

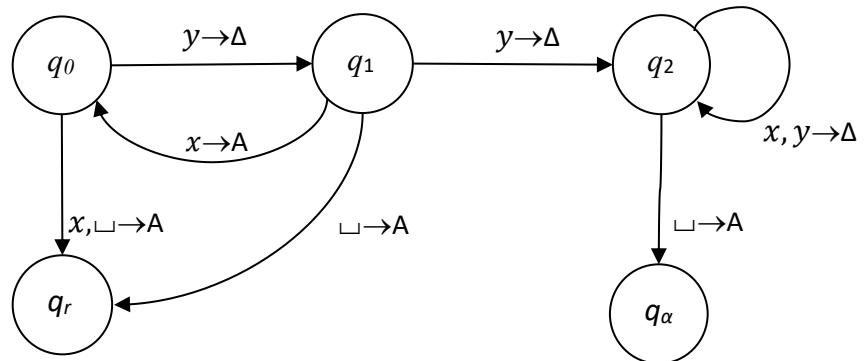
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ»

12/06/2025

Διάρκεια Εξέτασης (2 ώρες και 30 λεπτά)

Όλες οι απαντήσεις θα δοθούν στην κόλλα σας και όχι στα θέματα – Τα θέματα επιστρέφονται

1. (2) Έστω η αιτιοκρατική ΤΜ M όπου $\Sigma = \{x, y\}$ και $\Gamma = \{x, y, \sqcup\}$ με τη διπλανή συνάρτηση μετάβασης. Έστω ότι η αρχική κατάσταση είναι η q_0 , η κατάσταση απόρριψης είναι η q_r και η κατάσταση αποδοχής είναι η q_a . Είναι η M διαγνώσιμη; Ποια είναι η γλώσσα που αναγνωρίζει η M ; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.



2. (2) Να αποδείξετε ότι το πρόβλημα $ANEΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝ = \{\langle G, k \rangle \mid \text{το } G \text{ είναι ακατεύθυντο γράφημα και έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους } k\}$ είναι NP-πλήρες. Ένα ανεξάρτητο σύνολο σε ένα γράφημα είναι ένα σύνολο κορυφών έτσι ώστε κανένα ζευγάρι κορυφών να μην είναι γειτονικές. (Υπόδειξη: μία πιθανή αναγωγή είναι από το πρόβλημα της ΚΛΙΚΑΣ – κλικά μεγέθους k σε ένα γράφημα είναι ένα υπογράφημα με k κορυφές έτσι ώστε να υπάρχουν όλες οι δυνατές ακμές μεταξύ τους.)

3. (2) Να αποδείξετε ότι η γλώσσα $L = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \Sigma^*\}$ είναι μη διαγνώσιμη. Είναι αναγνωρίσιμη ή συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη; (Για την αναγωγή χρησιμοποιείτε τη γλώσσα $ΑΠΟΔΟΧΗ_{TM}$).

4. (2) (α) (1) Έστω μία γλώσσα L της οποίας η μεγαλύτερη συμβολοσειρά που περιέχει έχει μήκος $m > 0$. Αποδείξτε ότι η γλώσσα αυτή είναι διαγνώσιμη (Υπόδειξη: λόγω της ιδιότητας αυτής η γλώσσα L είναι πεπερασμένη).

(β) (1) Να δώσετε όλες σχέσεις γνωρίζετε που έχουν (αν περιέχονται ή είναι ίσες) οι παρακάτω κλάσεις πολυπλοκότητας/υπολογισιμότητας δεδομένου ότι $P \neq NP$: P , Διαγνώσιμες Γλώσσες, $co - P$, NP , $co - NP$, NPC , $co - NPC$, Μη - Διαγνώσιμες Γλώσσες, $TIME(n^3)$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και σχήμα – το πρόθεμα co σημαίνει συμπλήρωμα της κλάσης ενώ NPC είναι η κλάση των NP -πλήρων προβλημάτων)

5. (2) Να αναφέρετε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι Αληθής ή Ψευδής.

Εφαρμόζεται αρνητική βαθμολόγηση σε αυτό το θέμα που μεταφέρεται στον τελικό βαθμό του γραπτού. (Σωστή απάντηση: +0.2, Λάθος απάντηση: -0.1)

- Το αλφάβητο ταινίας Γ μπορεί να συμπίπτει με το αλφάβητο εισόδου Σ .
- Το 2-SAT ανήκει στο P .
- Αν το B είναι NP-πλήρες, $C \in NP$, και $B \leq_P C$, τότε και το C είναι NP-πλήρες.
- Αν $ΚΛΙΚΑ \in P$ τότε και $co-ΚΛΙΚΑ \in P$.
- Αν ένα NP-δυσχερές πρόβλημα λυνόταν σε πολυωνυμικό χρόνο τότε $P=NP$.
- Η θέση των Church-Turing έχει αποδειχτεί.
- Δεν γνωρίζουμε αν η κλάση NP είναι κλειστή ως προς την πράξη του συμπληρώματος.
- Ένα γραμμικώς φραγμένο αυτόματο διαγιγνώσκει ακριβώς τις ίδιες γλώσσες με μία ΤΜ.
- Η κλάση των διαγνώσιμων γλωσσών δεν είναι κλειστή ως προς την πράξη της ένωσης.
- Υπάρχουν αριθμοί υπολογίσιμοι που δεν είναι περιγράψιμοι.

Καλή Επιτυχία!!!

Ενδεικτικές Λύσεις

1. Η TM M δεν είναι διαγνώστης. Αυτό γιατί σε είσοδο yx εγκλωβίζεται μεταξύ των καταστάσεων q_0 και q_1 . Πράγματι με είσοδο yx , μεταβαίνουμε στη διαμόρφωση yq_1x και έπειτα εγκλωβιζόμαστε μεταξύ των διαμορφώσεων q_0yx και yq_1x . Επίσης, με είσοδο την κενή λέξη ή όταν ξεκινά με x απορρίπτεται. Επίσης, απορρίπτεται αν έχουμε ένα y στην αρχή και μετά τουλάχιστον 2 x ή κανένα x . Όταν η είσοδος έχει τουλάχιστον 2 y στην αρχή τότε σε αυτή την περίπτωση αποδέχεται αφού φτάνει στην κατάσταση q_2 . Άρα η γλώσσα της M είναι: $L(M) = yy(y+x)^*$.

2.

Καταρχήν θα πρέπει να δείξουμε ότι το πρόβλημα $ANEΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝ \in NP$. Πράγματι, αν μας δοθεί μία ενδεχόμενη λύση D , τότε ελέγχουμε πρώτα αν $|D|=k$. Αν ναι, τότε ελέγχουμε αν στην λύση που μας δόθηκε δεν υπάρχει ακμή στον γράφο G που να συνδέει οποιεσδήποτε κορυφές στη λύση D . Η διαδικασία αυτή γίνεται προφανώς σε πολυωνυμικό χρόνο (αφήνεται στον αναγνώστη σε πόσο).

Θα πρέπει να δείξουμε ότι το $ANEΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝ$ είναι NP-δυσχερές ανάγοντας την ΚΛΙΚΑ σε αυτό. Έστω στιγμιότυπο του προβλήματος της ΚΛΙΚΑ $\langle G, k \rangle$. Κατασκευάζουμε το συμπληρωματικό γράφημα, έστω G' . Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει κλίκα στο γράφημα G μεγέθους k , αν και μόνο αν υπάρχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k στο G' . Προσοχή ότι η αναγωγή γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο – απλή κατασκευή του συμπληρωματικού γραφήματος.

ΕΥΘΥ: Έστω ότι ο G έχει κλίκα μεγέθους k . Έστω V_k το σύνολο των κορυφών της κλίκας στο G . Τότε το σύνολο V_k στο γράφημα G' είναι ένα σύνολο κόμβων που δεν υπάρχει καμία ακμή μεταξύ τους αφού ο G' είναι ο συμπληρωματικός του G . Άρα το V_k είναι ανεξάρτητο σύνολο για το γράφημα G' .

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ: Έστω ότι το γράφημα G' έχει ανεξάρτητο σύνολο μεγέθους k και έστω ότι το σύνολο κορυφών είναι το V_k . Αυτό σημαίνει ότι καμία δυάδα κόμβων από το V_k δεν συνδέεται μέσω ακμής. Επομένως, το σύνολο κορυφών V_k στο γράφημα G έχει όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ όλων των κόμβων του V_k . Επομένως το σύνολο V_k δημιουργεί μία κλίκα στο γράφημα G μεγέθους k .

Επομένως το $ANEΞΑΡΤΗΤΟ_ΣΥΝ$ είναι NP-πλήρες.

3.

Θα ανάγουμε το πρόβλημα της αποδοχής στο πρόβλημα που εκφράζεται από τη γλώσσα A . Έστω M_A ο διαγνώστης για την A αφού θεωρούμε ότι είναι διαγνώσιμη. Για είσοδο $\langle M, w \rangle$ κατασκευάζουμε μία νέα μηχανή M' :

Η M' σε είσοδο $\langle x \rangle$:

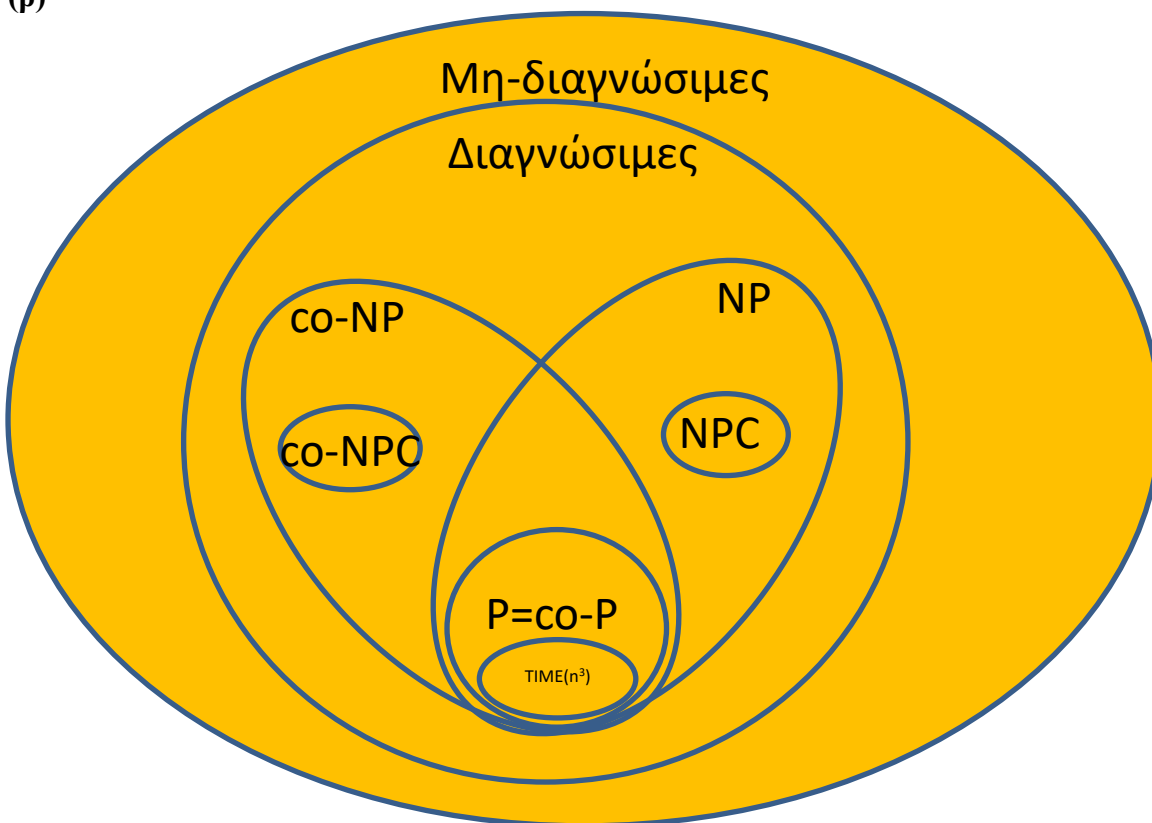
1. Εκτελείται η M σε είσοδο w
 - a. Αν η M αποδέχεται τη w , ΑΠΟΔΟΧΗ
 - b. Αν η M απορρίπτει τη w , ΑΠΟΡΡΙΨΗ

Αν η M_A αποδεχτεί σε είσοδο M' , σημαίνει ότι η M' αποδέχεται όλες τις λέξεις, κάτι που μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν η M αποδέχεται το w . Αν η M_A απορρίπτει σε είσοδο M' , τότε η M' δεν αποδέχεται το Σ^* , και άρα η M είτε θα απέρριψε ή θα εγκλωβίστηκε σε είσοδο w . Επομένως, διαγνώσαμε τη γλώσσα αποδοχής, άτοπο και άρα η μηχανή M_A δεν μπορεί να υπάρχει. Επομένως η γλώσσα A είναι μη-διαγνώσιμη.

Η γλώσσα Λ είναι συμπληρωματικά αναγνωρίσιμη αφού πολύ απλά δοκιμάζουμε όλες τις λέξεις και στην πρώτη που θα απορρίψουμε, αποδεχόμαστε. Κατ' επέκταση η γλώσσα δεν είναι αναγνωρίσιμη.

4. (α) Δεδομένου ότι όλες οι συμβολοσειρές της L είναι φραγμένες ως προς το μήκος τους προκύπτει ότι η γλώσσα αυτή είναι πεπερασμένη. Συγκεκριμένα, για αλφάβητο Σ θα έχει $|\Sigma|^m$ το πολύ συμβολοσειρές μήκους m , το πολύ $|\Sigma|^{m-1}$ συμβολοσειρές μήκους $m-1$, ..., 1 συμβολοσειρά μήκους 0. Το πλήθος τους θα είναι το άθροισμα όλων αυτών των όρων που είναι πεπερασμένος αριθμός. Επομένως θα μπορούσαμε να φτιάξουμε μία ΤΜ που να ελέγχει αν η είσοδος είναι μία εκ των συμβολοσειρών που ανήκουν στο πεπερασμένο σύνολο της γλώσσας L σε πεπερασμένο χρόνο. Άρα η L είναι διαγνώσιμη.

(β)



- 5.
- i. Ψ
 - ii. A
 - iii. A
 - iv. A
 - v. A
 - vi. Ψ
 - vii. A
 - viii. Ψ
 - ix. Ψ
 - x. Ψ