Παραδείγματα δηλώσεων

Εξετάζοντας τις δηλώσεις που αντιστοιχούν σε ορισμένους τύπους Α΄ τάξης, βρίσκουμε ποιές ιδιότητες εκφράζουν. Κάθε ιδιότητα αναφέρεται σε ένα μοντέλο M και στοιχεία a , b , b', c του πεδίου ορισμού του M – το a αντικαθιστά τη μεταβλητή x , το b την y , το b' την y' και το c την z .

1 Έστω ψ_1 ο τύπος $(\neg(x = y) \wedge \neg(x = z)) \wedge \neg(y = z)$.
Η δήλωση $\psi_1^M(a, b, c)$ ισχύει για το μοντέλο M και τα στοιχεία a , b , c , αν και μόνο αν:
τα a , b , c είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Έστω ψ ο τύπος $\exists x (\exists y (\exists z \ \psi_1))$. Η δήλωση ψ^M ισχύει για το μοντέλο M ,
αν και μόνο αν: το πεδίο ορισμού του M περιέχει τουλάχιστον τρία στοιχεία.

Έστω φ ο τύπος $\forall x (\forall y (x = y))$.
Η δήλωση φ^M ισχύει για το μοντέλο M , αν και μόνο αν:
το πεδίο ορισμού του M περιέχει μόνο ένα στοιχείο.

Έστω φ_0 ο τύπος $\neg(\exists x (\exists y \neg(x = y)))$.
Η δήλωση φ_0^M έχει την ίδια τιμή αλήθειας με τη δήλωση φ^M , *για οποιοδήποτε μοντέλο* M.

Ερώτημα 1 Βρείτε τύπους που οι αντίστοιχές τους δηλώσεις έχουν την ίδια τιμή αλήθειας με την παραπάνω δήλωση ψ^M , *για οποιοδήποτε μοντέλο* M .

2 Ένα μοντέλο M, με πεδίο ορισμού U και με μία διμερή σχέση ρ, μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (U , P)$, όπου: υπάρχει ακμή από την κορυφή u στην κορυφή v , αν και μόνο αν $\rho(u, v) = true$.

Έστω φ_1 ο τύπος $\exists y\, R(x, y)$. Η δήλωση $\varphi_1^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν: στο γράφημα G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό τουλάχιστον 1.

Έστω φ_2 ο τύπος $\exists y\, (\exists y'\, ((R(x, y) \wedge R(x, y')) \wedge \neg(y = y')))$. Η δήλωση $\varphi_2^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν: στο γράφημα G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό τουλάχιστον 2.

Έστω φ_3 ο τύπος $\forall y\, (\forall y'\, (\neg R(x, y) \vee \neg R(x, y') \vee (y = y')))$. [1]
Η δήλωση $\varphi_3^M(a)$ έχει την αντίθετη τιμή αληθειας από τη δήλωση $\varphi_2^M(a)$, *για κάθε μοντέλο* M *και για οποιοδήποτε στοιχείο* a .
Επομένως, η δήλωση $\varphi_3^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν: στο γράφημα G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό το πολύ 1.

Ερώτημα 2 Έστω φ_4 ο τύπος $\forall y\, (\forall y'\, ((R(x, y) \wedge R(x, y')) \rightarrow (y = y')))$. Επιβεβαιώστε ότι η δήλωση $\varphi_4^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν: στο γράφημα G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό το πολύ 1.

[1] Αποδίδουμε στο σύμβολο $\neg$ προτεραιότητα έναντι των $\vee, \wedge$.

3 Έστω ψ_1 ο τύπος $\neg(\exists z\ (R(x,\ z) \wedge (\neg(z = y) \wedge \neg(z = y'))))$.
Η δήλωση $\psi_1{}^M(a, b, b')$ ισχύει αν και μόνο αν:
στο γράφημα G η κορυφή a δεν έχει ακμή προς κορυφή διαφορετική από τις b, b΄.

Οι τύποι $\forall z\ (\neg R(x,\ z) \vee ((z = y) \vee (z = y')))$ και $\forall z\ (R(x,\ z) \rightarrow ((z = y) \vee (z = y')))$
αντιστοιχούν σε δηλώσεις που έχουν την ίδια τιμή αλήθειας με τη δήλωση $\psi_1{}^M(a, b, b')$,
για οποιοδήποτε μοντέλο M *και οποιαδήποτε στοιχεία* a , b , b΄.

Έστω ψ ο τύπος $\exists y\ (\exists y'\ \psi_1)$. Η δήλωση $\psi^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν:
στο γράφημα G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό το πολύ 2.

Ερώτημα 3 Βρείτε ένα τύπο θ_1 , με ελεύθερες μεταβλητές x , y , έτσι ώστε
η δήλωση $\theta_1{}^M(a, b)$ να ισχύει αν και μόνο αν: στο γράφημα G η κορυφή a
δεν έχει ακμή προς κορυφή διαφορετική από την b .

Ερώτημα 4 Έστω θ ο τύπος $\exists y\ (\forall z\ (R(x,\ z) \rightarrow (z = y)))$. Επιβεβαιώστε ότι
η δήλωση $\theta^M(a)$ ισχύει αν και μόνο αν: στο γράφημα G η κορυφή a έχει έξω-βαθμό
το πολύ 1.

Παραδείγματα συνεπαγωγών

1 Έστω φ ο τύπος $\forall x\, (\forall y\, (R(x, y) \wedge R(y, x)))$

και ψ ο τύπος $\forall x\, (\forall y\, (R(x, y) \rightarrow R(y, x)))$.

Επιβεβαιώνουμε ότι $\varphi \models \psi$:

Έστω M ένα μοντέλο -- με πεδίο ορισμού U και με μία διμερή σχέση ρ -- όπου φ^M = *true* .
Για οποιαδήποτε στοιχεία a, b του U , θα είναι ρ(a, b) = *true* και ρ(b, a) = *true* .
Άρα θα είναι και (ρ(a, b) implies ρ(b, a)) = *true* , για οποιαδήποτε a, b στο U . Άρα ψ^M = *true* .

Επιβεβαιώνουμε ότι $\psi \not\models \varphi$:

Έστω M το μοντέλο με πεδίο ορισμού U = {1, 2} και με διμερή σχέση ρ , όπου:
ρ(a, b) = *true* αν και μόνο αν (a, b) = (1, 2) είτε (a, b) = (2, 1) .
Εξετάζοντας τις δυνατές περιπτώσεις, βλέπουμε ότι: για οποιαδήποτε a , b στο U θα είναι
(ρ(a, b) implies ρ(b, a)) = *true* . Άρα ψ^M = *true* .
Όμως, για (a, b) = (1, 1) είτε (a, b) = (2, 2) θα είναι (ρ(a, b) and ρ(b, a)) = *false* .
Άρα φ^M = *false* .

Ερώτημα 5 Έστω φ ο τύπος $(R(x, y) \wedge R(y, x))$ και ψ ο τύπος $(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$.
Επιβεβαιώστε ότι $\varphi \models \psi$ και ότι $\psi \not\models \varphi$.

Ερώτημα 6 Έστω θ ο τύπος $\exists w\, (\forall z\, (S(z) \rightarrow (z = w)))$.
Έστω θ΄ ο τύπος $\forall y\, (\forall y'\, ((S(y) \wedge S(y')) \rightarrow (y = y')))$.
Επιβεβαιώστε ότι $\theta \models\, \mathrel{=}\!| \; \theta'$.

2 Έστω Δ ένα σύμβολο σχέσης με τρία ορίσματα, και M ένα μοντέλο με μία τριμερή σχέση δ , την οποία παριστάνουμε ως ένα πίνακα T με στήλες NAME , ADDR , ID : μία 3-άδα (n, a, i) θα περιέχεται στον πίνακα T αν και μόνο αν $\delta(n, a, i) = \mathit{true}$.

Από τον πίνακα T κατασκευάζουμε ένα πίνακα T_1 με στήλες NAME , ADDR , παραλείποντας τη στήλη ID.

Έστω θ_1 ο τύπος $\exists z\, \Delta(x, y, z)$, έστω ότι το στοιχείο n αντικαθιστά τη μεταβλητή x και το a την y .
Η δήλωση $\theta_1{}^M(n, a)$ ισχύει, αν και μόνο αν η 2-άδα (n, a) περιέχεται στον πίνακα T_1 .

Από τον πίνακα T κατασκευάζουμε επίσης ένα πίνακα T_2 με στήλες ADDR , ID , παραλείποντας τη στήλη NAME.

Έστω θ_2 ο τύπος $\exists x\, \Delta(x, y, z)$, έστω ότι το στοιχείο i αντικαθιστά τη μεταβλητή z .
Η δήλωση $\theta_2{}^M(a, i)$ ισχύει, αν και μόνο αν η 2-άδα (a, i) περιέχεται στον πίνακα T_2 .

Ο πίνακας $\mathit{join}(T_1 , T_2)$ αποτελείται από τις 3-άδες (n, a, i) , για τις οποίες $(n, a) \in T_1$ και $(a, i) \in T_2$.

Έστω θ ο τύπος $\theta_1 \wedge \theta_2$. Η δήλωση $\theta^M(n, a, i)$ ισχύει, αν και μόνο αν η 3-άδα (n, a, i) περιέχεται στον πίνακα $\mathit{join}(T_1, T_2)$.

Ερώτημα 7 Επιβεβαιώστε ότι $\Delta(x, y, z) \models \theta_1 \wedge \theta_2$. Συμπεράνετε ότι $T \subseteq \mathit{join}(T_1 , T_2)$.

Ερώτημα 8 Επιβεβαιώστε ότι $\not\models (\theta_1 \wedge \theta_2) \rightarrow \Delta(x, y, z)$.
Συμπεράνετε ότι υπάρχει πίνακας T , για τον οποίο $\mathit{join}(T_1 , T_2) \not\subset T$.

Έστω φ ο τύπος $\forall x\, \forall y\, \forall z\, \forall x'\, \forall z'\, ((\Delta(x, y, z) \wedge \Delta(x', y, z')) \rightarrow (x = x'))$.
Η δήλωση φ^M ισχύει, αν και μόνο αν η στήλη ADDR του πίνακα T είναι *κλειδί* για τη στήλη NAME .

Ερώτημα 9 Επιβεβαιώστε ότι $\varphi \models (\theta_1 \wedge \theta_2) \rightarrow \Delta(x, y, z)$.