- **Επαγωγικός ορισμός τιμών αλήθειας τύπων**

Ένας τύπος Α΄ τάξης φ ορίζει μια συνάρτηση με ορίσματα

α) ένα μοντέλο M αντίστοιχο στο λεξιλόγιο του φ ,

β) ένα πίνακα L που καταχωρεί, για κάθε μεταβλητή u , ένα στοιχείο a του πεδίου ορισμού U του M -- συμβολικά, L[u] = a .

Αποτέλεσμα της συνάρτησης, είναι η *τιμή αλήθειας της δήλωσης* $\varphi^M(L[u_1], \ldots, L[u_m])$ -- βλέπε τις δηλώσεις αντίστοιχες σε τύπους -- όπου $u_1, \ldots, u_m$ είναι οι ελεύθερες μεταβλητές του φ .

Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\varphi^M(L)$ για την τιμή αλήθειας της δήλωσης $\varphi^M(L[u_1], \ldots, L[u_m])$.

Αρχικές περιπτώσεις   Ο τύπος φ είναι ατομικός:

$\varphi^M(L)$ είναι η τιμή αλήθειας της δήλωσης που προκύπτει αντικαθιστώντας στον φ

(1) κάθε σύμβολο του λεξιλογίου με την αντίστοιχη σχέση / συνάρτηση / σταθερά του M

(2) τις ελεύθερες εμφανίσεις κάθε μίας μεταβλητής u , με το στοιχείο L[u] .

Επαγωγικό βήμα

(i) Ο τύπος φ είναι προτασιακός συνδυασμός των τύπων φ_1, φ_2 :

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L) \text{ and } \varphi_2^M(L)$ $(\varphi_1 \vee \varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L) \text{ or } \varphi_2^M(L)$

$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L) \text{ implies } \varphi_2^M(L)$ $(\neg \varphi_1)^M(L) = \text{not } \varphi_1^M(L)$.

(ii) Ο τύπος φ είναι $(\forall u\, \varphi_1)$ / $(\exists u\, \varphi_1)$:

$(\forall u\, \varphi_1)^M(L) = \text{AND}_{d \in U}\ \varphi_1^M(L\,;\, u \mapsto d)$
$(\exists u\, \varphi_1)^M(L) = \text{OR}_{d \in U}\ \varphi_1^M(L\,;\, u \mapsto d)$

όπου $L\,;\, u \mapsto d$ είναι ένας πίνακας L΄ που περιέχει όλες τις καταχωρήσεις του πίνακα L , με τη μοναδική διαφορά ότι L΄[u] = d .

Ερώτημα 0

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, για τον οποίο $FV(\varphi) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.
Έστω L , K δύο πίνακες όπως παραπάνω, για τους οποίους $L[u_j] = K[u_j]$, j = 1,...,m .
Χρησιμοποιείστε τις αναδρομικές ιδιότητες (i, ii) για να επιβεβαιώσετε ότι: $\varphi^M(L) = \varphi^M(K)$.

Επαγωγικές ιδιότητες των τιμών αλήθειας

Εξετάζοντας τον παραπάνω επαγωγικό ορισμό της δήλωσης $\varphi^M(L)$ -- και χρησιμοποιώντας τον ίδιο συμβολισμό, $\varphi^M(L)$, για την τιμή αλήθειας της -- προκύπτουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(ι) Για κάθε (κατάλληλο) μοντέλο M και πίνακα L ,

$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^M(L) = \varphi_1{}^M(L)$ and $\varphi_2{}^M(L)$

$(\varphi_1 \vee \varphi_2)^M(L) = \varphi_1{}^M(L)$ or $\varphi_2{}^M(L)$

$(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)^M(L) = \varphi_1{}^M(L)$ implies $\varphi_2{}^M(L)$

$(\neg \varphi_1)^M(L) =$ not $\varphi_1{}^M(L)$

(ιι) Για κάθε (κατάλληλο) μοντέλο M και πίνακα L ,

$(\forall u\ \varphi_1)^M(L) = \text{AND}_{d \in U}\ \varphi_1{}^M(L\ ;\ u \mapsto d)$

$(\exists u\ \varphi_1)^M(L) = \text{OR}_{d \in U}\ \varphi_1{}^M(L\ ;\ u \mapsto d)$

- **Ιδιότητες της συνεπαγωγής τύπων Α΄ Τάξης**

1 Προτασιακοί συνδυασμοί

Έστω φ , φ' τύποι Α΄ τάξης για τους οποίους ισχύει $\varphi \models \varphi'$.
Για οποιοδήποτε τύπο θ θα ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

$(\varphi \wedge \theta) \models (\varphi' \wedge \theta)$ $\qquad$ $(\varphi \vee \theta) \models (\varphi' \vee \theta)$

$(\varphi' \to \theta) \models (\varphi \to \theta)$ $\qquad$ $(\theta \to \varphi) \models (\theta \to \varphi')$

$(\neg\varphi') \models (\neg\varphi)$.

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (i) στο Επαγωγικό βήμα του ορισμού της τιμής αλήθειας ενός τύπου Α΄ Τάξης.

2 Ποσοδείκτες

Έστω φ , φ' τύποι Α΄ τάξης για τους οποίους ισχύει $\varphi \models \varphi'$.
Θα ισχύουν οι συνεπαγωγές: $(\exists u\, \varphi) \models (\exists u\, \varphi')$ $\qquad$ $(\forall u\, \varphi) \models (\forall u\, \varphi')$.

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (ii) στο Επαγωγικό βήμα του ορισμού της τιμής αλήθειας ενός τύπου Α΄ Τάξης.

3 Μετακίνηση ποσοδεικτών

(Α) Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$\neg(\exists u\, \varphi) \models\,=\!| (\forall u\, \neg\varphi)$ $\qquad$ $\neg(\forall u\, \varphi) \models\,=\!| (\exists u\, \neg\varphi)$.

(Β) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$\exists u\, (\varphi \wedge \theta) \models\,=\!| (\exists u\, \varphi) \wedge \theta$ $\qquad$ $\exists u\, (\varphi \vee \theta) \models\,=\!| (\exists u\, \varphi) \vee \theta$

$\forall u\, (\varphi \wedge \theta) \models\,=\!| (\forall u\, \varphi) \wedge \theta$ $\qquad$ $\forall u\, (\varphi \vee \theta) \models\,=\!| (\forall u\, \varphi) \vee \theta$

Ερώτημα 1 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές $\forall u\, (\varphi \wedge \theta) \models (\forall u\, \varphi) \wedge \theta$ και $(\exists u\, \varphi) \vee \theta \models \exists u\, (\varphi \vee \theta)$ ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 2 Επιβεβαιώστε ότι: εκείνες από τις συνεπαγωγές (Β) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 1*, είναι δυνατό να μην ισχύουν όταν $u \in FV(\theta)$.

(Γ) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$\exists u\, (\varphi \to \theta) \models\,=\!| (\forall u\, \varphi) \to \theta$ $\qquad$ $\exists u\, (\theta \to \varphi) \models\,=\!| (\theta \to \exists u\, \varphi)$

$\forall u\, (\varphi \to \theta) \models\,=\!| (\exists u\, \varphi) \to \theta$ $\qquad$ $\forall u\, (\theta \to \varphi) \models\,=\!| (\theta \to \forall u\, \varphi)$

Ερώτημα 3 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές $(\forall u\, \varphi) \to \theta \models \exists u\, (\varphi \to \theta)$ και $\theta \to (\exists u\, \varphi) \models \exists u\, (\theta \to \varphi)$ ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 4 Επιβεβαιώστε ότι: εκείνες από τις συνεπαγωγές (Γ) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 3*, είναι δυνατό να μην ισχύουν όταν $u \in FV(\theta)$.

Παραδείγματα

1 Επιβεβαιώστε ότι ο τύπος $\exists x\,(\forall y\,(P(x) \to P(y)))$ είναι έγκυρος.

Από τις **Ιδιότητες 3Γ** $\forall y\,(P(x) \to P(y)) \;|{=}{=}|\; P(x) \to \forall y\,P(y)$ (1)

Από την (1) και τις **Ιδιότητες 2**

$$\exists x\,(\forall y\,(P(x) \to P(y))) \;|{=}{=}|\; \exists x\,(P(x) \to \forall y\,P(y)) \qquad (2)$$

Από την (2) και τις **Ιδιότητες 3Γ**

$$\exists x\,(P(x) \to \forall y\,P(y)) \;|{=}{=}|\; \forall x\,P(x) \to \forall y\,P(y) \qquad (3)$$

Από τις (2) , (3) $\exists x\,(\forall y\,(P(x) \to P(y))) \;|{=}{=}|\; \forall x\,P(x) \to \forall y\,P(y)$

Παρατηρούμε ότι ο ισοδύναμος τύπος $\forall x\,P(x) \to \forall y\,P(y)$ είναι ταυτολογία.

2 Επιβεβαιώστε τη λογική ισοδυναμία $\exists x\,(\neg R(x) \to \forall y\,R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\,R(x)$.

Χρησιμοποιώντας την προτασιακή λογική στον τύπο $\neg R(x) \to \forall y\,R(y)$,

$$\neg R(x) \to \forall y\,R(y) \;|{=}{=}|\; R(x) \vee \forall y\,R(y) \qquad (1)$$

Από την (1) και τις **Ιδιότητες 2**

$$\exists x\,(\neg R(x) \to \forall y\,R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\,(R(x) \vee \forall y\,R(y)) \qquad (2)$$

Από την (2) και τις **Ιδιότητες 3Β**

$$\exists x\,(R(x) \vee \forall y\,R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\,R(x) \vee \forall y\,R(y) \qquad (3)$$

Παρατηρούμε ότι $\forall y\,R(y) \;|{=}\; \exists x\,R(x)$, επομένως

$$\exists x\,R(x) \vee \forall y\,R(y) \;|{=}{=}|\; \exists x\,R(x) \qquad (4)$$

Από τις (2) , (3) , (4) $\exists x\,(\neg R(x) \to \forall y\,R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\,R(x)$