Στοιχειώδεις συνεπαγωγές τύπων Α' Τάξης

1 Επιβεβαιώστε ότι ο τύπος $\exists x\, (\forall y\, (P(x) \rightarrow P(y)))$ είναι έγκυρος.

Από τις **Ιδιότητες 3Γ** $\quad \forall y\, (P(x) \rightarrow P(y)) \;|{=}{=}|\; P(x) \rightarrow \forall y\, P(y) \qquad (1)$

Από την (1) και τις **Ιδιότητες 2**

$$\exists x\, (\forall y\, (P(x) \rightarrow P(y))) \;|{=}{=}|\; \exists x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)) \qquad (2)$$

Από την (2) και τις **Ιδιότητες 3Γ**

$$\exists x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)) \;|{=}{=}|\; \forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, P(y) \qquad (3)$$

Από τις (2) , (3) $\quad \exists x\, (\forall y\, (P(x) \rightarrow P(y))) \;|{=}{=}|\; \forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$

Παρατηρούμε ότι ο ισοδύναμος τύπος $\forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$ είναι ταυτολογία.

2 Επιβεβαιώστε τη λογική ισοδυναμία $\exists x\, (\neg R(x) \rightarrow \forall y\, R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\, R(x)$.

Χρησιμοποιώντας την προτασιακή λογική στον τύπο $\neg R(x) \rightarrow \forall y\, R(y)$,

$$\neg R(x) \rightarrow \forall y\, R(y) \;|{=}{=}|\; R(x) \vee \forall y\, R(y) \qquad (1)$$

Από την (1) και τις **Ιδιότητες 2**

$$\exists x\, (\neg R(x) \rightarrow \forall y\, R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\, (R(x) \vee \forall y\, R(y)) \qquad (2)$$

Από την (2) και τις **Ιδιότητες 3Β**

$$\exists x\, (R(x) \vee \forall y\, R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\, R(x) \vee \forall y\, R(y) \qquad (3)$$

Παρατηρούμε ότι $\forall y\, R(y) \;|{=}\; \exists x\, R(x)$, επομένως

$$\exists x\, R(x) \vee \forall y\, R(y) \;|{=}{=}|\; \exists x\, R(x) \qquad (4)$$

Από τις (2) , (3) , (4) $\quad \exists x\, (\neg R(x) \rightarrow \forall y\, R(y)) \;|{=}{=}|\; \exists x\, R(x)$