τύπος $\forall y\ R(y , x)$: « για κάθε y αληθεύει ότι $R(y , x)$ » **(1)**

αντίστοιχη δήλωση: $\text{AND}_{d\in U}\ \rho(d , a)$ **(2)**

εφαρμογή της **(2)** για $d = h$: $\rho(h , a)$

εφαρμογή της (1) για $y =$ **?** : « αληθεύει ότι R(**?** , x) »

R(**?** , x)

R(**?** , x) θα προκύψει με ***συντακτική αντικατάσταση*** *της* y με *παράσταση* t

η τιμή *της* t θα ανήκει στο πεδίο ορισμού U

Συντακτική αντικατάσταση (substitution) μεταβλητής με παράσταση

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, t μία παράσταση, u μία μεταβλητή.

Συμβολίζουμε με φ[t / u] , τον τύπο που προκύπτει ***μεταγράφοντας***

κάθε ελεύθερη εμφάνιση της μεταβλητής u στον τύπο φ ,

με την παράσταση t .

Παραδείγματα συντακτικής αντικατάστασης

$(\forall z\ R(z , x))\ [\, t / z\,]$ θα είναι ο τύπος $(\forall z\ R(z , x))$, για οποιαδήποτε παράσταση t

$(\exists z\ R(z , y))\ [\, y / y\,]$ είναι ο τύπος $(\exists z\ R(z , y))$

$(\ \forall z\ (\ S(\mathbf{x} , z , \mathbf{x}) \rightarrow \exists x\ S(x , z , x)\ )\ )\ [\, f(x , z) / \mathbf{x}\,]$

είναι ο τύπος $\forall \mathbf{z}\ (\ S(\ \mathbf{f(x , z)} , z , \mathbf{f(x , z)}\ ) \rightarrow \exists x\ S(x , z, x)\ )$

$(\ \forall z\ (\ S(\mathbf{x} , z , \mathbf{x}) \rightarrow \exists x\ S(x , z , x))\ )\ )\ [\, f(x , y) / \mathbf{x}\,]$

είναι ο τύπος $\forall z\ (\ S(\ \mathbf{f(x, y)} , z , \mathbf{f(x, y)}\ ) \rightarrow (\exists x\ S(x, z, x))\ )\ )$

Παραδείγματα

$(S(\mathbf{x}, z, \mathbf{x}) \rightarrow \exists x\ S(x, z, x))\ [f(x, y) / \mathbf{x}]$

είναι ο τύπος $S(\mathbf{x}, z, \mathbf{x}) [f(x, y) / \mathbf{x}] \rightarrow (\exists x\ S(x, z, x)) [f(x, y) / \mathbf{x}])$

$(\exists \mathbf{x}\ S(x, z, x)) [f(x, y) / \mathbf{x}]$

είναι ο τύπος $\exists x\ S(x, z, x)$

$(\exists x\ S(x, \mathbf{z}, x)) [f(x, y) / \mathbf{z}]$

είναι ο τύπος $\exists x\ (S(x, \mathbf{z}, x) [f(x, y) / \mathbf{z}])$

Επαγωγικός ορισμός της συντακτικής αντικατάστασης

$\theta [t / u]$, όπου θ *ατομικός* τύπος:

προκύπτει μεταγράφοντας *κάθε εμφάνιση* της μεταβλητής u στον θ, με την παράσταση t.

$(\phi \wedge \psi)\ [t / u]$ *είναι ο τύπος* $\phi[t / u] \wedge \psi[t / u]$

$(\phi \vee \psi)\ [t / u]$ *είναι ο τύπος* $\phi[t / u] \vee \psi[t / u]$

$(\neg\phi)\ [t / u]$ *είναι ο τύπος* $\neg (\phi[t / u])$

$(\forall w\ \phi) [t / u]$ *είναι ο τύπος*

$\forall w\ (\phi[t / u])$ όταν η u εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall w\ \phi$

$\forall w\ \phi$ όταν η u *δεν* εμφανίζεται ελεύθερη στον $\forall w\ \phi$

Ιδιότητες

$\phi[t / u]$ θα είναι ο τύπος ϕ, όταν η u *δεν εμφανίζεται ελεύθερη* στον ϕ

$\phi[u / u]$ θα είναι ο τύπος ϕ, για οποιαδήποτε ϕ, u

Θεώρημα Αντικατάστασης

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης και t μία παράσταση.

Για ένα δεδομένο μοντέλο M και στοιχεία a1, …, am του πεδίου ορισμού του M :
όταν το ak αντικαθιστά τη μεταβλητή uk ,

t^M (a1, …, am) είναι η τιμή της παράστασης t ,

$φ^M$ (a1, …, am) είναι η δήλωση που αντιστοιχεί στον τύπο φ ,

φ[t / u1]^M (a1, …, am) είναι η δήλωση που αντιστοιχεί στον τύπο φ[t / u1] .

Υποθέτουμε ότι:

Οι εμφανίσεις των μεταβλητών της t *στον τύπο* φ[t / u1] , *είναι* ***ελεύθερες*** .

Θα αληθεύει ότι:

φ[t / u1]^M (a1, …, am) = $φ^M$(t^M(a1, …, am) , a2 , …, am) ,

για κάθε φ , t , M , u1 , … , um , a1 , …, am όπως παραπάνω

Επαλήθευση του Θεωρήματος Αντικατάστασης

Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα σύμβολο σχέσης R με τρία ορίσματα
και ένα σύμβολο συνάρτησης f με δύο ορίσματα.

Έστω M = (U, ρ, F) ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ .

Κατασκευάζουμε τις δηλώσεις που αντιστοιχούν στους παρακάτω τύπους:
οι ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών u1 , u2 , z
αντικαθίστανται με τα στοιχεία a1 , a2 , b αντίστοιχα.

φ : $\forall$z R(z , **u1** , u2)

Η αντίστοιχη δήλωση είναι $\varphi^M($ **a1** , a2) = AND $_{d\in U}$ ρ(d , **a1** , a2)

φ[f(u2 , u1) / **u1**] είναι ο τύπος

$\forall$z R(z , **f(u2 , u1)** , u2)

Η αντίστοιχη δήλωση είναι φ^M (**F(a2, a1)** , a2) = AND $_{d\in U}$ ρ(d , **F(a2, a1)** , a2))

F(a2, a1) είναι η τιμή της παράστασης **f(u2 , u1)** όταν το ak αντικαθιστά την uk :

Το Θεώρημα Αντικατάστασης επαληθεύεται

φ[f(u2 , z) / **u1**] είναι ο τύπος

($\forall$z R(z , **f(u2 , z)** , u2))

Η αντίστοιχη δήλωση είναι φ^M (**F(a2, b)** , a2) $\neq$ AND $_{d\in U}$ ρ(d , **F(a2, d)** , a2))

F(a2, b) είναι η τιμή της παράστασης **f(u2 , z)**
όταν τα a2 , b αντικαθιστούν τις u2 , z :

Το Θεώρημα Αντικατάστασης δεν εφαρμόζεται

Απαγωγικοί κανόνες (deduction rules) για τα $\forall$, $\exists$

thereis u - introduction

$$\frac{\phi[\, t / u \,]}{\exists u\ \phi}$$

Οι εμφανίσεις μεταβλητών στην t είναι ελεύθερες στον τύπο $\phi[\, t / u \,]$

Ορθότητα του κανόνα thereis u - introduction

Για οποιαδήποτε ϕ , t , u όπως παραπάνω, αληθεύει η συνεπαγωγή

$$\phi[\, t / u \,] \ \models \ \exists u\ \phi$$

Απόδειξη Έστω τυχαία M , a1, …, am , (το ak αντικαθιστά την uk) , ώστε $\phi[\, t / u \,]^M($ a1, …, am $)$ = true .

Από το Θεώρημα Αντικατάστασης -- υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η μεταβλητή u είναι η u1 -- έχουμε ότι

$\phi[\, t / u \,]^M($ a1, …, am $) = \phi^M(\, \mathbf{t^M(\, a1, \ldots, am\,)}$, a2 , …, am $)$ = true .

Επομένως $\mathrm{OR}_{\mathbf{h}\in U}\ \phi^M(\, \mathbf{h}$, a2 , …, am $)$ = true , και $(\exists u\ \phi)^M($ a1, …, am $)$ = true .

forall u - elimination

$$\frac{\forall u\ \phi}{\phi[\, t / u \,]}$$

Οι εμφανίσεις μεταβλητών στην t είναι ελεύθερες στον τύπο $\phi[\, t / u \,]$

Ορθότητα του κανόνα forall u - elimination

Για οποιαδήποτε ϕ , t , u όπως παραπάνω, αληθεύει η συνεπαγωγή

$$\forall u\ \phi \ \models \ \phi[\, t / u \,]$$

Παραδείγματα τυπικών αποδείξεων με thereis u - introduction , forall u - elimination

Να αποδειχτεί τυπικά ότι Q(f(x, z) , g(z, y)) |-- (∃y Q(f(x, z) , y))

1	Q(f(x, z) , g(z, y))	υπόθεση
2	(∃y Q(f(x, z) , y))	1 , thereis y – introduction: φ είναι Q(f(x, z) , y) t είναι g(z, y)

Να αποδειχτεί τυπικά ότι Q(f(x, z) , g(z, y)) |-- ∃z (∃y Q(z , y))

1	Q(f(x, z) , g(z, y))	υπόθεση
2	(∃y Q(f(x, z) , y))	1 , thereis y – introduction: φ είναι Q(f(x, z) , y) t είναι g(z, y)
3	∃z (∃y Q(z , y))	2 , thereis z – introduction: φ είναι (∃y Q(z , y)) t είναι f(x, z)

Να αποδειχτεί τυπικά ότι ∀z (∃y Q(z , y)) |-- ∃y Q(f(x, z) , y)

1	∀z (∃y Q(z , y))	υπόθεση
2	(∃y Q(f(x, z) , y))	1 , forall z – elimination: φ είναι (∃y Q(z , y)) t είναι f(x, z)

Να βρεθεί αντιπαράδειγμα για το ότι ∀z (∃y Q(z , y)) |= ∃y Q(y , y)

Να αποδειχτεί τυπικά ότι: Για οποιουσδήποτε τύπους Α' τάξης θ , η ,

$\forall u\, (\theta \wedge \eta) \mid\!-\; \theta$ $\qquad (\theta \wedge \eta) \mid\!-\; \exists u\, \theta$

$\forall u\, \theta \mid\!-\; \theta$ $\qquad \theta \mid\!-\; \exists u\, \theta$

$\forall u\, \theta \mid\!-\; \theta$

1	$(\forall u\, \theta)$	υπόθεση
2	θ[u / u]	1 , forall u – elimination: ϕ είναι θ t είναι u
		θ[u / u] *είναι ο τύπος* θ

$(\theta \wedge \eta) \mid\!-\; \exists u\, \theta$

1	$\theta[\, u / u \,] \wedge \eta[\, u / u \,]$	υπόθεση $(\theta \wedge \eta)$ *είναι ο τύπος* $(\theta \wedge \eta)\, [\, u / u \,]$ $(\theta \wedge \eta)\, [\, u / u \,]$ *είναι ο τύπος* $\theta[\, u / u \,] \wedge \eta[\, u / u \,]$
2	θ[u / u]	1 , and – elimination
3	∃u θ	1 , thereis u – introduction: ϕ είναι θ t είναι u