Συντακτικό τύπων Α' Τάξης - Αντίστοιχες δηλώσεις

1 Έστω ένα λεξιλόγιο $\Lambda = (\{R\}, \{f\}, \{e\})$, όπου:

R ένα σύμβολο σχέσης με δύο ορίσματα,

f ένα σύμβολο συνάρτησης με ένα όρισμα,

e μία σταθερά.

Για κάθε μία από τις παρακάτω *συμβολοσειρές*:

α Βρείτε άν είναι παράσταση είτε τύπος Α΄ Τάξης ως προς το παραπάνω λεξιλόγιο Λ, και το σύνολο μεταβλητών $V = \{x, y, z\}$.

β Για τις συμβολοσειρές που είναι είτε παραστάσεις είτε τύποι Α΄ Τάξης κατασκευάστε τις *αντίστοιχες μαθηματικές παραστάσεις και δηλώσεις*, για ένα δεδομένο *μοντέλο* $M = (U, \rho, F, E)$ *αντίστοιχο* του Λ :

U είναι ένα πεδίο τιμών ,

$\rho : U \times U \to \{\text{true}, \text{false}\}$ είναι μία σχέση με δύο ορίσματα από το U ,

$F : U \to U$ είναι μία συνάρτηση με ένα όρισμα από το U ,

E είναι ένα στοιχείο του U

όταν οι εμφανίσεις των μεταβλητών x , y , z *αντικαθιστώνται* από τις τιμές a . b , c που είναι στοιχεία του U .

$f(\ f(y)\ )$ $\qquad$ $(\ (R(x,\ y) \wedge (\ e\ =\ f(x)\ )\ )\ )$

$F(\ F(b)\ )$ $\qquad$ $\rho(a,\ b)$ and $(\ E\ =_U\ F(a)\ )$

$(\ R(y,\ x)\ =\ f(x)\ )$ $\qquad$ $R(x,\ z(x))$

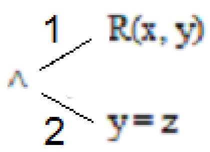
$\rho(b\ ,\ a)\ =_U$!! $F(a)$ $\qquad$ $\rho(a\ ,\ c$!!$(a)\ )$

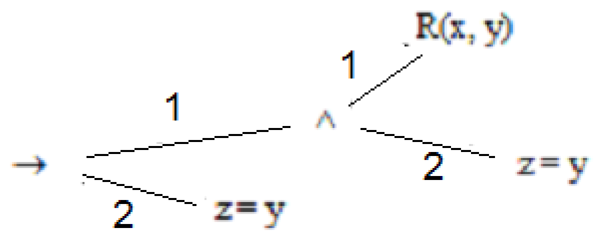
$(\ \forall x \leq f(z)\ \ R(x,\ x)\ )$ $\qquad$ $(y \to y)$ $\qquad$ $(\ \exists xy\ R(x,\ y)\ )$

!! $\qquad$ b!! implies b!! $\qquad$!!

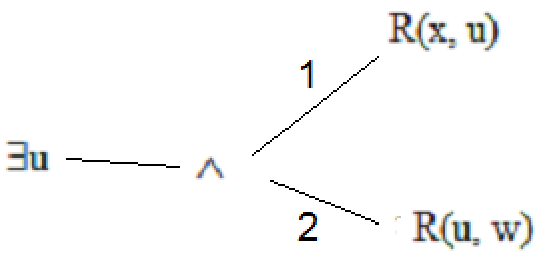
2 Κατασκευάστε τα parse-trees των παρακάτω τύπων Α' Τάξης

$(\ R(x,\ y) \wedge (y = z)\ )$ $\qquad$ $(\ (\ R(x,\ y) \wedge (z = y)\ )\ \ \to\ \ (z = y)\ \ )$



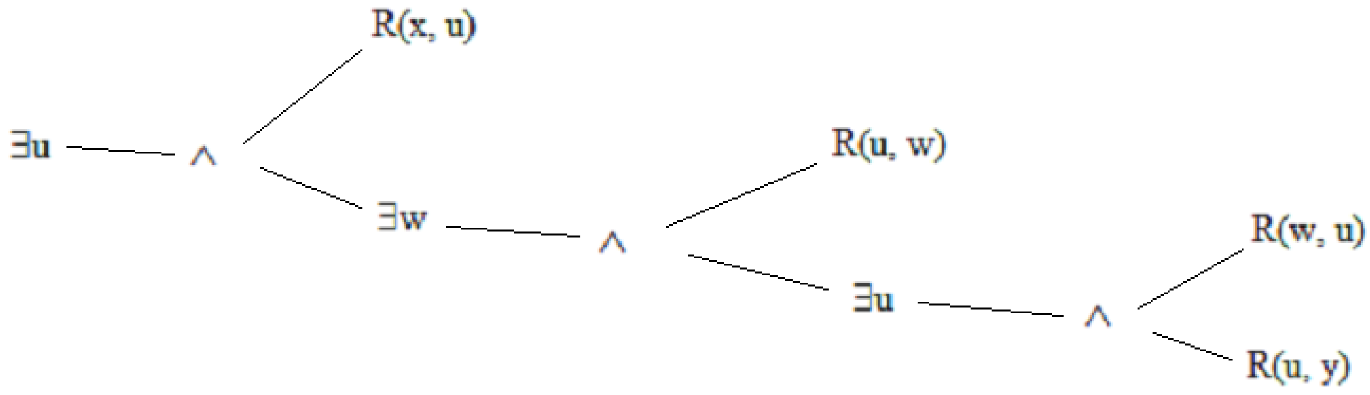


$(\exists u \; (R(x,\; u) \wedge R(u,\; w) \;)$



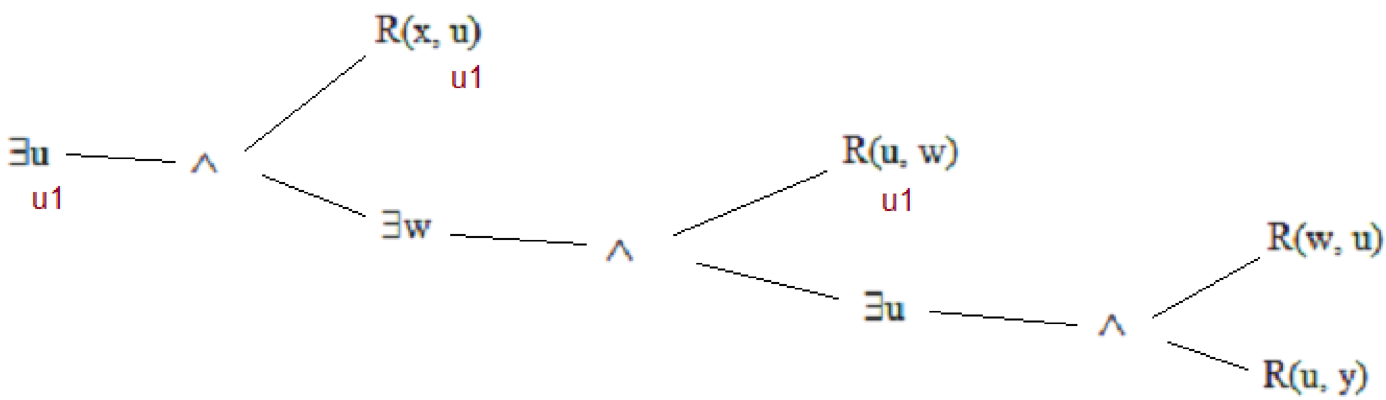
3 Για κάθε μία εμφάνιση μεταβλητής στον παρακάτω τύπο Α′ Τάξης,
βρείτε από ποιά εμφάνιση ποσοδείκτη δεσμεύεται ή άν είναι ελεύθερη

$$(\exists u \; (R(x,\; u) \wedge (\exists w \; (R(u,\; w) \wedge (\exists u \; (R(w,\; u) \wedge R(u,\; y) \;) \;) \;) \;) \;) \;)$$



Βρείτε έναν λογικά ισοδύναμο τύπο, όπου κάθε ποσοδείκτης να δεσμεύει διαφορετική μεταβλητή

$$(\exists u1 \; (R(x,\; u1) \wedge (\exists w \; (R(u1,\; w) \wedge (\exists u \; (R(w,\; u) \wedge R(u,\; y) \;) \;) \;) \;) \;) \;)$$



4 Έστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα σύμβολο σχέσης R με ένα όρισμα, και $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ .

α Κατασκευάστε τις δηλώσεις που αντιστοιχούν στους παρακάτω τύπους: οι ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών x , y να αντικαθίστανται με τα στοιχεία a1 , a2 αντίστοιχα.

$R(y)$	$\rho(a2)$
$\forall y\ R(y)$	$\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d)$
$(R(x) \to \forall y\ R(y))$	$(\rho(a1)\ \text{implies}\ (\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d)))$
$(\forall x\ (R(x) \to \forall y\ R(y))$	$\text{AND}_{d \in U}\ [\rho(d)\ \text{implies}\ (\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d))]$
$\exists x\ ((\neg R(x)) \to \forall y\ R(y))$	$\text{OR}_{d \in U}\ [(\text{not}\ \rho(d))\ \text{implies}\ (\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d))]$

β Έστω $U = \{ n \mid n$ ακέραιος που διαιρείται με το 3 },
$\rho(n) = \text{true}$ όταν n είναι ακέραιος που διαιρείται με το 2 .

Βρείτε τις μαθηματικές ιδιότητες των a1, a2 που εκφράζονται, σε αυτό το μοντέλο, από τις παραπάνω δηλώσεις,.

$\rho(a2)$: ' ο ακέραιος a2 είναι άρτιος '

$$\begin{aligned} \text{AND}_{d \in U}\ \rho(d) &= (\text{AND}_{d \in U,\, d \neq 3}\ \rho(d))\ \text{and}\ \rho(3) \\ &= (\text{AND}_{d \in U,\, d \neq 3}\ \rho(d))\ \text{and}\ \text{false} \\ &= \text{false} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\rho(a1)\ \text{implies}\ (\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d))) \\ &\quad = (\rho(a1)\ \text{implies}\ \text{false}) = \text{not}\ \rho(a1) \\ &\quad = \text{' ο ακέραιος a1 είναι περιττός '} \end{aligned}$$

$\text{AND}_{d \in U}\ [\rho(d)\ \text{implies}\ (\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d))]$

$= \text{AND}_{d \in U}\ (\text{not}\ \rho(d)) = \text{false}$, επειδή $(\text{not}\ \rho(6)) = \text{false}$

$\text{OR}_{d \in U}\ [(\text{not}\ \rho(d))\ \text{implies}\ (\text{AND}_{d \in U}\ \rho(d))]$

$= \text{OR}_{d \in U}\ [(\text{not}\ \rho(d))\ \text{implies}\ \text{false}] = \text{OR}_{d \in U}\ \rho(d) = \text{true}$, επειδή $\rho(6) = \text{true}$

5 Αποδείξτε ότι ο τύπος $(R(x) \rightarrow \forall y\, R(y))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $(\neg R(x) \vee \forall y\, R(y))$

Έστω $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο και a1 ένα στοιχείο του U .

Η δήλωση δ που αντιστοιχεί στον τύπο $(R(x) \rightarrow \forall y\, R(y))$, όταν οι ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x αντικαθίστανται με το στοιχείο a1 , είναι

$$\delta = (\rho(a1) \text{ implies } (\text{AND}_{d\in U}\ \rho(d)))$$

Η δήλωση δ που αντιστοιχεί στον τύπο $(\neg R(x) \vee \forall y\, R(y))$, όταν οι ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής x αντικαθίστανται με το στοιχείο a1 , είναι

$$\delta 2 = ((\text{not } \rho(a1)) \text{ or } (\text{AND}_{d\in U}\ \rho(d)))$$

Από την προτασιακή λογική, $\delta = \delta 2$ *για οποιαδήποτε* M , a1 .

6 Αποδείξτε ότι ο τύπος $\exists x (R(x) \rightarrow (\forall y\, R(y)))$ είναι ταυτολογία.

Έστω $M = (U, \rho)$ ένα μοντέλο. Η δήλωση δ που αντιστοιχεί στον τύπο είναι

$$\delta = \text{OR}_{d\in U} (\rho(d) \text{ implies } (\mathbf{AND}_{d\in U}\ \boldsymbol{\rho(d)}))$$

I Άν για το M έχουμε $\mathbf{AND}_{d\in U}\ \boldsymbol{\rho(d)} = \text{true}$:

$$\delta = \text{OR}_{d\in U} (\rho(d) \text{ implies } \mathbf{true}) = \text{OR}_{d\in U} \text{ true} = \text{true}$$

II Άν για το M έχουμε $\mathbf{AND}_{d\in U}\ \boldsymbol{\rho(d)} = \text{false}$:

$$\delta = \text{OR}_{d\in U} (\rho(d) \text{ implies false}) = \text{OR}_{d\in U} (\text{not } \rho(d))$$

Επειδή $\text{AND}_{d\in U}\ \rho(d) = \text{false}$, υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $v \in U$ ώστε $\rho(v) = \text{false}$. Επομένως $(\text{not } \rho(v)) = \text{true}$, και $\text{OR}_{d\in U} (\text{not } \rho(d)) = \text{true}$.

Άρα, για οποιοδήποτε μοντέλο $M = (U, \rho)$: $\delta = \text{true}$.