

Αξιώματα για την ισότητα (Fitting)

Η ισότητα είναι σχέση ισοδυναμίας

Ανακλαστικότητα $(\forall x) (x = x)$

Συμμετρία $(\forall x) (\forall y) [(x = y) \rightarrow (y = x)]$

Μεταβατικότητα $(\forall x) (\forall y) (\forall z) [((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z)]$

Η ισότητα είναι ομοιότητα (congruence) ως προς κάθε συνάρτηση f και ως προς κάθε σχέση R

$(\forall x_1) (\forall y_1) \dots (\forall x_m) (\forall y_m) [((x_1 = y_1) \wedge \dots \wedge (x_m = y_m)) \rightarrow (f(x_1, \dots, x_m) = f(y_1, \dots, y_m))]$

$(\forall x_1) (\forall y_1) \dots (\forall x_m) (\forall y_m) [((x_1 = y_1) \wedge \dots \wedge (x_m = y_m)) \rightarrow (R(x_1, \dots, x_m) \rightarrow R(y_1, \dots, y_m))]$

Θεώρημα

Έστω Σ ένα σύνολο τύπων A' τάξης, ως προς ένα λεξιλόγιο Λ .

Έστω $\Sigma[\approx / =] \cup \text{Αξ-Ισ}(\Lambda, \approx)$ το σύνολο των τύπων που προκύπτουν από τα Αξιώματα για την ισότητα και από τους τύπους του Σ , μεταγράφοντας το $=$ σε ένα νέο σύμβολο \approx με δύο ορίσματα, που δεν συμπεριλαμβάνεται στο λεξιλόγιο Λ .

Το σύνολο Σ είναι ικανοποιήσιμο, αν και μόνο αν

το σύνολο $\Sigma[\approx / =] \cup \text{Αξ-Ισ}(\Lambda, \approx)$ είναι ικανοποιήσιμο.

Ισοδύναμη μορφή των αξιωμάτων για την ισότητα (Huth-Ryan)

i) Ανακλαστικότητα $(\forall x) (x = x)$

ii) Αντικατάσταση (replacement), για οποιοδήποτε τύπο A' τάξης Φ

$$(\forall x) (\forall y) [(x = y) \rightarrow (\Phi\{x / z\} \rightarrow \Phi\{y / z\})]$$

Ισοδύναμοι παραγόμενοι κανόνες

$$\frac{}{t = t} \qquad \frac{t = t'}{t' = t} \qquad \frac{t_1 = t \qquad t = t_2}{t_1 = t_2}$$

Για κάθε συνάρτηση f :

$$\frac{t_1 = s_1 \dots t_m = s_m}{f(t_1, \dots, t_m) = f(s_1, \dots, s_m)}$$

Για κάθε σχέση R :

$$\frac{t_1 = s_1 \dots t_m = s_m \qquad R(t_1, \dots, t_m)}{R(s_1, \dots, s_m)}$$