Απαγωγή σε άτοπο

proof-by-contradiction

$$\frac{[\quad \neg \phi \quad \ldots \quad F \quad]}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα proof - by - contradiction</u>

Για οποιοδήποτε τύπο φ για τον οποίο αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma\ ,\ \neg\phi \ \ |= \ F$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \ \ |= \ \phi$

not not – elimination

$$\frac{\neg \neg \phi}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα not not – elimination</u>

Για οποιοδήποτε τύπο φ για τον οποίο αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \ |= \ \neg\neg\phi$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \ \ |= \ \phi$

law-of-excluded-middle

$$\frac{}{\phi \vee (\neg \phi)}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα law-of-excluded-middle</u>

Για οποιοδήποτε τύπο φ , όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\Sigma \ \ |= \ \phi \vee (\neg \phi)$

Απαγωγικοί κανόνες για το $\vee$

or - introduction

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

<u>*Ορθότητα* των κανόνων or - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , αληθεύουν οι συνεπαγωγές

$$\phi \;|\!=\; \phi \vee \psi \qquad\qquad \psi \;|\!=\; \phi \vee \psi$$

or - elimination

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad [\;\phi\;\;\ldots\;\;\chi\;] \qquad [\;\psi\;\;\ldots\;\;\chi\;]}{\chi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα or - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , χ για τους οποίους αληθεύουν οι συνεπαγωγές

$$\Sigma \;|\!=\; \phi \vee \psi \qquad \Sigma\,,\ \phi \;|\!=\; \chi \qquad \Sigma\,,\ \psi \;|\!=\; \chi$$

όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων: θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \;|\!=\; \chi$

<u>Ορθότητα των φυσικών αποδείξεων (natural deductions)</u>

Άν υπάρχει μία τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \;|\!-\; \psi$:
θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \;|\!=\; \psi$.

Η απόδειξη είναι στις σημειώσεις ‘Check-blocks’

<u>Πληρότητα των φυσικών αποδείξεων (natural deductions)</u>

Άν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \;|\!=\; \psi$:
θα υπάρχει μία τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \;|\!-\; \psi$.

Η απόδειξη είναι στο βιβλίο των Huth-Ryan, υπο-ενότητα 1.4.4

1 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* $p \vee q \ \vdash \ q \vee p$

1	$p \vee q$		υπόθεση		
2	[p		υπόθεση	$1 \models 2$?	ΟΧΙ
3	$\mathbf{q \vee p}$]	2 ,	or – introduction	$2 \models 3$	
4	[q		υπόθεση	$1 \models 4$?	ΟΧΙ
5	$\mathbf{q \vee p}$]	4 ,	or – introduction	$4 \models 5$	$[\equiv 3]$
6	$\mathbf{q \vee p}$	1 , { 2 , 3 } , { 4 , 5 } ,	or – elimination	$(2 \text{ or } 4) \equiv 1 \models 6$	$[\equiv 5 \equiv 3]$

2 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* $s \vee (p \vee q) \ \vdash \ (q \vee s) \vee p$

1	$s \vee (p \vee q)$		υπόθεση	
2	{ s		υπόθεση	
3	$q \vee s$	2 ,	or – introduction	$2 \models 3$
4	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ }	3 ,	or – introduction	$3 \models 4$
				$2 \models 4$
5	{ $(p \vee q)$		υπόθεση	
6	**[** p		υπόθεση	
7	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ **]**	6 ,	or – introduction	$6 \models 7$
8	**[** q		υπόθεση	
9	$q \vee s$	8 ,	or – introduction	$8 \models 9$
10	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ **]**	9 ,	or – introduction	$9 \models 10$
				$8 \models 10$ $[\equiv 7]$
11	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ }	5 , { 6 , 7 } , { 8 , ... 10 } ,	or – elimination	
				$(6 \text{ or } 8) \equiv 5 \models 11$ $[\equiv 10 \equiv 7]$
12	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$	1 , { 2 , ... 4 } , { 5 , ... 11 } ,	or – elimination	
				$(2 \text{ or } 5) \equiv 1 \models 12$ $[\equiv 11 \equiv 4]$

3 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $p \to q \ \vdash \ q \lor (\neg p)$

1		$p \to q$		υπόθεση	
2		$p \lor (\neg p)$		law-of-excluded-middle	
3	[	p		υπόθεση	
4		q	1 , 3 ,	implies – elimination	1 , 3 $\models$ 4
5		$q \lor (\neg p)$]	4 ,	or – introduction	4 $\models$ 5
					1 , 3 $\models$ 5
6	[	$\neg p$		υπόθεση	
7		$q \lor (\neg p)$]		6 , or – introduction	6 $\models$ 7
					1 , 6 $\models$ 7
8		$q \lor (\neg p)$	2 , { 3 , ... 5 } , { 6 , 7 } ,	or – elimination	
					1 , (3 or 6) $\equiv$ 2 $\models$ 8
					1 $\models$ 8

4 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* $(p \lor q)$, $(\neg p) \lor (\neg q)$ $\vdash$ $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$

1	$(p \lor q)$	υπόθεση
2	$(\neg p) \lor (\neg q)$	υπόθεση
3	{ p	υπόθεση
4	[$\neg p$	υπόθεση
5		
6	$(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
7	[$\neg q$	υπόθεση
7α		
7β		
8	$(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
9	$(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$ }	**2** , { 4 , ... 6 } , { 7 , ... 8 } , or – elimination **2** , **3** $\models$ 9
10	{ q	υπόθεση
11	[$\neg p$	υπόθεση
11α		
11β		
12	$(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
13	[$\neg q$	υπόθεση
14		
15	$(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
16	$(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$ }	**2** , { 11 , 12 } , { 13 , ... 15 } , or – elimination **2** , **10** $\models$ 16
17	$(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$	**1** , { 3 , ... 9 } , { 10 , ... 16 } $\models$ 17 **1** , **2** $\models$ 17