Απαγωγικοί κανόνες (deduction rules) για το $\wedge$

and - introduction

$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα and - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi , \psi \models \phi \wedge \psi$

and - elimination 1

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα and - elimination 1</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \wedge \psi \models \phi$

and - elimination 2

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα and - elimination 2</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους φ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \wedge \psi \models \psi$

Απαγωγικοί κανόνες για το $\rightarrow$

implies - elimination

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \qquad \phi}{\psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα implies - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi \rightarrow \psi \ , \ \phi \ \models \ \psi$

implies - introduction

$$\frac{[\quad \phi \quad \ldots \quad \psi \quad]}{\phi \rightarrow \psi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα implies - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , για τους οποίους αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \ , \ \phi \ \models \ \psi$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \ \models \ \phi \rightarrow \psi$

Απαγωγικός κανόνας για το F

F - elimination

$$\frac{F}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα F - elimination</u>

Για οποιοδήποτε τύπο ϕ , αληθεύει η συνεπαγωγή $F \ \models \ \phi$

Απαγωγικοί κανόνες για το $\neg$

not - elimination

$$\frac{\neg\phi \qquad \phi}{F}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα not - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , αληθεύει η συνεπαγωγή $\neg\phi \; , \; \phi \; \models \; F$

not - introduction

$$\frac{[\quad \phi \quad ... \quad F \quad]}{\neg\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα not - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , για τους οποίους αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \; , \; \phi \; \models \; F$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \; \models \; \neg\phi$

Θεώρημα Ορθότητας των τυπικών αποδείξεων

Άν κάθε απαγωγικός κανόνας είναι ορθός, και υπάρχει μία τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$: θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$.

Πόρισμα Άν δεν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$, δεν μπορεί να υπάρξει τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$ (όπου να χρησιμοποιούνται μόνο ορθοί απαγωγικοί κανόνες).

1 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* $p \to (s \wedge q) \vdash p \to q$

1	$p \to (s \wedge q)$		υπόθεση		
2	[p		*υπόθεση*	$1 \models 2$?	**ΟΧΙ**
3	$s \wedge q$	1 , 2	implies – elimination	$1 , 2 \models 3$	ΝΑΙ
4	q]	3	and - elimination 2	$1 , 2 \models 4$	ΝΑΙ
				$1 \models 4$?	**ΟΧΙ**
5	$p \to q$	{ 2 , 3 , 4 }	implies – introduction	$1 \models (2 \to 4) \equiv 5$	

2 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* $p \to s ,\ p \to (\neg s) \vdash \neg p$

1	$p \to s$		υπόθεση		
2	$p \to (\neg s)$		υπόθεση		
3	[p		*υπόθεση*	$1 , 2 \models 3$?	**ΟΧΙ**
4	s	1 , 3	implies – elimination	$1 , 3 \models 4$	
5	$\neg s$	2 , 3	implies – elimination	$2 , 3 \models 5$	
6	F]	4 , 5	not – elimination	$1, 2 , 3 \models 6$	
7	$\neg p$	{ 3 , ... 6 }	not – introduction	$1, 2 \models (\neg 3) \equiv 7$	

3 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* $(s \wedge p) \to q \vdash s \to (p \to q)$

1	$(s \wedge p) \to q$		υπόθεση		
2	{ s		*υπόθεση*		
3	[p		*υπόθεση*		
4	$s \wedge p$	3 , 2	and - introduction	$1 , 2 , 3 \models 4$	
5	q]	1 , 4	implies – elimination	$1 , 2 , 3 \models 5$	
				$1 , 2 \models 5$?	**ΟΧΙ**
6	$p \to q$ }	{ 3 , 4 , 5}	implies – introduction	$1 , 2 \models (3 \to 5) \equiv 6$	
				$1 \models 6$?	**ΟΧΙ**
7	$s \to (p \to q)$	{ 2 , ... 6 }	implies – introduction	$1 \models (2 \to 6) \equiv 7$	

4 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* $p \to q \;\; |- \;\; (\neg q) \to (\neg p)$

1	$p \to q$		υπόθεση	
2	{ $\neg q$		*υπόθεση*	
3	**[** p		*υπόθεση*	
4	q	1 , 3	implies – elimination	1 , 3 |= 4
5	F **]**	2 , 4	not – elimination	1 , 2 , 3 |= 5
6	$\neg p$ }	{ 3 , 4 , 5}	not – introduction	1 , 2 |= ($\neg$ 3) $\equiv$ 6
7	$(\neg q) \to (\neg p)$	{ 2 , ... 6 }	implies – introduction	1 |= (2 $\to$ 6) $\equiv$ 7

Αναδρομική αναζήτηση τυπικής απόδειξης για το $p \to q \;\; |- \;\; (\neg q) \to (\neg p)$

1 $p \to q$ υπόθεση *0*

{

2 $\neg q$ *υπόθεση 1*

[

3 p *υπόθεση 2*

κανόνες elimination στους τύπους 1 , 2 , 3 :

4 q 1 , 3 implies – elimination

5 F 2 , 4 not – elimination

6 **F** ΣΤΟΧΟΣ 2 copy 5

]

7 $\boldsymbol{\neg p}$ ΣΤΟΧΟΣ 1 { 3 , ... 6 } not – introduction

}

8 $\boldsymbol{(\neg q) \to (\neg p)}$ ΣΤΟΧΟΣ 0 { 2 , ... 7 } implies – introduction

Αναζήτηση τυπικής απόδειξης (proof search)

Input specification sequent $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$

όπου εμφανίζονται προτασιακά γράμματα, τα $\wedge , \rightarrow , \neg$, και το F

Output specification

Άν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:

Επιστρέφεται μια τυπική απόδειξη του $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \vdash \psi$,

με τους κανόνες για τα $\wedge , \rightarrow , \neg$, και το F

Άν δεν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi$:

Επιστρέφεται 'ERROR'

Ιδιότητες της συνεπαγωγής τύπων με $\wedge , \rightarrow , \neg$, και το F

1α Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1 \wedge \psi2$ αληθεύει *άν και μόνο άν* αληθεύουν οι συνεπαγωγές

$\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1$

$\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi2$

1β Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \psi1 \rightarrow \psi2$ αληθεύει *άν και μόνο άν* αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n , \psi1 \models \psi2$

1γ Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \neg\psi1$ αληθεύει *άν και μόνο άν* αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n , \psi1 \models F$

2 Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models \gamma$, όπου γ ένα προτασιακό γράμμα, αληθεύει ***άν*** το γράμμα γ είτε το F προκύπτει από τους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$ μέσω κανόνων elimination.

Η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \models F$, αληθεύει ***άν*** το F προκύπτει από τους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$ μέσω κανόνων elimination.

Το αντίστροφο του 2 δεν αληθεύει γενικά

Αλγόριθμος Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \mid\!- \psi$ **)**

i ψ είναι $\psi_1 \wedge \psi_2$:

Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \mid\!- \psi_1$ **)** , **Proof-Search(** $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n \mid\!- \psi_2$ **)**

If κάποιο από τα δύο έδωσε 'ERROR'

then return 'ERROR'

else εφάρμοσε and - introduction
στις τελευταίες γραμμές των δύο αποδείξεων

ii ψ είναι $\psi_1 \to \psi_2$:

Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n , \psi_1 \mid\!- \psi_2$ **)**

If έδωσε 'ERROR'

then return 'ERROR'

else εφάρμοσε implies - introduction στην υπο-ακολουθία της απόδειξης
από τη γραμμή ψ_1 μέχρι και τη γραμμή ψ_2

iii ψ είναι $\neg\psi_1$:

Proof-Search($\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n , \psi_1 \mid\!- F$ **)**

If έδωσε 'ERROR'

then return 'ERROR'

else εφάρμοσε not - introduction στην υπο-ακολουθία της απόδειξης
από τη γραμμή ψ_1 μέχρι και τη γραμμή F

iv ψ είναι F :

Εφάρμοσε επαναληπτικά τους κανόνες elimination
στους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$
άν προκύψει το F : **stop** (η απόδειξη ολοκληρώθηκε)
αλλοιώς, άν δεν υπάρχει *νέα* εφαρμογή των κανόνων: **return** 'ERROR'

ψ είναι το προτασιακό γράμμα γ :

Εφάρμοσε επαναληπτικά τους κανόνες elimination
στους τύπους $\phi_1 , \phi_2 \dots , \phi_n$

άν προκύψει το F : εφάρμοσε F – elimination
άν προκύψει το γ : **stop** (η απόδειξη ολοκληρώθηκε)
αλλοιώς, άν δεν υπάρχει *νέα* εφαρμογή των κανόνων: **return** 'ERROR'

5 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* p |– ¬(¬p)

1 p	υπόθεση *0*		
2 [¬p	*υπόθεση 1*		
κανόνες elimination στους τύπους 1 , 2 :			
3 **F**]	ΣΤΟΧΟΣ 1	1 , 2	not – elimination
4 **¬(¬p)**	ΣΤΟΧΟΣ 0	{ 2 , 3 }	not – introduction

6 *Να αποδειχτεί τυπικά ότι* ¬(¬(¬p)) |– ¬p

1 ¬(¬(¬p))	υπόθεση *0*	
2 **[** p	*υπόθεση 1*	
. . .		
2z **¬(¬p)**	*αποδεικνύεται* αντιγράφοντας, μετά την γραμμή 2 του ***6***, τις γραμμές 2 , 3 του ***5***	
3 **F]**	1 , 2z	not – elimination
4 **¬p**	{ 2 ... 3 }	not – introduction

A *Ο αλγόριθμος* **Proof-Search** *δεν είναι πλήρης για τις τυπικές αποδείξεις με τους κανόνες για το* $\neg$:

Ο **Proof-Search** *δεν βρίσκει* την τυπική απόδειξη
για το $\neg(\neg(\neg p)) \ \vdash \ \neg p$:

1	$\neg(\neg(\neg p))$	υπόθεση *0*
2	**[** p	*υπόθεση 1*
2z	$\neg(\neg p)$	ΣΤΟΧΟΣ 2z ***για να συνδυαστεί μέσω not – elimination με την 1*** Ο Στόχος 2z *μπορεί να αποδειχτεί* από την γραμμή 2
3	**F]**	ΣΤΟΧΟΣ 1 Ο Στόχος 1 *δεν αποδεικνύεται από τους τύπους* 1 , 2 *με κανόνες* elimination *μόνο* Ο Στόχος 1 *αποδεικνύεται από τους τύπους* 1 , 2 , 2z *με κανόνες* elimination *μόνο*
4	$\neg p$	ΣΤΟΧΟΣ 0

B ***Οι κανόνες*** *δεν είναι πλήρεις για την συνεπαγωγή τύπων με το* $\neg$ είτε με το $\rightarrow$:

Δεν υπάρχει τυπική απόδειξη για το $\neg(\neg p) \vdash p$, ή για το $(p\rightarrow q)\rightarrow p \ \vdash \ p$,
με τους κανόνες για τα $\wedge$, F , $\neg$, $\rightarrow$, .