

Κλασσική έννοια αλήθειας – Προτασιακοί τύποι

Αναφορικά με μία τιμοδοσία $υ : \text{ΠροτασιακάΓράμματα} \rightarrow \{T, F\}$, **ορίζουμε:**

- (0) γ αληθής (γ προτασιακό γράμμα) *άν και μόνο αν* $υ(\gamma) = T$
 T αληθής F ψευδής
- (1) $(\phi \wedge \psi)$ αληθής *άν και μόνο αν* ϕ, ψ αληθείς
 $(\phi \wedge \psi)$ ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση
- (2) $(\phi \vee \psi)$ αληθής *άν και μόνο αν* ϕ αληθής είτε ψ αληθής
 $(\phi \vee \psi)$ ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση
- (3) $(\neg \phi)$ αληθής *άν και μόνο αν* ϕ ψευδής
- (4) $(\phi \rightarrow \psi)$ ψευδής *άν και μόνο αν* ϕ αληθής και ψ ψευδής
 $(\phi \rightarrow \psi)$ αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση

Παρατηρήσεις για την κλασσική έννοια

Αναφορικά με μία *ορισμένη* τιμοδοσία, κάθε προτασιακός τύπος θα είναι αληθής *ή* θα είναι ψευδής.

Αν ο τύπος ϕ είναι ψευδής, ο τύπος $(\neg \phi)$ θα είναι αληθής.

Αν ο τύπος $(\neg \phi)$ είναι αληθής, ο τύπος ϕ θα είναι ψευδής.

Ταυτολογίες για την κλασσική έννοια

Ο τύπος $(\phi \vee (\neg \phi))$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $\neg(\phi \wedge (\neg \phi))$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $((\neg \neg \phi) \rightarrow \phi)$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $(\phi \rightarrow (\neg \neg \phi))$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $(\neg(\phi \vee \psi) \rightarrow ((\neg \phi) \wedge (\neg \psi)))$ είναι πάντα αληθής.

Ο τύπος $(\neg(\phi \wedge \psi) \rightarrow ((\neg \phi) \vee (\neg \psi)))$ είναι πάντα αληθής.

«Κατασκευαστική» έννοια αλήθειας – Προτασιακοί τύποι

Αναφορικά με μία μερική συνάρτηση επαληθεύσεων - διαψεύσεων

V : ΠροτασιακάΓράμματα $\rightarrow$ Συμβολοσειρές , **ορίζουμε:**

(0) γ επαληθεύεται *άν* $V(\gamma) =$ μία επαλήθευση του γ (γ προτασιακό γράμμα)

γ διαψεύδεται *άν* $V(\gamma) =$ μία διάψευση του γ

T επαληθεύεται T δεν διαψεύδεται

F διαψεύδεται F δεν επαληθεύεται

Παράδειγμα επαληθεύσεων - διαψεύσεων

ΠροτασιακάΓράμματα είναι τα $\text{halts-}P$ και $\text{loops-}P$, όπου P οποιοδήποτε πρόγραμμα.

Επαλήθευση του $\text{halts-}P$: εκτέλεση του P που τερματίζει

Επαλήθευση του $\text{loops-}P$: υπο-ακολουθία 'while true do' του P

Διάψευση του $\text{halts-}P$: υπο-ακολουθία 'while true do' του P

Διάψευση του $\text{loops-}P$: εκτέλεση του P που τερματίζει

Έστω L το πρόγραμμα $L : x := 0$
 $\text{goto } L$

Δεν υπάρχει επαλήθευση του τύπου $\text{loops-}L$, ούτε διάψευση του τύπου $\text{halts-}L$.

Έστω K το πρόγραμμα $x := 0$

Υπάρχει επαλήθευση του τύπου $\text{halts-}K$, και διάψευση του τύπου $\text{loops-}K$.

Δεν υπάρχει επαλήθευση, ούτε διάψευση, για τον τύπο $(\neg \text{loops-}L)$.

Ορίζουμε:

- (1) $(\phi \wedge \psi)$ επαληθεύεται *άν* ϕ, ψ επαληθεύονται
 $(\phi \wedge \psi)$ διαψεύδεται *άν* ϕ διαψεύδεται *είτε* ψ διαψεύδεται
- (2) $(\phi \vee \psi)$ επαληθεύεται *άν* ϕ επαληθεύεται *είτε* ψ επαληθεύεται
 $(\phi \vee \psi)$ διαψεύδεται *άν* ϕ, ψ διαψεύδονται
- (3) $(\neg \phi)$ διαψεύδεται *άν* ϕ επαληθεύεται
 $(\neg \phi)$ επαληθεύεται *άν* *υπάρχει αποδεικτική μέθοδος* A *ώστε*
για κάθε επαλήθευση ε του ϕ , $A(\varepsilon)$ είναι F (αντίφαση)
- (4) $(\phi \rightarrow \psi)$ διαψεύδεται *άν* ϕ επαληθεύεται, ψ διαψεύδεται
 $(\phi \rightarrow \psi)$ επαληθεύεται *άν* *υπάρχει αποδεικτική μέθοδος* A *ώστε*:
για κάθε επαλήθευση ε του ϕ , $A(\varepsilon)$ να είναι επαλήθευση του ψ

Παρατηρήσεις για την «κατασκευαστική» έννοια

Αναφορικά με *μιά* ορισμένη μερική συνάρτηση επαληθεύσεων-διαψεύσεων:

Δεν υπάρχει τύπος που να επαληθεύεται *και* να διαψεύδεται,

Μπορεί να υπάρχει τύπος που να *μην* επαληθεύεται *ούτε* να διαψεύδεται.

Δεν υπάρχει επαλήθευση, ούτε διάψευση, για τους τύπους $\text{halts-}\Lambda$, $\text{loops-}\Lambda$.

Δεν υπάρχει επαλήθευση, ούτε διάψευση, για τον τύπο $(\neg \text{loops-}\Lambda)$.

Όταν ο τύπος ϕ διαψεύδεται, ο τύπος $(\neg \phi)$ πάντα θα επαληθεύεται.

Όταν ένας τύπος $(\neg \phi)$ επαληθεύεται, ο τύπος ϕ μπορεί και να μην διαψεύδεται.

Ο τύπος $(\neg \text{halts-}\Lambda)$ επαληθεύεται, αλλά ο τύπος $\text{halts-}\Lambda$ δεν διαψεύδεται.

Ταυτολογίες για την «κατασκευαστική» έννοια

Ένας τύπος $(\phi \vee (\neg\phi))$ δεν επαληθεύεται πάντα.

Ο τύπος $(\text{loops-}\Lambda \vee (\neg \text{loops-}\Lambda))$ δεν επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\neg(\phi \wedge (\neg\phi)))$ πάντα επαληθεύεται.

Ένας τύπος $((\neg\neg\phi) \rightarrow \phi)$ δεν επαληθεύεται πάντα.

Ο τύπος $((\neg\neg \text{loops-}\Lambda) \rightarrow \text{loops-}\Lambda)$ δεν επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\phi \rightarrow (\neg\neg\phi))$ πάντα επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\neg(\phi \wedge \psi) \rightarrow ((\neg\phi) \vee (\neg\psi)))$ δεν επαληθεύεται πάντα.

Ο τύπος $(\neg(\text{loops-}\Lambda \wedge (\neg \text{loops-}\Lambda)) \rightarrow ((\neg \text{loops-}\Lambda) \vee (\neg\neg \text{loops-}\Lambda)))$ δεν επαληθεύεται.

Ο τύπος $(\neg(\phi \vee \psi) \rightarrow ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi)))$ πάντα επαληθεύεται.