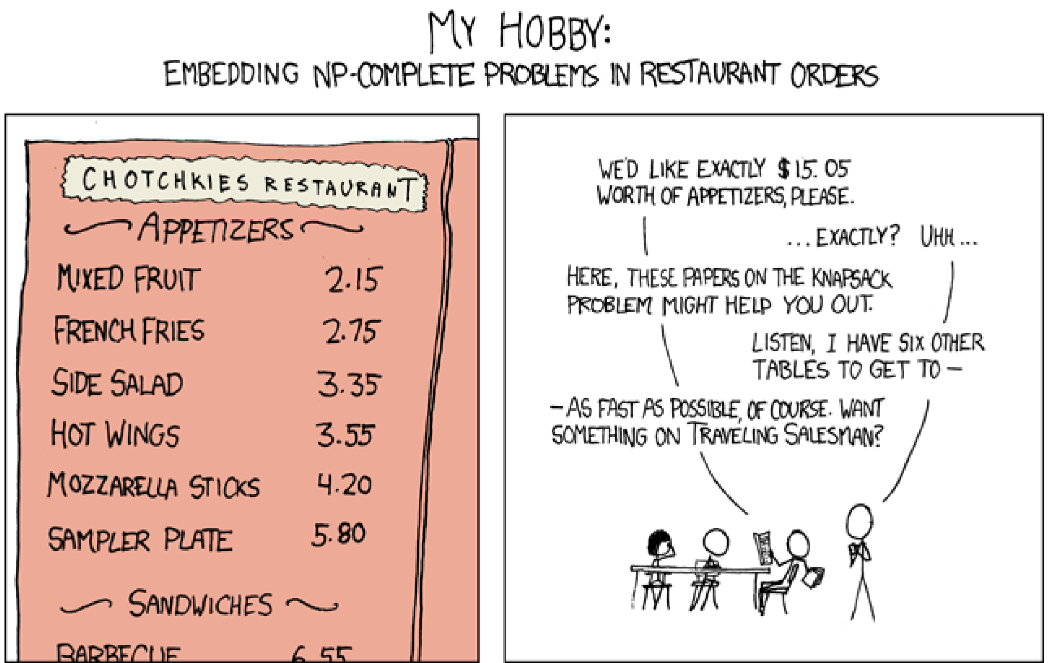
Όλοι οι ενδιάμεσοι κόμβοι δεν είναι δυνατόν να προσπελασθούν στην συνέχεια και άρα δεν έχουμε Hamiltonian μονοπάτι.

Η αναγωγή γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Άρα, το Hamiltonian μονοπάτι είναι NP-πλήρες.

Το Πρόβλημα του Σάκου (Knapsack)

Δοθέντος ενός συνόλου αντικειμένων, κάθε ένα με βάρος και τιμή και ενός σάκου που χωρά βάρος k, υπάρχουν αντικείμενα που να χωρούν στο σάκο και των οποίων η συνολική τιμή να είναι μεγαλύτερη του W;

Θεώρημα: Το πρόβλημα του Σάκου είναι NP-πλήρες.



ΑΘ_ΥΠ$\leq_P$KNAPSACK

- Εύκολη αναγωγή με ***περιορισμό***

KNAPSACK:

Ένα σύνολο αντικειμένων $I = \{i_1, . . ., i_n\}$ όπου κάθε αντικείμενο i_j έχει τιμή v_j και βάρος w_j (θετικοί ακέραιοι) καθώς και μία τιμή στόχο p και βάρος στόχο k.

Ερώτηση: Υπάρχει υποσύνολο T του I με συνολική τιμή τουλάχιστον p και βάρος το πολύ k;

ΑΘ_ΥΠ$\leq_P$KNAPSACK

Θέτουμε σε στιγμιότυπα του KNAPSACK έτσι ώστε

$$v_j = w_j \,(= x_j)$$

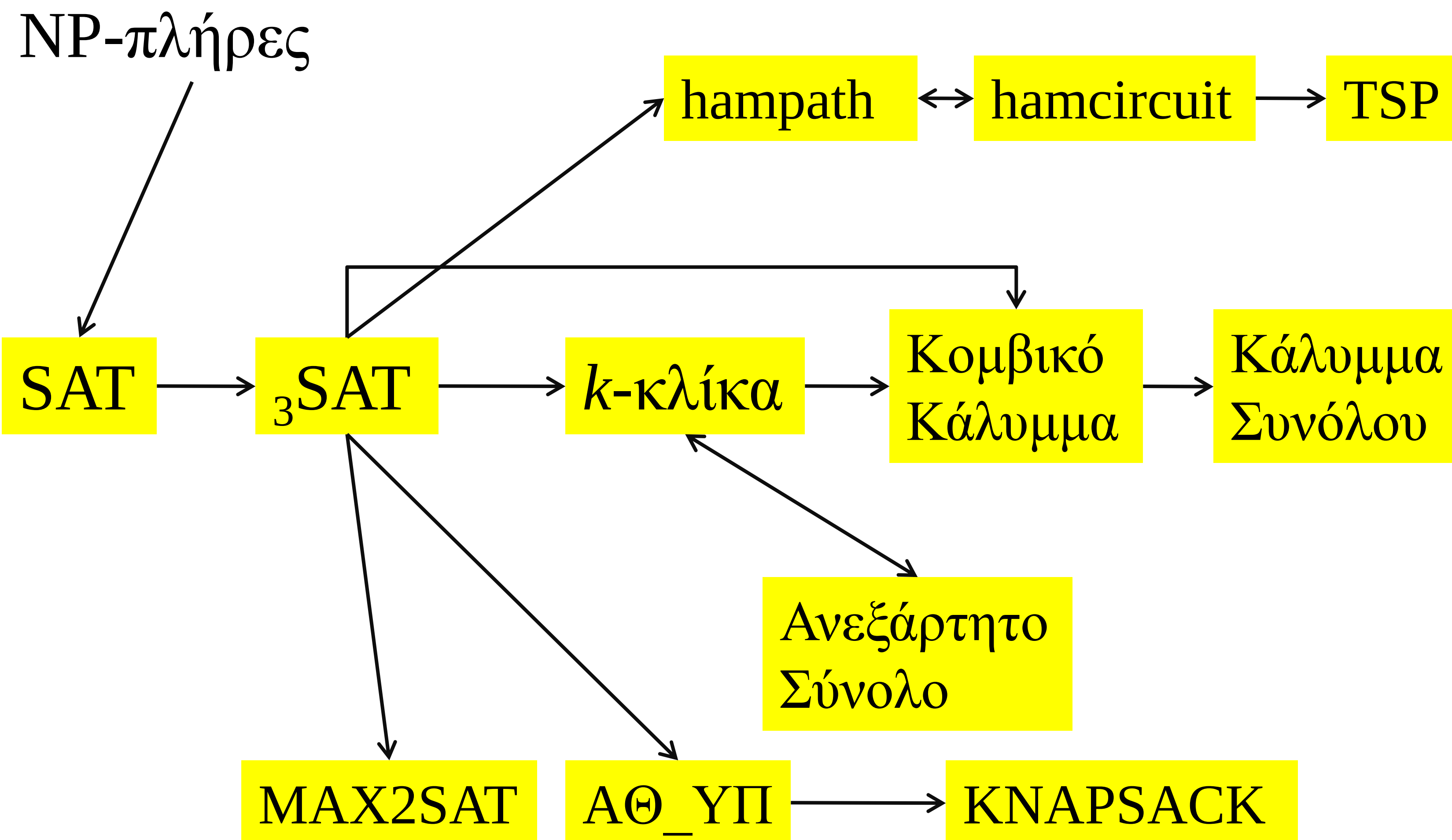
για όλα τα j, και $p = k$ $(=t)$.

Το πρόβλημα που έχουμε είναι το ΑΘ_ΥΠ.

Πράγματι (I είναι ένα υποσύνολο των ακεραίων για το ΑΘ_ΥΠ):

$$\sum_{j \in I} v_j \geq p \qquad \sum_{j \in I} w_j \leq k \qquad \sum_{j \in I} x_j = t$$

Μέχρι Τώρα (2) …


NP-πλήρες
hampath
hamcircuit
TSP
SAT
3SAT
k-κλίκα
Κομβικό Κάλυμμα
Κάλυμμα Συνόλου
Ανεξάρτητο Σύνολο
MAX2SAT
ΑΘ_ΥΠ
KNAPSACK

3-διάστατο Πρόβλημα Ταιριάσματος

Δοθέντων ξένων συνόλων X, Y και Z, κάθε ένα με μέγεθος n, και δοθέντος ενός συνόλου $T \subseteq X \times Y \times Z$ διατεταγμένων τριάδων, υπάρχει σύνολο n τριάδων στο T έτσι ώστε κάθε στοιχείου του συνόλου $X \cup Y \cup Z$ να περιέχεται σε ακριβώς μία τριάδα;

Θεώρημα: Το 3-διάστατο πρόβλημα ταιριάσματος είναι NP-πλήρες.

k-χρωματισμός

Δοθέντος ενός γραφήματος G και ενός φράγματος k, ο G είναι k-χρωματίσιμος;

Θεώρημα: Το πρόβλημα του 3-χρωματισμού είναι NP-πλήρες.

Μερικά NP-πλήρη Προβλήματα

- Έξι βασικές κατηγορίες NP-πλήρων προβλημάτων και μερικά παραδείγματα.
  - Προβλήματα Συλλογών: SET-PACKING, INDEPENDENT SET.
  - Προβλήματα Καλύμματος: SET-COVER, VERTEX-COVER.
  - Προβλήματος Ικανοποίησης Περιορισμών: SAT, 3-SAT.
  - Προβλήματα Ακολουθίας: HAMILTONIAN-CYCLE, TSP.
  - Προβλήματα Διαμέρισης: 3D-MATCHING 3-COLOR.
  - Αριθμητικά Προβλήματα: SUBSET-SUM, KNAPSACK.
- Στην πράξη: Τα περισσότερα NP προβλήματα είτε ανήκουν στην P ή είναι NP-πλήρη.
- Εξαιρέσεις: Παραγοντοποίηση, ισομορφισμός γραφημάτων, Nash equilibrium.

Αντίκτυπος NP-Πληρότητας

- [Papadimitriou 1995]
  - Prime intellectual export of CS to other disciplines.
  - 6,000 citations per year (title, abstract, keywords).
    - more than "compiler", "operating system", "database"
  - Broad applicability and classification power.
  - "Captures vast domains of computational, scientific, mathematical endeavors, and seems to roughly delimit what mathematicians and scientists had been aspiring to compute feasibly."

- NP-completeness can guide scientific inquiry.
  - 1926: Ising introduces simple model for phase transitions.
  - 1944: Onsager solves 2D case in tour de force.
  - 19xx: Feynman and other top minds seek 3D solution.
  - 2000: Istrail proves 3D problem NP-complete.

Εφαρμογές NP-Πληρότητας

- Aerospace engineering: optimal mesh partitioning for finite elements.
- Biology: protein folding.
- Chemical engineering: heat exchanger network synthesis.
- Civil engineering: equilibrium of urban traffic flow.
- Economics: computation of arbitrage in financial markets with friction.
- Electrical engineering: VLSI layout.
- Environmental engineering: optimal placement of contaminant sensors.
- Financial engineering: find minimum risk portfolio of given return.
- Game theory: find Nash equilibrium that maximizes social welfare.
- Genomics: phylogeny reconstruction.
- Mechanical engineering: structure of turbulence in sheared flows.
- Medicine: reconstructing 3-D shape from biplane angiocardiogram.
- Operations research: optimal resource allocation.
- Physics: partition function of 3-D Ising model in statistical mechanics.
- Politics: Shapley-Shubik voting power.
- Pop culture: Minesweeper consistency.
- Statistics: optimal experimental design.

Άσκηση (2 μονάδες – 20 λεπτά)

Έστω το εξής πρόβλημα: ΑΚ-ΚΛΙΚΑ={⟨G,u,l⟩: το μη-κατευθυνόμενο γράφημα G έχει μία κλίκα με μέγεθος τουλάχιστον l και το πολύ u}. Θέλουμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΑΚ-ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες.

<u>Λύση:</u>

Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΑΚ-ΚΛΙΚΑ ανήκει στη κλάση ________ (1). Αυτό μπορούμε να το κάνουμε με δύο τρόπους: α) να κατασκευάσουμε μία ____________________ (2) TM που σε ________________(3) χρόνο να λύνει το πρόβλημα ή β) να κατασκευάσουμε έναν αιτιοκρατικό πολυωνυμικό _______________(4) όπου το πιστοποιητικό θα είναι ____________________________________(5). Αυτό το πιστοποιητικό έχει____________________(6) μέγεθος και μπορούμε να το ελέγξουμε αποδοτικά.

Το δεύτερο βήμα είναι να βρούμε το κατάλληλο πρόβλημα από το οποίο θα κάνουμε αναγωγή.

Θα επιλέξουμε να αποδείξουμε πολύ εύκολα την NP-πληρότητα του προβλήματος ΑΚ-ΚΛΙΚΑ με περιορισμό. Το πρόβλημα που επιλέγουμε για να αποτελέσει περιορισμό του ΑΚ-ΚΛΙΚΑ είναι το (δώστε πλήρη ορισμό του προβλήματος) _____________________(7), το οποίο γνωρίζουμε ήδη ότι είναι NP-πλήρες. Πράγματι, αν ____(8) τότε το πρόβλημα ΑΚ-ΚΛΙΚΑ μετασχηματίζεται σε αυτό που δόθηκε στο (7).

Άρα το πρόβλημα ΑΚ-ΚΛΙΚΑ είναι NP-πλήρες.

Άσκηση

Ένας οδηγός ταξί που βρίσκεται στο αεροδρόμιο έχει στη διάθεσή του έναν χάρτη με το αντίτιμο για κάθε δρόμο μεταξύ διασταυρώσεων. Αυτό σημαίνει ότι το τελικό αντίτιμο για έναν πελάτη είναι το άθροισμα όλων των αντιτίμων για όλους τους δρόμους από τους οποίους θα διέλθει το ταξί. Ένας τουρίστας εισέρχεται στο ταξί και δίνει στον οδηγό τον τελικό του προορισμό. Μιας και ο πελάτης είναι τουρίστας, ο «πονηρός» οδηγός θα επιλέξει για διαδρομή στον τελικό προορισμό αυτή που μεγιστοποιεί το αντίτιμο που θα πληρώσει ο τουρίστας μιας και αυτός δεν μπορεί να το καταλάβει εκτός και αν το ταξί περάσει από το ίδιο σημείο δεύτερη φορά (διασταύρωση ή δρόμο). Το ερώτημα είναι ποιον δρόμο θα πρέπει να ακολουθήσει ο οδηγός ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του.

Α) Αναπαραστήστε το παραπάνω πρόβλημα ως πρόβλημα βελτιστοποίησης σε ένα γράφημα. Έπειτα δώστε το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης, ΠΤ (Πονηρός Ταξιτζής).

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης ορίζεται ως εξής:

Δοθέντος ενός κατευθυντικού γραφήματος $G=(V,E)$ (που αναπαριστά το χάρτη και η κατεύθυνση των ακμών αναπαριστά την δυνατότητα κατεύθυνσης κίνησης του αυτοκινήτου σε έναν δρόμο) και μίας συνάρτησης $f{:}E\rightarrow\Re^{+}$ που αποδίδει ένα θετικό βάρος (αντίτιμο) σε κάθε ακμή του γραφήματος, να βρεθεί η διαδρομή P με το μεγαλύτερο συνολικό βάρος από έναν κόμβο $s\in V$ σε έναν προορισμό $t\in V$ έτσι ώστε κανένας κόμβος να μην εμφανίζεται παραπάνω από μία φορά στην διαδρομή P.

Πονηρός Ταξιτζής (πρόβλημα απόφασης):

ΠΤ=$\{\langle G,f,s,t,k\rangle \mid$ Το $G=(V,E)$ είναι ένα κατευθυντικό γράφημα με θετικά βάρη στις ακμές που δίνονται από τη συνάρτηση $f{:}E\rightarrow\Re^{+}$ και έχει μία διαδρομή P από τον κόμβο $s\in V$ προς έναν κόμβο $t\in V$ με συνολικό αθροιστικό βάρος $\geq k\}$.

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα ΠΤ ανήκει στη κλάση NP.

Πρέπει να δείξουμε ότι το πρόβλημα ΠΤ $\in$ NP. Ο επαληθευτής παίρνει σαν είσοδο ένα στιγμιότυπο του προβλήματος (G,f,s,t,k) και το πιστοποιητικό που είναι απλά μία διαδρομή P στο γράφημα $G=(V,E)$. Ελέγχει αν η διαδρομή P ξεκινά από τον κόμβο s καταλήγει στον κόμβο t και ότι αποτελείται από μία ακολουθία ακμών που καθιστούν το μονοπάτι έγκυρο. Ένα μονοπάτι $P=e_1,e_2,\ldots,e_n$ είναι έγκυρο για το γράφημα G αν $e_i \in E$, $1 \leq i \leq n$ και αν $e_i=(u,v)$ τότε $e_{i+1}=(v,w)$. Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα με μία απλή διαπέραση της διαδρομής στο G. Έπειτα ελέγχει ότι κάθε ένας κόμβος του G εμφανίζεται το πολύ μία φορά στο P το οποίο μπορεί να επιτευχθεί σημαδεύοντας κάθε κόμβο του G που ανήκει στο P μέχρι είτε να τελειώσει το P, οπότε συνεχίζουμε την επαλήθευση, είτε μέχρι να σημαδευθεί ήδη σημαδεμένος κόμβος οπότε και απορρίπτουμε. Τέλος, αθροίζει τα βάρη των ακμών στη διαδρομή P και αν είναι $\geq k$ ο επαληθευτής αποδέχεται τη λύση αλλιώς απορρίπτει. Τα παραπάνω βήματα μπορούν να υλοποιηθούν σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το πλήθος των κόμβων του γραφήματος και άρα το ΠΤ $\in$ NP.

Αποδείξτε ότι το πρόβλημα ΠΤ είναι NP-πλήρες ανάγοντας σε αυτό το πρόβλημα της εύρεσης κύκλου Hamilton σε κατευθυντικό γράφημα.

Θα ανάγουμε το πρόβλημα εύρεσης κύκλου Hamilton σε κατευθυντικό γράφημα στο πρόβλημα ΠΤ. Δοθέντος ενός γραφήματος $G=(V,E)$ που αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος εύρεσης Hamilton κύκλου σε κατευθυντικό γράφημα θα κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο S του ΠΤ ώστε ο G να έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν στο S υπάρχει μεγάλη διαδρομή όπως αυτή θα οριστεί παρακάτω.

Κατασκευή: Επιλέγουμε έναν κόμβο v του G και τον διασπάμε σε δύο κόμβους, τον v_1 και v_2. Έπειτα προσθέτουμε την ακμή (v_2, v_1) στο γράφημα. Κάθε ακμή από τον v σε κάποιο άλλο κόμβο θα ξεκινά από τον κόμβο v_1. Κάθε ακμή που έδειχνε στο v τώρα θα δείχνει στον v_2. Σε αυτό το νέο γράφημα $G'=(V',E')$ που προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία ορίζουμε τη συνάρτηση βάρους ως εξής: $f(e)=1$ για κάθε $e \in E'$ (κάθε ακμή έχει βάρος 1). Τέλος, ορίζουμε ως $k=|V'|-1=|V|$. Το $\langle G',f,v_1,v_2,k \rangle$ αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος ΠΤ. Θα αποδείξουμε ότι το G έχει κύκλο Hamilton αν και μόνο αν το G' έχει μία διαδρομή από τον v_1 στον v_2 με συνολικό βάρος $\geq k$.

$\Rightarrow$

Έστω ότι το G έχει ένα κατευθυντικό κύκλο Hamilton. Θα δείξουμε ότι το $\langle G', f, v_1, v_2, k\rangle$ ανήκει στη γλώσσα ΠΤ. Έστω ότι $C \subseteq E$ είναι οι ακμές του κατευθυντικού κύκλου Hamilton. Αυτές οι ακμές αντιστοιχούν σε ακμές του G'. Όμως αυτές οι ακμές ορίζουν μία διαδρομή από τον v_1 στον v_2 με συνολικό βάρος ίσο με $|V'|-1=|V|$ χωρίς να υπάρχει επανάληψη κόμβων (αφού ήταν κύκλος Hamilton στο G). Επομένως, το στιγμιότυπο $\langle G', f, v_1, v_2, k\rangle$ ανήκει στο ΠΤ.

$\Leftarrow$

Έστω ότι υπάρχει μία διαδρομή $P \subseteq E'$ από τον v_1 στον v_2 του γραφήματος G' με συνολικό βάρος ίσο με $|V'|$-1=$|V|$. Αφού κανένας κόμβος δεν επαναλαμβάνεται στο P και το μήκος του είναι $|V|$, θα πρέπει κάθε κόμβος του G' να ανήκει στη διαδρομή P. Προσθέτοντας την ακμή (v_2, v_1) στην P παίρνουμε έναν κύκλο που περνάει από κάθε κόμβο του G' μία και μόνο μία φορά. Αυτός όμως είναι ένας κύκλος Hamilton στο G'. Αυτό συνεπάγεται και την ύπαρξη κύκλου Hamilton στο G μιας και αυτός κατασκευάζεται συγχωνεύοντας τους δύο κόμβους v_1 και v_2 σε έναν κόμβο: στον κόμβο v. Άρα ο G έχει κύκλο Hamilton.

Η αναγωγή μας είναι πολυωνυμική, και αφού, λόγω του υποερωτήματος (Β), το πρόβλημα ΠΤ ανήκει στην κλάση NP, συμπεραίνουμε ότι είναι NP-πλήρες.

Ασκήσεις

(Α) Αποδείξτε ότι αν η γλώσσα L ανήκει στο NP και για τη γλώσσα K ισχύει ότι $K \leq_P L$ τότε και η K ανήκει στην NP

(Β) Αποδείξτε ότι: Αν η γλώσσα L είναι NP–πλήρης και το συμπλήρωμα L΄ αυτής ανήκει στην κλάση NP, τότε το συμπλήρωμα οποιασδήποτε γλώσσας στην κλάση NP ανήκει και αυτό στην κλάση NP.

(Γ) Υποθέτοντας ότι $P \neq NP$, ισχύει ή όχι ότι: Αν κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης P_1 είναι και στιγμιότυπο του προβλήματος απόφασης P_2, και αν το P_2 είναι NP-δύσκολο (σκληρό) τότε και το P_1 είναι NP-δύσκολο;

(Δ) Αποδείξτε ότι: Αν $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$, με $L_1 \in P$, $L_2 \neq \emptyset$ και $L_2 \neq \Sigma^*$, τότε υπάρχει πολυωνυμική απεικονιστική αναγωγή $L_1 \leq L_2$.