Απαγωγή σε άτοπο

proof-by-contradiction $[\quad \neg\phi \quad \ldots \quad F \quad]$

$$\frac{[\ \neg\phi \quad \ldots \quad F\ ]}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα proof - by - contradiction</u>

Για οποιοδήποτε τύπο φ για τον οποίο αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma\ ,\ \neg\phi \ \models\ F$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \ \models\ \phi$

not not – elimination

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα not not – elimination</u>

Για οποιοδήποτε τύπο φ για τον οποίο αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \models \neg\neg\phi$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \ \models\ \phi$

law-of-excluded-middle

$$\frac{}{\phi \vee (\neg\phi)}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα law-of-excluded-middle</u>

Για οποιοδήποτε τύπο φ , όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων:

θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\Sigma \ \models\ \phi \vee (\neg\phi)$

Απαγωγικοί κανόνες για το $\vee$

or - introduction

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

<u>*Ορθότητα* των κανόνων or - introduction</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , αληθεύουν οι συνεπαγωγές

$$\phi \models \phi \vee \psi \qquad \psi \models \phi \vee \psi$$

or - elimination

$$\frac{\phi \vee \psi \qquad [\ \phi \ \ldots \ \chi\ ] \qquad [\ \psi \ \ldots \ \chi\ ]}{\chi}$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα or - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , ψ , χ για τους οποίους αληθεύουν οι συνεπαγωγές

$$\Sigma \models \phi \vee \psi \qquad \Sigma , \phi \models \chi \qquad \Sigma , \psi \models \chi$$

όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων: θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \chi$

<u>Ορθότητα των φυσικών αποδείξεων (natural deductions)</u>

Άν υπάρχει μία τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \vdash \psi$:
θα αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$.

Η απόδειξη είναι στις σημειώσεις ‘Check-blocks’

<u>Πληρότητα των φυσικών αποδείξεων (natural deductions)</u>

Άν αληθεύει η συνεπαγωγή $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \models \psi$:
θα υπάρχει μία τυπική απόδειξη του sequent $\phi_1 , \phi_2 \ldots , \phi_n \vdash \psi$.

Η απόδειξη είναι στο βιβλίο των Huth-Ryan, υπο-ενότητα 1.4.4

1 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $p \vee q \ \vdash \ q \vee p$

1	$p \vee q$		υπόθεση		
2	[p		υπόθεση	$1 \models 2$?	ΟΧΙ
3	$\mathbf{q \vee p}$]	2 ,	or – introduction	$2 \models 3$	
4	[q		υπόθεση	$1 \models 4$?	ΟΧΙ
5	$\mathbf{q \vee p}$]	4 ,	or – introduction	$4 \models 5 \equiv 3$	
6	$\mathbf{q \vee p}$	1 , { 2 , 3 } , { 4 , 5 } ,	or – elimination	$(2 \text{ or } 4) \equiv 1 \models 6 \equiv 5$	

2 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $s \vee (p \vee q) \ \vdash \ (q \vee s) \vee p$

1	$s \vee (p \vee q)$		υπόθεση	
2	{ s		υπόθεση	
3	$q \vee s$	2 ,	or – introduction	$2 \models 3$
4	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ }	3 ,	or – introduction	$3 \models 4$
				$2 \models 4$
5	{ $(p \vee q)$		υπόθεση	
6	**[** p		υπόθεση	
7	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ **]**	6 ,	or – introduction	$6 \models 7$
8	**[** q		υπόθεση	
9	$q \vee s$	8 ,	or – introduction	$8 \models 9$
10	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ **]**	9 ,	or – introduction	$9 \models 10$
				$8 \models 10 \equiv 7$
11	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$ }	5 , { 6 , 7 } , { 8 , ... 10 } ,	or – elimination	
				$(6 \text{ or } 8) \equiv 5 \models 11 \equiv 10$
12	$\mathbf{(q \vee s) \vee p}$	1 , { 2 , ... 4 } , { 5 , ... 11 } ,	or – elimination	
				$(2 \text{ or } 5) \equiv 1 \models 12 \equiv 11$

3 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $p \rightarrow q \ \vdash\ q \vee (\neg p)$

1	$p \rightarrow q$		υπόθεση	
2	$\mathbf{p \vee (\neg p)}$		law-of-excluded-middle	
3	[$\mathbf{p}$		υπόθεση	
4	q	1 , 3 ,	implies – elimination	1 , 3 |= 4
5	$\mathbf{q \vee (\neg p)}$]	4 ,	or – introduction	4 |= 5
				1 , 3 |= 5
6	[$\mathbf{\neg p}$		υπόθεση	
7	$\mathbf{q \vee (\neg p)}$]		6 , or – introduction	6 |= 7 ≡ 5
8	$\mathbf{q \vee (\neg p)}$	2 , { 3 , ... 5 } , { 6 , 7 } ,	or – elimination	
				1 , (3 or 6) ≡ 2 |= 8 ≡ 7
				1 |= 8

4 Να αποδειχτεί τυπικά ότι $(p \lor q)$, $(\neg p) \lor (\neg q)$ $\vdash$ $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$

1 $(p \lor q)$	υπόθεση
2 $(\neg p) \lor (\neg q)$	υπόθεση
3 { p	υπόθεση
4 [$\neg p$	υπόθεση
5	
6 $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
7 [$\neg q$	υπόθεση
7α	
7β	
8 $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
9 $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$ }	2 , { 4 , ... 6 } , { 7 , ... 9 } , or – elimination
	2 , 3 $\models$ 9
10 { q	υπόθεση
11 [$\neg p$	υπόθεση
11α	
11β	
12 $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
13 [$\neg q$	υπόθεση
14	
15 $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$]	
16 $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$ }	2 , { 11 , 12 } , { 13 , ... 15 } , or – elimination
	2 , 10 $\models$ 16
17 $(p \land (\neg q)) \lor ((\neg p) \land q)$	1 , { 3 , ... 9 } , { 10 , ... 16 } $\models$ 17