Σημασιολογία τύπων Α΄ Τάξης **Σ. Κοσμαδάκης**

- **Επαγωγικός ορισμός τιμών αλήθειας τύπων**

Ένας τύπος Α΄ τάξης φ ορίζει μια συνάρτηση με ορίσματα

α) ένα μοντέλο M αντίστοιχο στο λεξιλόγιο του φ ,

β) ένα πίνακα L που καταχωρεί, για κάθε μεταβλητή u , ένα στοιχείο a του πεδίου ορισμού U του M -- συμβολικά, $L[u] = a$.

Αποτέλεσμα της συνάρτησης, είναι η *τιμή αλήθειας της δήλωσης* $\varphi^M(L[u_1] , \ldots, L[u_m])$ -- βλέπε τις δηλώσεις αντίστοιχες σε τύπους -- όπου $u_1, \ldots, u_m$ είναι οι ελεύθερες μεταβλητές του φ .
Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\varphi^M(L)$ για την τιμή αλήθειας της δήλωσης $\varphi^M(L[u_1] , \ldots, L[u_m])$.

Αρχικές περιπτώσεις Ο τύπος φ είναι ατομικός:

$\varphi^M(L)$ είναι η τιμή αλήθειας της δήλωσης που προκύπτει αντικαθιστώντας στον φ

(1) κάθε σύμβολο του λεξιλογίου με την αντίστοιχη σχέση / συνάρτηση / σταθερά του M

(2) τις ελεύθερες εμφανίσεις κάθε μίας μεταβλητής u , με το στοιχείο $L[u]$.

Επαγωγικό βήμα

(i) Ο τύπος φ είναι προτασιακός συνδυασμός των τύπων φ_1 , φ_2 :

$(\varphi_1\wedge\varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L) \text{ and } \varphi_2^M(L)$ $(\varphi_1\vee\varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L) \text{ or } \varphi_2^M(L)$

$(\varphi_1\rightarrow\varphi_2)^M(L) = \varphi_1^M(L) \text{ implies } \varphi_2^M(L)$ $(\neg\varphi_1)^M(L) = \text{not } \varphi_1^M(L)$.

(ii) Ο τύπος φ είναι $(\forall u\, \varphi_1)$ / $(\exists u\, \varphi_1)$:

$$(\forall u\, \varphi_1)^M(L) = \text{AND}_{d\in U}\ \varphi_1^M(L ; u \mapsto d)$$
$$(\exists u\, \varphi_1)^M(L) = \text{OR}_{d\in U}\ \varphi_1^M(L ; u \mapsto d)$$

όπου $L ; u \mapsto d$ είναι ένας πίνακας L' που περιέχει όλες τις καταχωρήσεις του πίνακα L , με τη μοναδική διαφορά ότι $L'[u] = d$.

Ερώτημα 0
Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, για τον οποίο $FV(\varphi) \subseteq \{u_1, \ldots, u_m\}$.
Έστω L , K δύο πίνακες όπως παραπάνω, για τους οποίους $L[u_j] = K[u_j]$, $j = 1,\ldots,m$.
Χρησιμοποιείστε τις αναδρομικές ιδιότητες (i, ii) για να επιβεβαιώσετε ότι: $\varphi^M(L) = \varphi^M(K)$.

- **Ιδιότητες της συνεπαγωγής τύπων Α΄ Τάξης**

1 Προτασιακοί συνδυασμοί

Έστω φ , φ' τύποι Α΄ τάξης για τους οποίους ισχύει $\varphi \models \varphi'$.
Για οποιοδήποτε τύπο θ θα ισχύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:

$(\varphi \wedge \theta) \models (\varphi' \wedge \theta)$ $\quad$ $(\varphi \vee \theta) \models (\varphi' \vee \theta)$

$(\varphi' \rightarrow \theta) \models (\varphi \rightarrow \theta)$ $\quad$ $(\theta \rightarrow \varphi) \models (\theta \rightarrow \varphi')$

$(\neg\varphi') \models (\neg\varphi)$.

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (i) στο Επαγωγικό βήμα του ορισμού της τιμής αλήθειας ενός τύπου Α΄ Τάξης.

2 Ποσοδείκτες

Έστω φ , φ' τύποι Α΄ τάξης για τους οποίους ισχύει $\varphi \models \varphi'$.
Θα ισχύουν οι συνεπαγωγές: $(\exists u\, \varphi) \models (\exists u\, \varphi')$ $\quad$ $(\forall u\, \varphi) \models (\forall u\, \varphi')$.

Οι παραπάνω συνεπαγωγές μπορούν να επιβεβαιωθούν χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (ii) στο Επαγωγικό βήμα του ορισμού της τιμής αλήθειας ενός τύπου Α΄ Τάξης.

3 Μετακίνηση ποσοδεικτών

(Α) Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$\neg(\exists u\, \varphi) \models\,=\!| (\forall u\, \neg\varphi)$ $\quad$ $\neg(\forall u\, \varphi) \models\,=\!| (\exists u\, \neg\varphi)$.

(Β) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$\exists u\, (\varphi \wedge \theta) \models\,=\!| (\exists u\, \varphi) \wedge \theta$ $\quad$ $\exists u\, (\varphi \vee \theta) \models\,=\!| (\exists u\, \varphi) \vee \theta$

$\forall u\, (\varphi \wedge \theta) \models\,=\!| (\forall u\, \varphi) \wedge \theta$ $\quad$ $\forall u\, (\varphi \vee \theta) \models\,=\!| (\forall u\, \varphi) \vee \theta$

Ερώτημα 1 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές $\forall u\, (\varphi \wedge \theta) \models (\forall u\, \varphi) \wedge \theta$ και $(\exists u\, \varphi) \vee \theta \models \exists u\, (\varphi \vee \theta)$ ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 2 Επιβεβαιώστε ότι: εκείνες από τις συνεπαγωγές (Β) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 1*, είναι δυνατό να μην ισχύουν όταν $u \in FV(\theta)$.

(Γ) Έστω φ , θ τύποι Α΄ τάξης, και $u \notin FV(\theta)$.
Ισχύουν οι παρακάτω λογικές ισοδυναμίες:

$\exists u\, (\varphi \rightarrow \theta) \models\,=\!| (\forall u\, \varphi) \rightarrow \theta$ $\quad$ $\exists u\, (\theta \rightarrow \varphi) \models\,=\!| (\theta \rightarrow \exists u\, \varphi)$

$\forall u\, (\varphi \rightarrow \theta) \models\,=\!| (\exists u\, \varphi) \rightarrow \theta$ $\quad$ $\forall u\, (\theta \rightarrow \varphi) \models\,=\!| (\theta \rightarrow \forall u\, \varphi)$

Ερώτημα 3 Επιβεβαιώστε ότι οι συνεπαγωγές $(\forall u\, \varphi) \rightarrow \theta \models \exists u\, (\varphi \rightarrow \theta)$ και $\theta \rightarrow (\exists u\, \varphi) \models \exists u\, (\theta \rightarrow \varphi)$ ισχύουν για οποιουσδήποτε τύπους φ , θ .

Ερώτημα 4 Επιβεβαιώστε ότι: εκείνες από τις συνεπαγωγές (Γ) που *δεν αναφέρονται στο Ερώτημα 3*, είναι δυνατό να μην ισχύουν όταν $u \in FV(\theta)$.