# Στοιχεία προτασιακής λογικής

***Λογικές πράξεις*** and , or , not

Για οποιεσδήποτε *τιμές αλήθειας* s, t στο σύνολο {true, false} , οι γνωστές πράξεις

s and t , s or t , not s

δίνουν αποτελέσματα στο σύνολο {true, false} .

Για τις αλγεβρικές παραστάσεις που χρησιμοποιούν τις παραπάνω πράξεις, ισχύουν οι γνωστές ταυτότητες της *Άλγεβρας Boole* .

Παράδειγμα 1

Για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t, r ισχύουν τα παρακάτω:

not (s and t) = (not s) or (not t)  not (s or t) = (not s) and (not t)
r or (s and t) = (r or s) and (r or t)  r and (s or t) = (r and s) or (r and t)
r or (r and t) = r and (r or t) = r  κοκ.

***Λογικές πράξεις*** implies , iff

Ορίζουμε μιά πράξη implies μεταξύ τιμών αλήθειας ως εξής:

s implies t = (not s) or (s and t) .

Ορίζουμε επίσης μιά πράξη iff : s iff t = (s implies t) and (t implies s) .

Παρατήρηση 1

Για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t , ισχύουν τα παρακάτω:

false implies t = true
s implies true = true
s implies t = (not s) or t  not (s implies t) = s and (not t)
(s iff t) = true , αν και μόνο άν s = t -- η συνάρτηση iff ταυτίζεται με την xnor

Σημείωση Ταυτότητες όπως οι παραπάνω μπορούν να επαληθευτούν (i) κατασκευάζοντας πίνακες τιμών αληθείας, είτε (ii) χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες της Άλγεβρας Boole.

***Προτάσεις και τιμές αλήθειας τους***

Ονομάζουμε *πρόταση*, μία δήλωση στην οποία μπορεί να αποδοθεί με μαθηματικό τρόπο *μονοσήμαντο νόημα*, έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να αποφανθούμε κατά πόσο ισχύει ή δεν ισχύει. Σε μία πρόταση $\varphi$ αντιστοιχίζεται πάντα μιά μοναδική *τιμή αλήθειας*, $\text{TA}(\varphi) \in \{\text{true}, \text{false}\}$ .

Η δήλωση $\varphi$ θεωρείται ότι ***αληθεύει***, άν και μόνο άν $\text{TA}(\varphi) = \text{true}$ . Άρα έχουμε

$\text{TA}(\varphi) = \text{true}$ , όταν αληθεύει η $\varphi$ $\quad\quad$ $\text{TA}(\varphi) = \text{false}$ , όταν δεν αληθεύει η $\varphi$ .

<u>Παρατήρηση 2</u>

Σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\text{TA}(\text{" }\varphi \text{ και } \psi\text{ "}) = \text{TA}(\varphi) \text{ and } \text{TA}(\psi) .$$
$$\text{TA}(\text{" }\varphi \text{ είτε } \psi\text{ "}) = \text{TA}(\varphi) \text{ or } \text{TA}(\psi) .$$
$$\text{TA}(\text{" όχι } \varphi\text{ "}) = \text{not } \text{TA}(\varphi) .$$

***Συνεπαγωγή*** Μιά πρόταση " αν $\varphi$ τότε $\psi$ " θεωρείται ότι αληθεύει, όταν: είτε η $\varphi$ *δεν* αληθεύει, είτε αληθεύουν οι $\varphi$ *και* $\psi$ .

***Αμφίδρομη συνεπαγωγή*** Μιά πρόταση " $\varphi$ αν και μόνο αν $\psi$ " θεωρείται ότι αληθεύει, όταν: αληθεύουν οι " αν $\varphi$ τότε $\psi$ " *και* " αν $\psi$ τότε $\varphi$ " .

<u>Παρατήρηση 3</u>

Σύμφωνα με τους ορισμούς των λογικών πράξεων implies , iff , έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{TA}(\text{" αν } \varphi \text{ τότε } \psi\text{ "}) &= (\text{not } \text{TA}(\varphi)) \text{ or } (\text{TA}(\varphi) \text{ and } \text{TA}(\psi)) \\ &= \text{TA}(\varphi) \text{ implies } \text{TA}(\psi) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{TA}(\text{" }\varphi \text{ αν και μόνο αν } \psi\text{ "}) &= (\text{TA}(\varphi) \text{ implies } \text{TA}(\psi)) \text{ and } (\text{TA}(\psi) \text{ implies } \text{TA}(\varphi)) \\ &= \text{TA}(\varphi) \text{ iff } \text{TA}(\psi) \quad\quad ( =. \text{TA}(\varphi) \text{ xnor } \text{TA}(\psi)) \end{aligned}$$

Από την **Άσκηση *3***,

$$\text{TA}(\text{" }\varphi \text{ αν και μόνο αν } \psi\text{ "}) = (\text{TA}(\varphi) \text{ implies } \text{TA}(\psi)) \text{ and } ((\text{not } \text{TA}(\varphi)) \text{ implies } (\text{not } \text{TA}(\psi)))$$

$$\text{TA}(\text{" }\varphi \text{ αν και μόνο αν } \psi\text{ "}) = (\text{TA}(\varphi) \text{ and } \text{TA}(\psi)) \text{ or } ((\text{not } \text{TA}(\varphi)) \text{ and } (\text{not } \text{TA}(\psi))) .$$

***Προτασιακές μορφές και λογική ισοδυναμία***

Ονομάζουμε *προτασιακή μορφή*, μία δήλωση στην οποία μπορούν να εμφανίζονται *ως παράμετροι* τα σύμβολα φ , ψ κλπ. Όταν οι παράμετροι της προτασιακής μορφής αντικατασταθούν με προτάσεις, θα προκύπτει κάθε φορά μία πρόταση.

Το νόημα μιάς προτασιακής μορφής προσδιορίζεται κάθε φορά από τις προτάσεις που αντικαθιστούν τις παραμέτρους της. Η τιμή αλήθειας μιάς προτασιακής μορφής, προσδιορίζεται κάθε φορά από τις *τιμές αλήθειας* των προτάσεων που αντικαθιστούν τις παραμέτρους της

Δύο προτασιακές μορφές, Π(φ, ψ, ...) και Ρ(φ, ψ, ...) , λέγονται *λογικά ισοδύναμες* όταν:

για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας των (προτάσεων που αντικαθίστανται στις θέσεις των) φ , ψ κλπ,

ΤΑ( Π(φ, ψ, ...) ) = ΤΑ( Ρ(φ, ψ, ...) ) .

Μία προτασιακή μορφή Π(φ, ψ, ...) λέγεται *έγκυρη* όταν: για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας των φ , ψ κλπ,

ΤΑ( Π(φ, ψ, ...) ) = true .

Παράδειγμα 2

(i) Οι προτασιακές μορφές " φ και ψ " , " ψ και φ " , " όχι " φ είτε ψ " " , είναι ανά δύο λογικά ισοδύναμες.

(ii) Οι προτασιακές μορφές (a) " φ είτε " όχι φ " " (b) " αν " όχι ' όχι φ ' " τότε φ " (c) " ψ και φ " είτε " ' όχι ψ ' και φ " είτε " ψ και ' όχι φ ' " είτε " ' όχι ψ ' και ' όχι φ ' " , είναι έγκυρες.

Παρατήρηση 4

Η προτασιακή μορφή " φ αν και μόνο αν ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την

" αν φ τότε ψ " *και* " αν ψ τότε φ " .

***Συνηθισμένες λογικές ισοδυναμίες***

Οι προτασιακές μορφές " φ *συνεπάγεται* ψ", " φ *μόνο αν* ψ", " ψ *αν* φ " , θεωρούνται λογικά ισοδύναμες με την " αν φ τότε ψ " .

Η προτασιακή μορφή " φ *αν και μόνο αν* ψ " θεωρείται λογικά ισοδύναμη με την " φ *άνν* ψ " , και με την " " φ αν ψ " *και* " φ μόνο αν ψ " " .

Η προτασιακή μορφή " αν ψ τότε φ " *δεν είναι λογικά ισοδύναμη* με την προτασιακή μορφή

" αν φ τότε ψ " (η πρώτη ονομάζεται *αντίστροφη* της δεύτερης -- βλ. **Άσκηση *2***).

Η προτασιακή μορφή " αν φ τότε ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την " αν όχι ψ , τότε όχι φ "
(η δεύτερη ονομάζεται *ανάστροφη* της πρώτης -- βλ. **Άσκηση *3***).

***Προτασιακές συναρτήσεις***

Ονομάζουμε *προτασιακή συνάρτηση* μία δήλωση φ στην οποία εμφανίζονται μεταβλητές, τέτοια ώστε: Όταν οι μεταβλητές της φ αντικατασταθούν με τιμές από ένα κατάλληλο πεδίο ορισμού U , προκύπτει κάθε φορά μία πρόταση.
Το νόημα μιάς προτασιακής συνάρτησης (επομένως και η τιμή αλήθειας της) δεν θεωρείται μονοσήμαντο, επειδή καθορίζεται από τις τιμές που θα αποδοθούν στις μεταβλητές της.

***Εγκυρότητα - Ισχύς***

Μία προτασιακή συνάρτηση φ λέγεται *έγκυρη στο πεδίο ορισμού* U, όταν:
με την αντικατάσταση των μεταβλητών της φ με *οποιεσδήποτε* τιμές που ανήκουν στο U , προκύπτει μια πρόταση με τιμή αλήθειας true .
Ισοδύναμα, όταν η φ είναι έγκυρη στο πεδίο ορισμού U θεωρούμε ότι η φ ***ισχύει*** *για το* U .

Παρατήρηση 5

Σύμφωνα με τον ορισμό της λογικής πράξης implies, άν οι φ ,ψ είναι προτασιακές συναρτήσεις:
(a) Η δήλωση " αν φ τότε ψ " όπου εμφανίζονται μεταβλητές ισχύει στο πεδίο ορισμού U , ανν:
για οποιεσδήποτε τιμές των μεταβλητών που ανήκουν στο U , TA( φ ) implies TA( ψ ) = true ,
(b) Η δήλωση " αν φ τότε ψ " όπου εμφανίζονται μεταβλητές δεν ισχύει στο U , ανν:
υπάρχουν στο U (κατάλληλες) τιμές των μεταβλητών, έτσι ώστε TA( φ ) implies TA( ψ ) = false ,
δηλαδή TA( φ ) = true και TA( ψ ) = false .
Οι τιμές αυτές αποτελούν *αντιπαράδειγμα* για την δήλωση " αν φ τότε ψ ".

Παράδειγμα 3

(i) a1. Έστω ότι x , y είναι ακέραιοι.

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " , δεν είναι έγκυρη στους ακέραιους: εξετάζοντας τα δυνατά αποτελέσματα της συνάρτησης $\pi(x, y)$ = TA(" $x^2 < y^2$ ") implies TA(" $x<y$ ") , βλέπουμε ότι

$\pi(2, -3)$ = (true implies false) = false .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " δεν ισχύει για τους ακέραιους: υπάρχει το αντιπαράδειγμα $x_0 = 2$ , $y_0 = -3$ , για το οποίο έχουμε $x_0^2 < y_0^2$ , αλλά $x_0 \geq y_0$ .

a2. Έστω ότι x , y είναι *θετικοί* ακέραιοι.

Η παραπάνω προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " , είναι έγκυρη στους θετικούς ακέραιους: βλέπουμε ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους x , y , είτε θα έχουμε TA(" $x^2 < y^2$ ") = false , ή θα έχουμε TA(" $x^2 < y^2$ ") = true *και* TA(" $x<y$ ") = true -- άρα, $\pi(x, y)$ = true .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2<y^2$ τότε $x<y$ " ισχύει για τους θετικούς ακέραιους: δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

(ii) b1. Έστω ότι x , y είναι *πραγματικοί.*

Η προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " , *είναι έγκυρη* στους πραγματικούς: εξετάζοντας τα δυνατά αποτελέσματα της συνάρτησης ρ(x, y) = TA(" $x^2 < 0$ ") implies TA(" $x^2 < y$ ") , βλέπουμε ότι:

για οποιουσδήποτε πραγματικούς x , y , θα έχουμε TA(" $x^2 < 0$ ") = false -- άρα ρ(x, y) = true (παρατήρηση: η τιμή TA(" $x^2 < y$ ") μπορεί να είναι είτε true είτε false ) .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " *ισχύει* για τους πραγματικούς: δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

b2. Έστω ότι x , y είναι *μιγαδικοί.*

Η παραπάνω προτασιακή συνάρτηση " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " , δεν είναι έγκυρη στους μιγαδικούς: βλέπουμε ότι ρ(*i*, –3) = (true implies false) = false .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " δεν ισχύει για τους μιγαδικούς: υπάρχει το αντιπαράδειγμα $x_0 = i$ , $y_0 = -3$ , για το οποίο έχουμε $x_0^2 < 0$ , αλλά $x_0^2 \geq y_0$ .

(iii) c1. Έστω ότι x , y είναι ακέραιοι.

Η προτασιακή συνάρτηση " αν x–y = 1 τότε y–x = 1 " , δεν είναι έγκυρη στους ακέραιους: εξετάζοντας τα δυνατά αποτελέσματα της συνάρτησης σ(x, y) = TA(" x–y = 1 ") implies TA(" y–x = 1 ") , βλέπουμε ότι σ(1, 0) = (true implies false) = false .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν x–y = 1 τότε y–x = 1 " δεν ισχύει για τους ακέραιους: υπάρχει το αντιπαράδειγμα $x_0 = 1$ , $y_0 = 0$ , για το οποίο έχουμε $x_0 - y_0 = 1$ , αλλά $y_0 - x_0 \neq 1$ .

c2. Έστω ότι x , y είναι στοιχεία του συνόλου U = {0 , 2} .

Η παραπάνω προτασιακή συνάρτηση " αν x–y = 1 τότε y–x = 1 " , είναι έγκυρη στο πεδίο ορισμού U: βλέπουμε ότι, για οποιαδήποτε x , y στο U , θα έχουμε TA(" x–y = 1 ") = false -- άρα, σ(x, y) = true (ανεξάρτητα από την TA(" y–x = 1 ") ) .

Επομένως, η συνεπαγωγή " αν x–y = 1 τότε y–x = 1 " ισχύει για το σύνολο U = {0 , 2}: δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

## Σχετική βιβλιογραφία


<u>Βούρος – Διακριτά Μαθηματικά και Μαθηματική Λογική Α</u>:

1.1 Προτάσεις και Ποσοδείκτες -- μέχρι και το Παράδειγμα 1.16 (σελ. 28).

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>:

1.1 Propositional Logic

1.3 Propositional Equivalences

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*1* **α** Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω ισότητες ισχύουν, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t :

s or (s and t) = s and (s or t) = s

(s and t) and (s or t) = (s and t)     (s and t) or (s or t) = (s or t) .

(s and t) or (not s) or (not t) = true .

**β** Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω προτασιακές μορφές, είναι (ανά δύο) λογικά ισοδύναμες:

" φ είτε " φ και ψ " "     " φ και " φ είτε ψ " "     " φ " .

Επαληθεύστε ότι η προτασιακή μορφή " φ και ψ " είτε " όχι φ " είτε " όχι ψ " είναι έγκυρη.

*2* **α** Για κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες, βρείτε τιμές αλήθειας που να την διαψεύδουν:

s implies t = s and t     s implies t = t implies s     s implies t = s iff t     s iff t = s and t .

**β** Επαληθεύστε ότι, ανάμεσα στις παρακάτω προτασιακές μορφές, δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές που να είναι λογικά ισοδύναμες:

" αν φ τότε ψ "     " φ και ψ "     " αν ψ τότε φ "     " φ αν και μόνο αν ψ " .

*3* **α** Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω ισότητες ισχύουν, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t :

s implies t = (not t) implies (not s)

s iff t = (s implies t) and ( (not s) implies (not t) )

s iff t = (s and t) or ( (not s) and (not t) ) .

**β** Επαληθεύστε ότι η προτασιακή μορφή " αν φ τότε ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την

" αν όχι ψ , τότε όχι φ " .

**γ** Επαληθεύστε ότι η προτασιακή μορφή " φ αν και μόνο αν ψ " είναι λογικά ισοδύναμη με την

" " αν φ τότε ψ " και " αν ' όχι φ ' , τότε ' όχι ψ ' " " .

*4* **α** Βρείτε μια αλγεβρική παράσταση f(s, t) , που να χρησιμοποεί μόνο τις πράξεις iff , and , και για την οποία να ισχύει f(s, t) = s implies t , για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t .

**β** Βρείτε μια αλγεβρική παράσταση g(s, t) , που να χρησιμοποεί μόνο τις λογικές πράξεις iff , or , και για την οποία να ισχύει g(s, t) = s implies t , για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t .

**5** **α** Βρείτε μια αλγεβρική παράσταση xor(s, t) , που να χρησιμοποεί μόνο τις λογικές πράξεις or , and , not , και για την οποία να ισχύει: xor(s, t) = true αν και μόνο αν $s \neq t$ , για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t .

**β** Επαληθεύστε ότι, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t , r ,

xor(s, s) = false    xor(s, t) = xor(t, s)    xor( s, xor(t, r) ) = xor( xor(s, t) , r) .

**6** **α** Βρείτε για ποιούς ακέραιους x , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x < 1$ τότε $x < 0$ " .

**β** Βρείτε για ποιούς θετικούς ακέραιους x , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x < 0$ τότε $x < -1$ " .

**7** **α** Βρείτε για ποιούς πραγματικούς x , ισχύει η αμφίδρομη συνεπαγωγή

" $x^2 < 0$ αν και μόνο αν $x^2 < -1$ " .

**β** Βρείτε για ποιούς πραγματικούς x , ισχύει η αμφίδρομη συνεπαγωγή

" $x^2 < 0$ αν και μόνο αν $x < -1$ " .

**8** **α** Βρείτε για ποιούς ακέραιους x , y , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x^2 < y^2$ τότε $x<y$ " .

**β** Βρείτε για ποιούς μιγαδικούς x , y , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x^2 < 0$ τότε $x^2 < y$ " .

**9** Για κάθε μία από τις παρακάτω δηλώσεις, βρείτε αν ισχύει στα εξής πεδία ορισμού:

$U_1 = \{ \}$ , $U_2 = \{1\}$ , $U_3 = \{1, 2\}$ .

**α** " $x \neq x$ "

**β** " αν $x<y$ τότε $y<x$ "

**γ** " αν " $x \neq y$ και $z \neq y$ " τότε $x = z$ " .

**10** Επαληθεύστε ότι: κάθε δήλωση όπου εμφανίζονται μεταβλητές, ισχύει στο πεδίο ορισμού $U = \{ \}$ .

## Απαντήσεις επιλεγμένων ασκήσεων

***2*** **α** Για κάθε μία από τις παρακάτω ισότητες, βρείτε τιμές αλήθειας που να την διαψεύδουν:

s implies t = s and t     s implies t = t implies s     s implies t = s iff t     s iff t = s and t .

Κατασκευάζουμε ένα πίνακα που καταγράφει, για όλες τις δυνατές τιμές αλήθειας των μεταβλητών s , t , τις τιμές αλήθειας κάθε μιάς από τις παραστάσεις που αναφέρονται.

Για συντομία, γράφουμε T αντί για true και F αντί για false .

| s | t | s implies t | s and t | t implies s | s iff t |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | T | F | F | F |
| F | F | T | F | T | T |

Από τον πίνακα βλέπουμε ότι:

| | | | |
|---|---|---|---|
| s implies t $\neq$ s and t | όταν | s = F | t = T |
| s implies t $\neq$ t implies s | όταν | s = F | t = T |
| s implies t $\neq$ s iff t | όταν | s = F | t = T |
| s iff t $\neq$ s and t | όταν | s = F | t = F |

**β** Επαληθεύστε ότι, ανάμεσα στις παρακάτω προτασιακές μορφές, δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές που να είναι λογικά ισοδύναμες:

" αν φ τότε ψ "     " φ και ψ "     " αν ψ τότε φ "     " φ αν και μόνο αν ψ " .

Συγκρίνουμε τις δυνατές τιμές αλήθειας των     " αν φ τότε ψ "     " φ και ψ " : γνωρ'ίζουμε, ότι

TA(" αν φ τότε ψ ") = TA( φ ) implies TA( ψ )

TA(" φ και ψ ") = TA( φ ) and TA( ψ ) .

Από τον παραπάνω πίνακα, βλέπουμε ότι

TA( φ ) implies TA( ψ ) $\neq$ TA( φ ) and TA( ψ )     όταν     TA( φ ) = false .

Εργαζόμαστε ανάλογα για όλες τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

**3** **α** Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω ισότητες ισχύουν, για οποιεσδήποτε τιμές αλήθειας s, t :

s implies t = (not t) implies (not s) (1)

s iff t = (s implies t) and ( (not s) implies (not t) ) (2)

s iff t = (s and t) or ( (not s) and (not t) ) . (3)

Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα πίνακα που να καταγράφει τις τιμές αλήθειας κάθε μιάς από τις παραστάσεις που εμφανίζονται και να τις συγκρίνουμε -- ή εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις εξής παρατηρήσεις:

Άν ταυτίσουμε την τιμή αλήθειας true με την *αριθμητική τιμή* 1 , και την τιμή αλήθειας false με το 0 , έχουμε ότι (αριθμητικά) (not t) = $1-t$

και επίσης ότι (s implies t) = 1 αν $s \le t$ , (s iff t) = 1 αν $s = t$

(s implies t) = 0 αν $s > t$ (s iff t) = 0 αν $s \ne t$ .

Ελέγχουμε ότι ισχύει αριθμητικά η ισότητα (1) : ( (not t) implies (not s) ) = 1 ανν (not t) ≤ (not s) , ανν $1-t \le 1-s$ , δηλαδή $s \le t$ . Άρα ( (not t) implies (not s) ) = 1 ανν (s implies t) = 1 .
Επομένως, ( (not t) implies (not s) ) = s implies t .

Ελέγχουμε ότι ισχύει αριθμητικά η ισότητα (2) . Το δεξιό σκέλος έχει τιμή 1 όταν (s implies t) = 1 και ( (not s) implies (not t) ) = 1 , δηλαδή όταν $s \le t$ και $t \le s$ . Το αριστερό σκέλος έχει τιμή 1 όταν $s = t$ . Επομένως, η (2) ισχύει αριθμητικά.

**6** **α** Βρείτε για ποιούς ακέραιους x , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x < 1$ τότε $x < 0$ " .

Θα πρέπει να έχουμε TA(" $x < 1$ " ) implies TA(" $x < 0$ " ) = true . Επειδή s implies t = (not s) or t , πρέπει να είναι είτε $x \ge 1$ είτε $x < 0$ , δηλαδή $x \ne 0$ (αφού το x είναι ακέραιος).

**β** Βρείτε για ποιούς θετικούς ακέραιους x , ισχύει η συνεπαγωγή " αν $x < 0$ τότε $x < -1$ " .

Για να *μήν* ισχύει η συνεπαγωγή, θα πρέπει να έχουμε TA(" $x < 0$ " ) = true και TA(" $x < -1$ " ) = false , άρα $-1 \le x < 0$ Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει θετικός ακέραιος x ώστε να μήν ισχύει η συνεπαγωγή, άρα θα ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο.