

## Ασκήσεις σε αναγωγές μη διαγνωσιμότητας

Γιάννης Καραγιάννης

Δείξτε ότι οι παρακάτω γλώσσες δεν είναι διαγνώσιμες:

1.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{τερμα}\tau\acute{\iota}\zeta\epsilon\iota \ \text{με} \ \epsilon\text{ί}\sigma\omicron\delta\omicron \ \tau\eta \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha} \ 'ααα'\}$
2.  $L = \{ \langle M, q \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{περ}\nu\acute{\alpha}\epsilon\iota \ \alpha\pi\acute{o} \ \tau\eta\text{n} \ \kappa\alpha\tau\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta \ q \ \text{με} \ \omicron\text{ποια}\delta\eta\tau\omicron\tau\epsilon \ \epsilon\text{ί}\sigma\omicron\delta\omicron \}$
3.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{διαγ}\nu\acute{\omega}\sigma\tau\eta\varsigma \}$
4.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \text{που} \ \text{απορ}\rho\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\iota \ \alpha\kappa\text{ριβ}\acute{\omega}\varsigma \ \mu\iota\alpha \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha} \}$
5.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \text{που} \ \text{απορ}\rho\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\iota \ \acute{o}\lambda\epsilon\varsigma \ \tau\omicron\varsigma \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\epsilon}\varsigma \}$
6.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \text{που} \ \text{εγκλωβ}\acute{\iota}\zeta\epsilon\tau\alpha\iota \ \text{με} \ \epsilon\text{ί}\sigma\omicron\delta\omicron \ \omicron\text{ποια}\delta\eta\tau\omicron\tau\epsilon \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha} \}$
7.  $L = \{ \langle M, w, \sigma \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \gamma\rho\acute{\alpha}\phi\epsilon\iota \ \kappa\acute{\alpha}\pi\omicron\iota\alpha \ \sigma\text{τιγ}\mu\acute{\eta} \ \sigma\tau\eta\text{n} \ \tau\alpha\text{ι}\nu\acute{\iota}\alpha \ \tau\omicron \ \sigma\acute{\upsilon}\mu\beta\omicron\lambda\omicron \ \sigma \ \xi\kappa\text{ιν}\acute{\omega}\nu\tau\alpha\varsigma \ \text{με} \ \epsilon\text{ί}\sigma\omicron\delta\omicron \ w \}$
8.  $L = \{ \langle M, M' \rangle : \omicron\text{i} \ M \ \kappa\alpha\iota \ M' \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \text{με} \ \mu\eta \ \text{συμπληρωμα}\tau\acute{\iota}\kappa\epsilon\varsigma \ \gamma\lambda\acute{\omega}\sigma\sigma\epsilon\varsigma \}$
9.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{εγκλωβ}\acute{\iota}\zeta\epsilon\tau\alpha\iota \ \gamma\text{ια} \ \alpha\kappa\text{ριβ}\acute{\omega}\varsigma \ \delta\acute{\upsilon}\omicron \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\epsilon}\varsigma \}$
10.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{απορ}\rho\acute{\iota}\pi\tau\epsilon\iota \ \alpha\kappa\text{ριβ}\acute{\omega}\varsigma \ \delta\acute{\upsilon}\omicron \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\epsilon}\varsigma \}$
11.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{εγκλωβ}\acute{\iota}\zeta\epsilon\tau\alpha\iota \ \text{με} \ \epsilon\text{ί}\sigma\omicron\delta\omicron \ \tau\eta \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha} \ '1010'\}$
12.  $L = \{ \langle M, w \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{τερμα}\tau\acute{\iota}\zeta\epsilon\iota \ \alpha\text{πορ}\rho\acute{\iota}\pi\tau\omicron\text{ν}\tau\alpha\varsigma \ \text{με} \ \epsilon\text{ί}\sigma\omicron\delta\omicron \ w \}$
13.  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{δεν} \ \alpha\text{ποδ}\acute{\epsilon}\chi\epsilon\tau\alpha\iota \ \kappa\alpha\mu\acute{\iota}\alpha \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha} \ \text{περιτ}\tau\acute{\omicron} \ \mu\acute{\eta}\kappa\omicron\upsilon\varsigma \}$

### Ενδεικτικές λύσεις

1: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\text{ί}\nu\alpha\text{i} \ \text{TM} \ \kappa\alpha\iota \ \text{τερμα}\tau\acute{\iota}\zeta\epsilon\iota \ \text{με} \ \epsilon\text{ί}\sigma\omicron\delta\omicron \ \tau\eta \ \sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha} \ 'ααα'\}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης R για τη γλώσσα L και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη S για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ως εξής:

S = για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Αν  $x \neq 'ααα'$  απόρριψε
2. Αλλιώς, αν  $x = 'ααα'$ , προσομοίωσε την TM M με είσοδο w
3. Αν η M αποδεχτεί, απόρριψε
4. Αν η M απορρίψει, εγκλωβίσου

2. Εκτέλεσε την TM R με είσοδο  $\langle M' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου

4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η S είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM  $M'$  τερματίζει με είσοδο 'ααα' αν και μόνο αν η TM M αποδέχεται τη  $\sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha}$  w.

### Παρατηρήσεις

Στη γραμμή 1 του κώδικα της TM  $M'$  η εντολή «απόρριψε» θα μπορούσε να είναι «αποδέξου» ή και «εγκλωβίσου». Δεν έχει σημασία καθώς η απάντηση του διαγνώστη R δεν εξαρτάται από το τι κάνει η TM  $M'$  με είσοδο  $\sigma/\sigma\epsilon\text{ι}\rho\acute{\alpha}$  διαφορετική της 'ααα'. Επίσης, η εντολή «απόρριψε» στη γραμμή 3 της TM  $M'$  θα μπορούσε να είναι και «αποδέξου». Το

σημαντικό είναι η TM  $M'$  να τερματίζει με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά 'ααα' όταν η  $M$  αποδέχεται το  $w$ .

#### Debugging της TM $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά 'ααα'. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  τερματίζει με είσοδο 'ααα'), και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  εγκλωβίζεται με είσοδο 'ααα'. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν τερματίζει με είσοδο 'ααα'), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  εγκλωβίζεται για είσοδο 'ααα' (καθώς κατά την προσομοίωση της  $M$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/TM.

---

2: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M, q \rangle : \text{η } M \text{ είναι TM και περνάει από την κατάσταση } q \text{ με οποιαδήποτε είσοδο} \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:
  - $M' =$  για είσοδο  $x$ 
    1. Προσομοίωσε την TM  $M$  με είσοδο  $w$
    2. Αν η  $M$  αποδεχτεί, αποδέξου
    3. Αν η  $M$  απορρίψει, απόρριψε
2. Εκτέλεσε την TM  $R$  με είσοδο  $\langle M', q_{\text{ΝΑΙ}} \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου
4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM  $M'$  αποδέχεται (δηλαδή, περνάει από την κατάσταση  $q_{\text{ΝΑΙ}}$  για κάθε είσοδο) αν και μόνο αν η TM  $M$  αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ .

#### Debugging της TM $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  αποδέχεται κάθε  $\sigma$ /σειρά. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  περνάει από τη/φθάνει στην κατάσταση  $q_{\text{ΝΑΙ}}$  για κάθε  $\sigma$ /σειρά), και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  απορρίπτει κάθε  $\sigma$ /σειρά. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν περνάει ποτέ από την κατάσταση  $q_{\text{ΝΑΙ}}$  για καμιά  $\sigma$ /σειρά), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  εγκλωβίζεται για κάθε είσοδο (καθώς κατά την προσομοίωση της  $M$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν περνάει ποτέ από την κατάσταση  $q_{\text{NAI}}$  για καμιά  $\sigma$ /σειρά), και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

---

3: Η γλώσσα  $L = \{\langle M \rangle : \text{η } M \text{ είναι ΤΜ και διαγνώστης}\}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε ΤΜ  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Αν  $x \neq \epsilon$  απόρριψε
2. Αλλιώς, αν  $x = \epsilon$ , προσομοίωσε την ΤΜ  $M$  με είσοδο  $w$
3. Αν η  $M$  αποδεχτεί, απόρριψε
4. Αν η  $M$  απορρίψει, εγκλωβίσου

2. Εκτέλεσε την ΤΜ  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου

4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η ΤΜ  $M'$  τερματίζει με οποιαδήποτε είσοδο (δηλαδή, είναι διαγνώστης) αν και μόνο αν η ΤΜ  $M$  αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ .

#### Παρατηρήσεις

Στη γραμμή 1 του κώδικα της ΤΜ  $M'$  η εντολή «απόρριψε» θα μπορούσε να είναι «αποδέξου». Προφανώς, η διάκριση μεταξύ των περιπτώσεων  $x \neq \epsilon$  και  $x = \epsilon$  δεν έχει σημασία.

#### Debugging της ΤΜ $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση ΤΜ  $M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $\epsilon$ . Γενικά, τερματίζει με είσοδο κάθε  $\sigma$ /σειρά και, επομένως είναι διαγνώστης. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ, και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  εγκλωβίζεται με είσοδο  $\epsilon$  και, επομένως, δεν είναι διαγνώστης. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  εγκλωβίζεται για είσοδο  $\epsilon$  (καθώς κατά την προσομοίωση της  $M$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

---

4: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \ M \ \epsilon\iota\upsilon\alpha\iota \ T\ M \ \pi\omicron\upsilon \ \alpha\pi\omicron\rho\rho\iota\pi\tau\epsilon \ \alpha\kappa\rho\iota\beta\acute{\omega}\varsigma \ \mu\iota\alpha \ \sigma/\sigma\epsilon\iota\rho\acute{\alpha} \} \ \delta\epsilon\upsilon \ \epsilon\iota\upsilon\alpha\iota \ \delta\iota\alpha\gamma\nu\acute{\omega}\sigma\iota\mu\eta.$

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε ΤΜ  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Αν  $x =$  'γιάννης' απόρριψε
2. Αλλιώς, αν  $x \neq$  'γιάννης', προσομοίωσε την ΤΜ  $M$  με είσοδο  $w$
3. Αν η  $M$  αποδεχτεί, απόρριψε
4. Αν η  $M$  απορρίψει, αποδέξου

2. Εκτέλεσε την ΤΜ  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, απόρριψε

4. Αν απορρίψει, αποδέξου

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η ΤΜ  $M'$  απορρίπτει μόνο τη  $\sigma$ /σειρά 'γιάννης' και καμιά άλλη αν και μόνο αν η ΤΜ  $M$  δεν αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ .

#### Παρατηρήσεις

Αυτό το τελευταίο «δεν» είναι ο λόγος για τον οποίο η  $S$  αντιστρέφει την απάντηση που επιστρέφει ο διαγνώστης  $R$  στις γραμμές 3 και 4. Προφανώς, η  $\sigma$ /σειρά 'γιάννης' δεν έχει κάτι ιδιαίτερο. Η εντολή «αποδέξου» στη γραμμή 4 της ΤΜ  $M'$  θα μπορούσε να είναι και «εγκλωβίσου» (αλλά όχι «απόρριψε»).

#### Debugging της ΤΜ $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση ΤΜ  $M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  απορρίπτει όλες τις  $\sigma$ /σειρές. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν απορρίπτει ακριβώς μια  $\sigma$ /σειρά), και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  απορρίπτει μόνο τη  $\sigma$ /σειρά 'γιάννης' και αποδέχεται όλες τις άλλες. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  απορρίπτει ακριβώς μια  $\sigma$ /σειρά), και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά 'γιάννης' και εγκλωβίζεται για όλες τις άλλες εισόδους (καθώς κατά την προσομοίωση της  $M$  στη γραμμή 2 της  $M'$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ, και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

---

5: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M \rangle : \eta M \text{ είναι TM που απορρίπτει όλες τις } \sigma/\text{σειρές} \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:
  - $M' =$  για είσοδο  $x$ 
    1. Προσομοίωσε την TM  $M$  με είσοδο  $w$
    2. Αν η  $M$  αποδεχτεί, απόρριψε
    3. Αν η  $M$  απορρίψει, αποδέξου
2. Εκτέλεσε την TM  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου
4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM  $M'$  απορρίπτει όλες τις  $\sigma/\text{σειρές}$  αν και μόνο αν η TM  $M$  αποδέχεται τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ .

#### Debugging της TM $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$  και  $\sigma/\text{σειράς}$   $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ , η TM  $M'$  απορρίπτει όλες τις  $\sigma/\text{σειρές}$ . Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ, και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ , η TM  $M'$  αποδέχεται όλες τις  $\sigma/\text{σειρές}$ . Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν απορρίπτει όλες τις  $\sigma/\text{σειρές}$ ), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ , η TM  $M'$  εγκλωβίζεται για κάθε είσοδο (καθώς κατά την προσομοίωση της  $M$  στη γραμμή 2 της  $M'$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/TM.

---

6: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M \rangle : \eta M \text{ είναι TM που εγκλωβίζεται με είσοδο οποιαδήποτε } \sigma/\text{σειρά} \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:
  - $M' =$  για είσοδο  $x$

1. Προσομοίωσε την TM M με είσοδο w
2. Αν η M τερματίσει αποδέξου
2. Εκτέλεσε την TM R με είσοδο  $\langle M' \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, απόρριψε
4. Αν απορρίψει, αποδέξου

Προσέξτε ότι η S είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM M' εγκλωβίζεται με οποιαδήποτε είσοδο αν και μόνο αν η TM M εγκλωβίζεται (δηλαδή, δεν τερματίζει) με είσοδο τη σ/σειρά w.

#### Παρατηρήσεις

Το τελευταίο «δεν» είναι ο λόγος που αντιστρέφουμε την απάντηση του R στα βήματα 3 και 4 της TM S. Στη γραμμή 2 του κώδικα της TM M<sub>0</sub> η εντολή «αποδέξου» θα μπορούσε να είναι και «απόρριψε».

#### Debugging της TM S

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM M και σ/σειράς w) τέτοια ώστε η M να αποδέχεται τη σ/σειρά w, η TM M' αποδέχεται κάθε σ/σειρά (καθώς η M τερματίζει με είσοδο w). Η εκτέλεση του διαγνώστη R στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς υπάρχει σ/σειρά για την οποία η M' δεν εγκλωβίζεται), και η TM S επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η M να απορρίπτει τη σ/σειρά w, η TM M<sub>0</sub> αποδέχεται κάθε σ/σειρά (καθώς η M τερματίζει με είσοδο w). Η εκτέλεση του διαγνώστη R στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς υπάρχει σ/σειρά για την οποία η M' δεν εγκλωβίζεται), και η TM S επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η M να εγκλωβίζεται με είσοδο τη σ/σειρά w, η TM M' εγκλωβίζεται για κάθε είσοδο (καθώς κατά την προσομοίωση της M αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη R στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ, και η TM S επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η S τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η M τερματίζει με είσοδο τη σ/σειρά w ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM.

7: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M, w, \sigma \rangle : \eta M \text{ είναι TM και γράφει κάποια στιγμή στην ταινία το σύμβολο } \sigma \text{ ξεκινώντας με είσοδο } w \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης R για τη γλώσσα L και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη S για τη γλώσσα ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM ως εξής:

S = για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε TM M' που λειτουργεί ως εξής:
  - M' = για είσοδο x
  1. Προσομοίωσε την TM M με είσοδο w
  2. Αν η M τερματίσει, γράψε στην ταινία το σύμβολο σ και εγκλωβίσου
2. Εκτέλεσε την TM R με είσοδο  $\langle M, w, \sigma \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου
4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η  $TM M'$  γράφει κάποια στιγμή στην ταινία το σύμβολο  $\sigma$  όταν ξεκινά με είσοδο  $w$  αν και μόνο αν η  $TM M$  τερματίζει με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ .

#### Παρατηρήσεις

Στη γραμμή 2 του κώδικα της  $TM M'$  η εντολή «εγκλωβίσου» θα μπορούσε να είναι και «αποδέξου» ή «απόρριψε». Υποθέτουμε ότι η  $TM M$  δε γράφει ποτέ το σύμβολο  $\sigma$  στην ταινία της (π.χ., το  $\sigma$  δεν είναι σύμβολο του αλφάβητου ταινίας της). Επίσης, η  $M'$  δεν γράφει ποτέ το σύμβολο  $\sigma$  στην ταινία της παρά μόνο μετά τον τερματισμό της προσομοίωσης της  $M$  στη γραμμή 2.

#### Debugging της $TM S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση  $TM M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η  $TM M'$  γράφει το σύμβολο  $\sigma$  στην ταινία με κάθε είσοδο (καθώς η  $M$  τερματίζει με είσοδο  $w$ ). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  γράφει στην ταινία το σύμβολο  $\sigma$  όταν ξεκινά με είσοδο  $w$ ), και η  $TM S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η  $TM M'$  γράφει το σύμβολο  $\sigma$  στην ταινία με κάθε είσοδο (καθώς η  $M$  τερματίζει απορρίπτοντας με είσοδο  $w$ ). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  γράφει στην ταινία το σύμβολο  $\sigma$  όταν ξεκινά με είσοδο  $w$ ), και η  $TM S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η  $TM M'$  εγκλωβίζεται για κάθε είσοδο και δεν γράφει ποτέ το σύμβολο  $\sigma$  στην ταινία (καθώς κατά την προσομοίωση της  $M$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η  $TM S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  τερματίζει με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ $TM$ .

---

8: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M, M' \rangle : \text{οι } M \text{ και } M' \text{ είναι } TM \text{ με μη συμπληρωματικές γλώσσες} \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ $TM$ . Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΚΕΝΟΤΗΤΑ/ $TM$  ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M \rangle$

1. Κατασκεύασε  $TM M'$  που αποδέχεται κάθε συμβολοσειρά
2. Εκτέλεσε την  $TM R$  με είσοδο  $\langle M, M' \rangle$
3. Αν αποδεχτεί, απόρριψε
4. Αν απορρίψει, αποδέξου

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι οι γλώσσες των  $TM M$  και  $M'$  δεν είναι συμπληρωματικές αν και μόνο αν η  $TM M$  δεν έχει κενή γλώσσα.

### Παρατηρήσεις

Αυτό το τελευταίο «δεν» είναι ο λόγος για τον οποίο η  $S$  αντιστρέφει την απάντηση που επιστρέφει ο διαγνώστης  $R$  στις γραμμές 3 και 4.

### Debugging της TM $S$

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η γλώσσα της TM  $M'$  είναι πάντα το  $\Sigma^*$ .

Με είσοδο  $\langle M \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να έχει κενή γλώσσα, οι γλώσσες των  $M$  και  $M'$  είναι συμπληρωματικές. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να μην έχει κενή γλώσσα, οι γλώσσες των  $M$  και  $M'$  δεν είναι συμπληρωματικές. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ, και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  έχει κενή γλώσσα ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΚΕΝΟΤΗΤΑ/TM.

---

9: Η γλώσσα  $L = \{\langle M \rangle : \eta M \text{ είναι TM και εγκλωβίζεται για ακριβώς δύο } \sigma/\text{σειρές}\}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΠΕΡΑΤΩΣΗ/TM ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκευάσε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Αν  $x = 'α'$  ή  $x = 'αα'$ , εγκλωβίσου

2. Αλλιώς, αν  $x \neq 'α'$  και  $x \neq 'αα'$ , προσομοίωσε την TM  $M$  με είσοδο  $w$

3. Αν η  $M$  τερματίσει, απόρριψε

2. Εκτέλεσε την TM  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου

4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM  $M'$  εγκλωβίζεται μόνο για τις  $\sigma/\text{σειρές}$   $'α'$  και  $'αα'$  αν και μόνο αν η TM  $M$  τερματίζει με είσοδο τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ .

### Debugging της TM $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$  και  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ , η TM  $M'$  απορρίπτει όλες τις  $\sigma/\text{σειρές}$  εκτός από τις  $'α'$  και  $'αα'$ , για τις οποίες εγκλωβίζεται. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  εγκλωβίζεται για ακριβώς δύο  $\sigma/\text{σειρές}$ ), και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma/\text{σειρά}$   $w$ , η TM  $M'$  πάλι απορρίπτει όλες τις  $\sigma/\text{σειρές}$  εκτός από τις  $'α'$  και  $'αα'$ , για τις οποίες εγκλωβίζεται. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ, και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.



Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  εγκλωβίζεται όχι μόνο για τις  $\sigma$ /σειρές 'α' και 'αα' αλλά και για κάθε είσοδο (καθώς κατά την προσομοίωση της  $M$  στη γραμμή 2 της  $M'$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  τερματίζει με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΠΕΡΑΤΩΣΗ/ΤΜ.

---

10: Η γλώσσα  $L = \{\langle M \rangle : \text{η } M \text{ είναι ΤΜ και απορρίπτει ακριβώς δύο } \sigma\text{/σειρές}\}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκευάσε ΤΜ  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Αν  $x \neq \text{'α'}$  ή  $x \neq \text{'αα'}$ , εγκλωβίσου
2. Αλλιώς, αν  $x = \text{'α'}$  και  $x = \text{'αα'}$ , προσομοίωσε την ΤΜ  $M$  με είσοδο  $w$
3. Αν η  $M$  αποδεχτεί, απόρριψε
4. Αν η  $M$  απορρίψει, αποδέξου

2. Εκτέλεσε την ΤΜ  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου

4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η ΤΜ  $M'$  απορρίπτει ακριβώς δύο  $\sigma$ /σειρές (τις 'α' και 'αα') αν και μόνο αν η ΤΜ  $M$  αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ .

#### Debugging της ΤΜ $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση ΤΜ  $M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  απορρίπτει τις  $\sigma$ /σειρές 'α' και 'αα' και εγκλωβίζεται με είσοδο όλες τις άλλες. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  απορρίπτει ακριβώς δύο  $\sigma$ /σειρές), και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  αποδέχεται τις  $\sigma$ /σειρές 'α' και 'αα' και εγκλωβίζεται με είσοδο όλες τις άλλες. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν απορρίπτει ακριβώς δύο  $\sigma$ /σειρές), και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η ΤΜ  $M'$  εγκλωβίζεται για κάθε είσοδο (προσέξτε ότι κατά την προσομοίωση της  $M$  στη γραμμή 2 της  $M'$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ, και η ΤΜ  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/ΤΜ.

---

11: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M \rangle : \eta \text{ } M \text{ είναι TM και εγκλωβίζεται με είσοδο τη } \sigma/\text{σειρά '1010'} \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκευάσε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Αν  $x \neq '1010'$ , αποδέξου

2. Αλλιώς, αν  $x = '1010'$ , προσομοίωσε την TM  $M$  με είσοδο  $w$

3. Αν η  $M$  αποδεχτεί, απόρριψε

4. Αν η  $M$  απορρίψει, εγκλωβίσου

2. Εκτέλεσε την TM  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, απόρριψε

4. Αν απορρίψει, αποδέξου

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM  $M'$  εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma/\text{σειρά '1010'}$  αν και μόνο αν η TM  $M$  δεν αποδέχεται τη  $\sigma/\text{σειρά } w$ .

#### Παρατηρήσεις

Αυτό το τελευταίο «δεν» είναι ο λόγος για τον οποίο η  $S$  αντιστρέφει την απάντηση που επιστρέφει ο διαγνώστης  $R$  στις γραμμές 3 και 4. Η εντολή «αποδέξου» στη γραμμή 1 της TM  $M'$  θα μπορούσε να είναι «απόρριψε» ή «εγκλωβίσου». Δεν έχει σημασία, καθώς η απάντηση του διαγνώστη  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$  είναι ανεξάρτητη από το πως λειτουργεί η  $M'$  με είσοδο διαφορετική της  $\sigma/\text{σειράς '1010'}$ .

#### Debugging της TM $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$  και  $\sigma/\text{σειράς } w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma/\text{σειρά } w$ , η TM  $M'$  αποδέχεται τη  $\sigma/\text{σειρά '1010'}$ . Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν εγκλωβίζεται με είσοδο '1010'), και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma/\text{σειρά } w$ , η TM  $M'$  εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma/\text{σειρά '1010'}$ . Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  εγκλωβίζεται με είσοδο '1010'), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma/\text{σειρά } w$ , η TM  $M'$  εγκλωβίζεται για είσοδο '1010' (προσέξτε ότι κατά την προσομοίωση της  $M$  στη γραμμή 2 της  $M'$  αυτή θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ, και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma/\text{σειρά } w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/TM.

---

12: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M, w \rangle : \eta M \text{ είναι TM και τερματίζει απορρίπτοντας με είσοδο } w \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκευάσε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Προσομοίωσε την TM  $M$  με είσοδο  $w$

2. Αν η  $M$  αποδεχτεί, απόρριψε

3. Αν η  $M$  απορρίψει, αποδέξου

2. Εκτέλεσε την TM  $R$  με είσοδο  $\langle M', 'boop' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, αποδέξου

4. Αν απορρίψει, απόρριψε

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM  $M'$  τερματίζει απορρίπτοντας τη  $\sigma$ /σειρά 'boop' αν και μόνο αν η TM  $M$  αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ .

#### Παρατηρήσεις

Η εντολή «αποδέξου» στη γραμμή 3 της TM  $M'$  θα μπορούσε να είναι και «εγκλωβίσου».

#### Debugging της TM $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  απορρίπτει κάθε  $\sigma$ /σειρά. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η  $M'$  απορρίπτει με είσοδο 'boop'), και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  αποδέχεται κάθε  $\sigma$ /σειρά. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν απορρίπτει με είσοδο 'boop'), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  εγκλωβίζεται με είσοδο οποιαδήποτε  $\sigma$ /σειρά (καθώς η προσομοίωση της  $M$  στη γραμμή 1 της TM  $M'$  θα εγκλωβιστεί). Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η  $M'$  δεν απορρίπτει με είσοδο 'boop'), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/TM.

---

13: Η γλώσσα  $L = \{ \langle M \rangle : \eta M \text{ είναι TM και δεν αποδέχεται καμιά } \sigma\text{/σειρά περιττού μήκους} \}$  δεν είναι διαγνώσιμη.

Θα κάνουμε αναγωγή από την ΑΠΟΔΟΧΗ/TM. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει διαγνώστης  $R$  για τη γλώσσα  $L$  και θα τον χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε διαγνώστη  $S$  για τη γλώσσα ΑΠΟΔΟΧΗ/TM ως εξής:

$S =$  για είσοδο  $\langle M, w \rangle$

1. Κατασκεύασε TM  $M'$  που λειτουργεί ως εξής:

$M' =$  για είσοδο  $x$

1. Αν  $x \neq \text{'brown'}$ , εγκλωβίσου

2. Αλλιώς, αν  $x = \text{'brown'}$ , προσομοίωσε την TM  $M$  με είσοδο  $w$

3. Αν η  $M$  αποδεχτεί, αποδέξου

4. Αν η  $M$  απορρίψει, απόρριψε

2. Εκτέλεσε την TM  $R$  με είσοδο  $\langle M' \rangle$

3. Αν αποδεχτεί, απόρριψε

4. Αν απορρίψει, αποδέξου

Προσέξτε ότι η  $S$  είναι διαγνώστης καθώς τερματίζει πάντα (στις γραμμές 3 και 4). Η ορθότητά της προκύπτει παρατηρώντας ότι η TM  $M'$  δεν αποδέχεται καμιά  $\sigma$ /σειρά περιττού μήκους αν και μόνο αν η TM  $M$  δεν αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ .

### Παρατηρήσεις

Αυτό το τελευταίο «δεν» είναι ο λόγος για τον οποίο η  $S$  αντιστρέφει την απάντηση που επιστρέφει ο διαγνώστης  $R$  στις γραμμές 3 και 4. Η εντολή «εγκλωβίσου» στη γραμμή 1 της TM  $M'$  θα μπορούσε να είναι και «απόρριψε». Η εντολή «απόρριψε» στη γραμμή 4 της TM  $M'$  θα μπορούσε να είναι και «εγκλωβίσου».

### Debugging της TM $S$

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  (κωδικοποίηση TM  $M$  και  $\sigma$ /σειράς  $w$ ) τέτοια ώστε η  $M$  να αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  αποδέχεται τη  $\sigma$ /σειρά περιττού μήκους 'brown'. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΟΧΙ (καθώς η TM  $M'$  αποδέχεται μια  $\sigma$ /σειρά περιττού μήκους), και η TM  $S$  επιστρέφει ΝΑΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  απορρίπτει τη  $\sigma$ /σειρά περιττού μήκους 'brown' και εγκλωβίζεται με είσοδο οποιαδήποτε άλλη  $\sigma$ /σειρά. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η TM  $M'$  δεν αποδέχεται καμιά  $\sigma$ /σειρά περιττού μήκους), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Με είσοδο  $\langle M, w \rangle$  τέτοια ώστε η  $M$  να εγκλωβίζεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$ , η TM  $M'$  εγκλωβίζεται με είσοδο οποιαδήποτε  $\sigma$ /σειρά. Η εκτέλεση του διαγνώστη  $R$  στη γραμμή 2 επιστρέφει ΝΑΙ (καθώς η TM  $M'$  δεν αποδέχεται καμιά  $\sigma$ /σειρά περιττού μήκους), και η TM  $S$  επιστρέφει ΟΧΙ.

Άρα, η  $S$  τερματίζει σε κάθε περίπτωση και απαντάει σωστά αν η  $M$  αποδέχεται με είσοδο τη  $\sigma$ /σειρά  $w$  ή όχι. Άρα είναι διαγνώστης της ΑΠΟΔΟΧΗ/TM.