
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Πραγματικοί αριθμοί, συναρτήσεις και γραφικές παραστάσεις

- **Σημαντικοί νόμοι των εκθετών:** α) $b^x b^y = b^{x+y}$ β) $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$ γ) $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$ δ) $(b^x)^y = b^{xy}$

- **Τύπος διωνυμικού αναπτύγματος:** Το $(a + b)^n$ είναι ένα άθροισμα όρων $\frac{n!}{(n-p)!p!} a^{n-p} b^p$, με έναν όρο για κάθε p από 0 έως n .

- **Απόλυτη τιμή:** $|a| = \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0 \\ -a & \text{αν } a < 0 \end{cases}$

- **Τριγωνική ανισότητα:** $|a + b| \leq |a| + |b|$

- **Τέσσερα διαστήματα με άκρα τα a και b :**

$$(a, b), [a, b], [a, b), (a, b]$$

- **Αναπαράσταση ανοικτών και κλειστών διαστημάτων χρησιμοποιώντας ανισότητες με απόλυτη τιμή:**

$$(a, b) = \{x : |x - c| < r\}, \quad [a, b] = \{x : |x - c| \leq r\}$$

όπου $c = \frac{1}{2}(a + b)$ είναι το μέσον και $r = \frac{1}{2}(b - a)$ είναι η ακτίνα.

- **Απόσταση d μεταξύ (x_1, y_1) και (x_2, y_2) :**

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- **Εξίσωση κύκλου με ακτίνα r και κέντρο (a, b) :**

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Ένα σημείο μηδενισμού ή ρίζα μιας συνάρτησης f είναι ο αριθμός c τέτοιος ώστε $f(c) = 0$.

- **Κριτήριο κατακόρυφης ευθείας:** Μια καμπύλη στο επίπεδο αποτελεί τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης του x αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ευθεία $x = a$ τέμνει την καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο.

- Μια συνάρτηση είναι:

(i) Γνησίως αύξουσα: $f(x_1) < f(x_2)$ αν $x_1 < x_2$

(ii) Αύξουσα: $f(x_1) \leq f(x_2)$ αν $x_1 < x_2$

(iii) Γνησίως φθίνουσα: $f(x_1) > f(x_2)$ αν $x_1 < x_2$

(iv) Φθίνουσα: $f(x_1) \geq f(x_2)$ αν $x_1 < x_2$.

- **Άρτια συνάρτηση:** $f(-x) = f(x)$ (η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y)
- **Περιττή συνάρτηση:** $f(-x) = -f(x)$ (η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων)
- **Τέσσερις τρόποι μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης της f :**

$f(x) + c$ Κατακόρυφη μετατόπιση κατά $|c|$ μονάδες (προς τα πάνω αν $c > 0$, προς τα κάτω αν $c < 0$)

$f(x + c)$ Οριζόντια μετατόπιση κατά $|c|$ μονάδες (προς τα δεξιά αν $c < 0$, προς τα αριστερά αν $c > 0$)

$kf(x)$ Κατακόρυφη αλλαγή κλίμακας κατά παράγοντα $|k|$, επέκταση αν $|k| > 1$, συμπίεση αν $0 < |k| < 1$, ενώ αν $k < 0$ η γραφική παράσταση ανακλάται κατά μήκος του άξονα x

$f(kx)$ Οριζόντια αλλαγή κλίμακας κατά παράγοντα $|k|$, συμπίεση αν $|k| > 1$, επέκταση αν $0 < |k| < 1$, ενώ αν $k < 0$ η γραφική παράσταση ανακλάται κατά μήκος του άξονα y

Τριγωνομετρία και Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

- Μια γωνία θ ακτινίων βαίνει σε τόξο μήκους θr σε έναν κύκλο ακτίνας r .
- Για να μετατρέψουμε ακτίνια σε μοίρες πολλαπλασιάζουμε με $180/\pi$.
- Για να μετατρέψουμε μοίρες σε ακτίνια πολλαπλασιάζουμε με $\pi/180$.
- Εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, όλες οι γωνίες στο βιβλίο δίνονται σε ακτίνια.
- Οι συναρτήσεις $f(\theta) = \cos \theta$ και $f(\theta) = \sin \theta$ ορίζονται με τη βοήθεια ορθογωνίων τριγώνων για οξείες γωνίες και ως συντεταγμένες ενός σημείου στον μοναδιαίο κύκλο για γενικές γωνίες:

$$\sin \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}, \quad \cos \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

- **Βασικές ιδιότητες του ημιτόνου και του συνημιτόνου:**

- Περιοδικότητα: $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$, $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$
- Ισοτιμία: $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$
- Βασική ταυτότητα:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

- Οι επιπλέον τέσσερις τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

Αντίστροφες Συναρτήσεις

- Μια συνάρτηση f είναι **ένα-προς-ένα** σε ένα πεδίο ορισμού D αν για κάθε τιμή c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση $x \in D$, ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $a, b \in D$, αν $a \neq b$, τότε $f(a) \neq f(b)$.
- Έστω ότι η f έχει πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R . Η **αντίστροφη** f^{-1} (αν υπάρχει) είναι η μοναδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού R και σύνολο τιμών D που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(f^{-1}(x)) = x$ και $f^{-1}(f(x)) = x$.
- Η αντίστροφη της f υπάρχει αν και μόνο αν η f είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της.
- Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση λύνουμε την $y = f(x)$ ως προς x συναρτήσει του y και παίρνουμε την $x = g(y)$. Η αντίστροφη είναι η συνάρτηση g .
- **Κριτήριο οριζόντιας ευθείας:** Η f είναι ένα-προς-ένα, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από την **ανάκλαση** της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$.
- Το **τόξο ημιτόνου** και το **τόξο συνημιτόνου** ορίζονται για $-1 \leq x \leq 1$:

$$\theta = \sin^{-1} x$$

είναι η μοναδική γωνία στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ τέτοια ώστε $\sin \theta = x$

$$\theta = \cos^{-1} x$$

είναι η μοναδική γωνία στο $[0, \pi]$ τέτοια ώστε $\cos \theta = x$

- Η $\tan^{-1} x$ και η $\cot^{-1} x$ ορίζονται για κάθε x :

$$\theta = \tan^{-1} x$$

είναι η μοναδική γωνία στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τέτοια ώστε $\tan \theta = x$

-

$$\theta = \cot^{-1} x$$

είναι η μοναδική γωνία στο $(0, \pi)$ τέτοια ώστε $\cot \theta = x$

- Η $\sec^{-1} x$ και η $\csc^{-1} x$ ορίζονται για $|x| \geq 1$:

-

$$\theta = \sec^{-1} x$$

είναι η μοναδική γωνία στο $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ τέτοια ώστε $\sec \theta = x$

-

$$\theta = \csc^{-1} x$$

είναι η μοναδική γωνία στο $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ τέτοια ώστε $\csc \theta = x$

Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

- Η $f(x) = b^x$ είναι η εκθετική συνάρτηση με βάση b (όπου $b > 0$ και $b \neq 1$).
- Η $f(x) = b^x$ είναι αύξουσα αν $b > 1$ και φθίνουσα αν $b < 1$.
- Ο αριθμός $e \approx 2.718$.
- Για $b > 0$ με $b \neq 1$, η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_b x$ είναι η αντίστροφη της $f(x) = b^x$:

$$y = \log_b x \iff x = b^y$$

- Ο φυσικός λογάριθμος είναι ο λογάριθμος με βάση e και συμβολίζεται με $\ln x$.
- $e^{\ln x} = x$ για $x > 0$ και $\ln(e^x) = x$ για κάθε x .
- **Σημαντικές λογαριθμικές ιδιότητες:**

$$(i) \log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \quad (ii) \log_b \left(\frac{x}{y} \right) = \log_b x - \log_b y$$

$$(iii) \log_b(x^n) = n \log_b x \quad (iv) \log_b 1 = 0 \text{ και } \log_b b = 1$$

- Τύποι αλλαγής βάσης:

$$b^x = a^{x \log_a b}, \quad b^x = e^{x \ln b}, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

- Το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (περιττή)}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (άρτια)}$$

Οι υπόλοιπες υπερβολικές συναρτήσεις:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

- Βασική ταυτότητα:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

- Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις και το πεδίο ορισμού κάθε μίας:

- $f(x) = \sinh^{-1} x$, για κάθε x $f(x) = \coth^{-1} x$, για $|x| > 1$
- $f(x) = \cosh^{-1} x$, για $x \geq 1$ $f(x) = \operatorname{sech}^{-1} x$, για $0 < x \leq 1$
- $f(x) = \tanh^{-1} x$, για $|x| < 1$ $f(x) = \operatorname{csch}^{-1} x$, για $x \neq 0$.

Όρια

- Εξ ορισμού, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ αν η $|f(x) - L|$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή παίρνοντας το x όσοδήποτε κοντά (αλλά όχι ίσο) στο c . Λέμε ότι:
 - Το όριο της $f(x)$ καθώς το x πλησιάζει το c είναι L , ή
 - Η $f(x)$ πλησιάζει (ή συγκλίνει) στο L καθώς το x πλησιάζει το c .
- Ο αυστηρός ορισμός (ονομάζεται ε - δ ορισμός): $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ αν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\text{αν } 0 < |x - c| < \delta, \quad \text{τότε } |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Αν η $f(x)$ πλησιάζει κάποιο όριο καθώς $x \rightarrow c$, τότε η τιμή του ορίου L είναι μοναδική.
- Αν η $f(x)$ δεν πλησιάζει κάποιο όριο καθώς $x \rightarrow c$, τότε λέμε ότι το $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ δεν υπάρχει.
- Το όριο μπορεί να υπάρχει ακόμα και αν η $f(c)$ δεν ορίζεται.

- **Πλευρικά όρια:**
 - $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L$ αν η $f(x)$ συγκλίνει στο L καθώς το x πλησιάζει το c μέσω τιμών μικρότερων του c .
 - $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$ αν η $f(x)$ συγκλίνει στο L καθώς το x πλησιάζει το c μέσω τιμών μεγαλύτερων του c .
- Το όριο υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα.
- **Άπειρα όρια:** $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ αν η $f(x)$ είναι θετική και γίνεται αυθαίρετα μεγάλη καθώς το x πλησιάζει το c και $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$ αν η $f(x)$ είναι αρνητική και γίνεται αυθαίρετα μεγάλη καθώς το x πλησιάζει το c .
- Στην περίπτωση των άπειρων πλευρικών ή αμφίπλευρων ορίων στο c , η κατακόρυφη ευθεία $x = c$ ονομάζεται **κατακόρυφη ασύμπτωτη**.
- **Οι βασικοί κανόνες των ορίων:** Αν τα $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ υπάρχουν και τα δύο, τότε:
 - $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) + \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow c} kf(x) = k \lim_{x \rightarrow c} f(x)$
 - $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right) \left(\lim_{x \rightarrow c} g(x)\right)$
 - Αν $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \neq 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)}$
 - Αν p, q είναι ακέραιοι με $q \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^{p/q} = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)^{p/q}$
 - Για n θετικό ακέραιο, $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right)^n$, $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}$
- Αν το $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ή το $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$ δεν υπάρχει, τότε δεν μπορούν να εφαρμοστούν οι βασικοί κανόνες των ορίων.
- **Κριτήριο Παρεμβολής:** Λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι εγκλωβισμένη στο $x = c$ αν υπάρχουν συναρτήσεις l και u τέτοιες ώστε $l(x) \leq f(x) \leq u(x)$ για κάθε $x \neq c$ σε ένα ανοιχτό διάστημα I που περιέχει το c και

$$\lim_{x \rightarrow c} l(x) = \lim_{x \rightarrow c} u(x) = L$$

Το κριτήριο παρεμβολής αναφέρει ότι σε αυτή την περίπτωση $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

- **Δύο σημαντικά τριγωνομετρικά όρια:**

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta} = 0$$

- **Όρια στο άπειρο:**

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ αν η $|f(x) - L|$ γίνεται οσοδήποτε μικρή καθώς το x αυξάνεται

- απεριόριστα.
- ο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ αν η $|f(x) - L|$ γίνεται οσοδήποτε μικρή καθώς το x μειώνεται απερίοριστα.
- ο $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$
- Μια οριζόντια ευθεία $y = L$ είναι **οριζόντια ασύμπτωτη** της f αν $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει καμία, μία ή δύο οριζόντιες ασύμπτωτες.
- Αν $n > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{-n} = 0$.
- Αν $n > 0$ είναι ακέραιος αριθμός, τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} \infty & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ -\infty & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}$
- Αν $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$ με $a_n, b_m \neq 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m}$$

Συνέχεια Συναρτήσεων

- Ορισμός:** Η f είναι συνεχής στο $x = c$ αν $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Αυτό σημαίνει ότι το $f(c)$ υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσα.
- Αν το $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ δεν υπάρχει ή αν υπάρχει αλλά δεν είναι ίσο με $f(c)$, τότε η f είναι **ασυνεχής** στο $x = c$.
- Αν η f είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, τότε η f λέγεται απλά **συνεχής**.
- Συνέχεια από δεξιά στο $x = c$: $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$.
- Συνέχεια από αριστερά στο $x = c$: $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$.
- Τρεις συνηθισμένες μορφές ασυνεχειών:**
 - Αιρόμενη ασυνέχεια:* το όριο υπάρχει, αλλά είτε το όριο δεν είναι ίσο με την τιμή $f(c)$ ή η $f(c)$ δεν ορίζεται.
 - Ασυνέχεια άλματος:* Τα πλευρικά όρια υπάρχουν αλλά δεν είναι ίσα.
 - Άπειρη ασυνέχεια:* Το όριο είναι άπειρο καθώς το x τείνει στο c από τη μία ή και από τις δύο πλευρές.
- Κανόνες συνέχειας:** Αθροίσματα, γινόμενα, πολλαπλασία, αντίστροφες συναρτήσεις και συνθέσεις συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχείς συναρτήσεις. Τα

ίδια ισχύουν για ένα πηλίκο f/g στα σημεία όπου $g(x) \neq 0$.

- Οι βασικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους: πολυώνυμα, ρητές συναρτήσεις, n -οστές ρίζες και αλγεβρικές συναρτήσεις, τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστροφες συναρτήσεις τους, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις.
- **Μέθοδος αντικατάστασης:** Αν η f είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο $x = c$, τότε η τιμή του ορίου $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ είναι $f(c)$.
- Αν ο τύπος για το $f(c)$ οδηγεί σε μια **απροσδιόριστη έκφραση** της μορφής:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty \cdot 0, \quad \infty - \infty$$

τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη (ή έχει απροσδιόριστη μορφή) στο $x = c$.

- **Αν η $f(x)$ είναι απροσδιόριστη στο $x = c$:**
 - Δοκιμάστε να μετασχηματίσετε αλγεβρικά την $f(x)$ σε μια νέα έκφραση που ορίζεται και είναι συνεχής στο $x = c$ και στη συνέχεια υπολογίστε με αντικατάσταση.
 - Εξετάστε το όριο αριθμητικά ή γραφικά ή υπολογίστε το με εξειδικευμένα θεωρήματα (όπως Bernoulli-L'Hôpital).
- **Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (ΘΕΤ):** Μια συνεχής συνάρτηση δεν μπορεί να παραλείπει τιμές. Ακριβέστερα, αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ με $f(a) \neq f(b)$ και αν M είναι ένας αριθμός αυστηρά ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$, τότε $f(c) = M$ για κάποιο $c \in (a, b)$.
- **Υπαρξη ριζών:** Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και αν μία από τις τιμές $f(a)$ και $f(b)$ είναι μη αρνητική και η άλλη μη θετική, τότε η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[a, b]$.

Ορισμός της Παραγώγου

- Το **πηλίκο διαφορών** είναι η κλίση της τέμνουσας ευθείας διαμέσου των σημείων P και Q στη γραφική παράσταση της f και είναι ίσο με:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{με } P = (a, f(a)) \text{ και } Q = (a+h, f(a+h))$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{με } P = (a, f(a)) \text{ και } Q = (x, f(x))$$

- Η **παραγώγος** $f'(a)$ ορίζεται από τα παρακάτω ισοδύναμα όρια:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Αν το όριο υπάρχει, λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = a$.

- Εξ ορισμού, η **εφαπτόμενη ευθεία** στο $P = (a, f(a))$ είναι η ευθεία που διέρχεται από το P με κλίση $f'(a)$ [υποθέτοντας ότι η $f'(a)$ υπάρχει].

- Η **εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας** στη μορφή σημείου-κλίσης:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

.

- Για να υπολογίσουμε την $f'(a)$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

:

- ο **Βήμα 1:** Αναπτύσσουμε τον αριθμητή στο πηλίκο διαφορών.
 - ο **Βήμα 2:** Διαιρούμε με h και απλοποιούμε.
 - ο **Βήμα 3:** Υπολογίζουμε την παράγωγο παίρνοντας το όριο.
- Για μικρά h έχουμε την **προσέγγιση πηλίκου διαφορών**:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

.

Η Παράγωγος ως Συνάρτηση

- Η **παράγωγος** f' είναι η συνάρτηση της οποίας η τιμή στο x είναι η παράγωγος $f'(x)$.
- Διαθέτουμε ποικίλους διαφορετικούς **συμβολισμούς** για την παράγωγο της $y = f(x)$:

$$y', \quad y'(x), \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}$$

Η τιμή της συνάρτησης σε ένα συγκεκριμένο σημείο $x = a$ γράφεται:

$$y'(a), \quad f'(a), \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}$$

- **Κανόνες παραγωγίσιμης:**
- Ο κανόνας της σταθεράς:

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

- Ο κανόνας της δύναμης:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- Ο κανόνας της εκθετικής συνάρτησης:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

- Οι κανόνες της γραμμικότητας:

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(cf)' = cf'$$

- Κανόνας γινομένου:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

- Κανόνας πηλίκου:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

- Οι παράγωγοι των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x, \quad \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x, \quad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$$

- Οι παράγωγοι των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\cos^{-1}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{d}{dx}\cot^{-1}x = -\frac{1}{x^2+1}, \quad \frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad \frac{d}{dx}\csc^{-1}x =$$

$$-\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

- Οι παράγωγοι των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων:

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}b^x = (\ln b)b^x, \quad \frac{d}{dx}\log_b x = \frac{1}{(\ln b)x}$$

- **Θυμηθείτε:** Η παράγωγος του fg δεν είναι ίση με $f'g'$. Ομοίως, η παράγωγος του f/g δεν είναι ίση με f'/g' .
- Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται τη συνέχεια: Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = a$, τότε η f είναι συνεχής στο $x = a$. Αντίθετα, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι παραγωγίσιμες.
- Αν υπάρχει η $f'(a)$, τότε η f είναι **τοπικά γραμμική** υπό την ακόλουθη έννοια: Καθώς μεγαθύνουμε στο σημείο $(a, f(a))$, η γραφική παράσταση σχεδόν δεν διακρίνεται από την εφαπτόμενη ευθεία της.

Ο κανόνας της αλυσίδας

- Ο κανόνας της αλυσίδας εκφράζει την $(f \circ g)'$ συναρτήσει των f' και g' :

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

- Με τον συμβολισμό του Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}, \quad \text{όπου } y = f(u) \text{ και } u = g(x)$$

- Γενικός κανόνας δύναμης:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1}g'(x)$$

- Γενικός κανόνας εκθετικού:

$$\frac{d}{dx}e^{g(x)} = e^{g(x)}g'(x)$$

Διαφορικά και Γραμμική Προσέγγιση

- **Συμβολισμός διαφορικών:** Το $dx = \Delta x$ είναι η μεταβολή του x , το $dy = f'(a)dx$ είναι η μεταβολή πάνω στην εφαπτόμενη ευθεία και το $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ είναι η μεταβολή της f . Με αυτόν τον συμβολισμό η διαφορική μορφή της γραμμικής προσέγγισης είναι:

$$\Delta y \approx dy = f'(a)dx \quad (\text{για μικρό } dx)$$

Ακρότατες Τιμές

- Οι **ακρότατες τιμές** της f σε ένα διάστημα I είναι οι ελάχιστες και οι μέγιστες τιμές της f για $x \in I$ (ονομάζονται επίσης και ολικά ακρότατα στο I).
- **Βασικό θεώρημα:** Αν η f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε η f έχει και ελάχιστο και μέγιστο στο $[a, b]$.
- Το $f(c)$ είναι ένα **τοπικό ελάχιστο** αν $f(x) \geq f(c)$ για κάθε x σε ένα ανοικτό διάστημα γύρω από το c . Τα τοπικά μέγιστα ορίζονται ομοίως.
- Το $x = c$ είναι ένα **κρίσιμο σημείο** της f αν είτε $f'(c) = 0$ είτε η $f'(c)$ δεν υπάρχει.
- Το **θεώρημα Fermat** για τοπικά ακρότατα: Αν το $f(c)$ είναι ένα τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο, τότε το c είναι ένα κρίσιμο σημείο.
- Για να βρούμε τις ακρότατες τιμές μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$:
 - **Βήμα 1:** Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία της f στο $[a, b]$.
 - **Βήμα 2:** Υπολογίζουμε την $f(x)$ στα κρίσιμα σημεία στο $[a, b]$ και στα άκρα. Το ελάχιστο και το μέγιστο στο $[a, b]$ βρίσκονται από τις τιμές που υπολογίστηκαν στο Βήμα 2.
- **Θεώρημα Rolle:** Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) και αν $f(a) = f(b)$, τότε υπάρχει κάποιο c μεταξύ των a και b τέτοιο ώστε:

$$f'(c) = 0$$

Θεώρημα μέσης τιμής και μονοτονία

- **Θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ):** Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) , τότε υπάρχει τουλάχιστον μία τιμή c στο (a, b) τέτοια ώστε:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Αυτό το συμπέρασμα γράφεται επίσης ως:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

- **Σημαντικό πόρισμα του ΘΜΤ:** Αν $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η f είναι σταθερή στο (a, b) .

- Το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζει αν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα:

$$f'(x) > 0 \text{ για } x \in (a, b) \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι αύξουσα στο } (a, b)$$

$$f'(x) < 0 \text{ για } x \in (a, b) \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι φθίνουσα στο } (a, b)$$

- Σε ένα διάστημα όπου ορίζεται η f το πρόσημο της $f'(x)$ μπορεί να αλλάζει μόνο στα κρίσιμα σημεία, οπότε η f είναι μονότονη (αύξουσα ή φθίνουσα) στα διαστήματα μεταξύ των κρίσιμων σημείων.
- Σε ένα διάστημα όπου ορίζεται η f για να βρούμε το πρόσημο της $f'(x)$ σε ένα διάστημα μεταξύ δύο κρίσιμων σημείων υπολογίζουμε το πρόσημο της $f'(x_0)$ σε ένα δοκιμαστικό σημείο x_0 στο διάστημα.
- **Κριτήριο πρώτης παραγώγου:** Αν η f είναι παραγωγίσιμη και το c είναι ένα κρίσιμο σημείο, τότε:
 - Πρόσημο $f'(x)$ στο c από $+$ σε $- \Rightarrow$ Τοπικό μέγιστο
 - Πρόσημο $f'(x)$ στο c από $-$ σε $+$ $\Rightarrow$ Τοπικό ελάχιστο

Δεύτερη παράγωγος και κυρτότητα

- Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f είναι **κυρτή** στο (a, b) αν η f' είναι αύξουσα και **κοίλη** αν η f' είναι φθίνουσα στο (a, b) .
- Τα πρόσημα των πρώτων δύο παραγώγων παρέχουν την ακόλουθη πληροφορία:
- **Πρώτη παράγωγος:**

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι αύξουσα}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι φθίνουσα}$$

- **Δεύτερη παράγωγος:**

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι κυρτή}$$

$$f''(x) < 0 \Rightarrow \text{η } f \text{ είναι κοίλη}$$

- Ένα **σημείο καμπής** είναι ένα σημείο $(c, f(c))$ όπου αλλάζει η κυρτότητα από κυρτή σε κοίλη ή αντίθετα.

- **Κριτήριο δεύτερης παραγώγου:** Αν $f'(c) = 0$ και η $f''(c)$ υπάρχει, τότε:
 - Το $f(c)$ είναι τοπικό μέγιστο αν

$$f''(c) < 0$$

- Το $f(c)$ είναι τοπικό ελάχιστο αν

$$f''(c) > 0$$

- Το κριτήριο αποτυγχάνει αν

$$f''(c) = 0$$

- Αν αυτό το κριτήριο αποτύχει, τότε χρησιμοποιούμε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου.

Κανόνας L'Hôpital

- **Κανόνας L'Hôpital:** Υποθέστε ότι οι f και g είναι παραγωγίσιμες κοντά στο a και ότι:

$$f(a) = g(a) = 0$$

Υποθέστε επίσης ότι $g'(x) \neq 0$ (εκτός ίσως από το a). Τότε:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

υπό την προϋπόθεση ότι το όριο στα δεξιά υπάρχει ή είναι άπειρο (∞ ή $-\infty$).

- Ο κανόνας L'Hôpital εφαρμόζεται σε απροσδιόριστες μορφές

$$0/0 \text{ και } \pm \infty/\infty$$

. Μπορεί επίσης να εφαρμοστεί σε όρια σε οποιαδήποτε από τις μορφές

$$0 \cdot \infty, \quad \infty - \infty, \quad 0^0, \quad 1^\infty \quad \text{και} \quad \infty^0$$

μετατρέποντας τις εκφράσεις σε κάποια άλλη με τη μορφή $0/0$ ή με τη μορφή $\pm \infty/\infty$.

- Ο κανόνας L'Hôpital εφαρμόζεται επίσης σε όρια καθώς $x \rightarrow \infty$ ή $x \rightarrow -\infty$.
- Κατά τη σύγκριση του **ρυθμού αύξησης συναρτήσεων** λέμε ότι η $f(x)$ αυξάνεται ταχύτερα από τη $g(x)$ και γράφουμε $g \ll f$ αν:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

Ανάλυση και χάραξη γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων

- Οι περισσότερες γραφικές παραστάσεις αποτελούνται από τόξα που έχουν ένα από τα τέσσερα βασικά σχήματα:
 - $++ \quad (f' > 0, f'' > 0) : \text{Αύξουσα και κυρτή}$
 - $+ - \quad (f' > 0, f'' < 0) : \text{Αύξουσα και κοίλη}$
 - $- + \quad (f' < 0, f'' > 0) : \text{Φθίνουσα και κυρτή}$
 - $- - \quad (f' < 0, f'' < 0) : \text{Φθίνουσα και κοίλη}$
- Ένα **σημείο μετάβασης** είναι ένα σημείο στο πεδίο ορισμού της f στο οποίο είτε η f' αλλάζει πρόσημο (τοπικό ελάχιστο ή μέγιστο) είτε η f'' αλλάζει πρόσημο (σημείο καμπής).
- Είναι χρήσιμο να σπάμε τη διαδικασία χάραξης μιας καμπύλης σε βήματα:
 - **Βήμα 0:** Βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - **Βήμα 1:** Προσδιορίστε τα πρόσημα των f' και f'' .
 - **Βήμα 2:** Σημειώστε τα σημεία μετάβασης και τους συνδυασμούς προσήμων.
 - **Βήμα 3:** Προσδιορίστε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $f(x)$.
 - **Βήμα 4:** Σχεδιάστε τόξα κατάλληλου σχήματος και ασυμπτωτικής συμπεριφοράς.

Ορισμένο Ολοκλήρωμα

- Ένα **άθροισμα Riemann** $R(f, P, C)$ για το διάστημα $[a, b]$ ορίζεται επιλέγοντας μια διαμέριση $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ και τυχαία σημεία $C = \{c_i\}$, όπου $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Έστω $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Τότε:

$$R(f, P, C) = \sum_{i=1}^N f(c_i) \Delta x_i$$

- Το μέγιστο από τα πλάτη Δx_i ονομάζεται **νόρμα** $\|P\|$ της διαμέρισης.
- Το **ορισμένο ολοκλήρωμα** είναι το όριο των αθροισμάτων Riemann (αν υπάρχει):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, C)$$

Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν το όριο υπάρχει.

- **Θεώρημα:** Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.
- Το **προσημασμένο εμβαδόν** της περιοχής μεταξύ της γραφικής παράστασης της f και του άξονα των x στο $[a, b]$ είναι $\int_a^b f(x) dx$.

- **Χρήση γεωμετρίας:** Όταν η γεωμετρία της υπό μελέτης περιοχής είναι απλή, το $\int_a^b f(x) dx$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας γεωμετρικούς τύπους για να βρούμε τα εμπλεκόμενα προσημασμένα εμβαδά.

•

$$\int_0^b x dx = \frac{1}{2}b^2 \quad \text{και} \quad \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}b^3$$

- **Ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων:**

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b C f(x) dx = C \int_a^b f(x) dx \quad \text{για οποιαδήποτε σταθερά } C$$

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad \text{για κάθε } a, b, c$$

- **Θεώρημα σύγκρισης:** Αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[a, b]$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

- Αν $m \leq f(x) \leq M$ στο $[a, b]$, τότε

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Αόριστο ολοκλήρωμα – Αντιπαράγωγος

- Η F ονομάζεται **αντιπαράγωγος** της f αν $F'(x) = f(x)$.
- Οποιοσδήποτε δύο αντιπαράγωγοι της f σε ένα διάστημα (a, b) διαφέρουν κατά μία σταθερά.
- Η γενική αντιπαράγωγος συμβολίζεται με το **αόριστο ολοκλήρωμα**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

- **Μερικοί τύποι ολοκλήρωσης:**

$$\int 0 dx = C, \quad \int k dx = kx + C, \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C, \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C, \quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \quad \int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C \quad (k \neq 0)$$

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx, \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- Για να λύσουμε το **πρόβλημα αρχικών τιμών** $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $y(x_0) = y_0$, βρίσκουμε πρώτα τη γενική αντιπαράγωγο $y = F(x) + C$. Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε το C χρησιμοποιώντας την αρχική συνθήκη $F(x_0) + C = y_0$.

Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, Μέρος Ι

- Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, Μέρος Ι αναφέρει ότι:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

όπου F είναι μια αντιπαράγωγος της f .

- Διαδικασία δύο βημάτων χρήσης του ΘΘΛ Ι για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_a^b f(x) dx$:
 - Βρείτε το:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

- Υπολογίστε το:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

- Οι τύποι των αντιπαράγωγων είναι χρήσιμοι για τον υπολογισμό ορισμένων ολοκληρωμάτων.

Το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, Μέρος ΙΙ

- Η συνάρτηση εμβαδού με κάτω άκρο a που ικανοποιεί την $A(a) = 0$:

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- ΘΘΛ ΙΙ: $A'(x) = f(x)$, ή ισοδύναμα:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

- Το ΘΘΛ ΙΙ δείχνει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα I έχει μια αντιπαράγωγο στο I – δηλαδή τη συνάρτηση εμβαδού της (με το κάτω άκρο να ανήκει στο I).
- Για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$$

γράφουμε $G(x) = A(g(x))$, όπου $A(x) = \int_a^x f(t) dt$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας:

$$G'(x) = A'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

- Δοκιμάζουμε τη **μέθοδο της αντικατάστασης** όταν η ολοκληρωτέα ποσότητα έχει τη μορφή $f(u(x))u'(x)$. Αν η F είναι μια αντιπαράγωγος της f , τότε:

$$\int f(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) + C$$

- Το **διαφορικό** της $u(x)$ σχετίζεται με το dx μέσω της σχέσης $du = u'(x) dx$.
- Η μέθοδος της αντικατάστασης εκφράζεται από τον **τύπο αλλαγής μεταβλητής**:

$$\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du$$

- **Τύπος αλλαγής μεταβλητής για ορισμένα ολοκληρώματα:**

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

- Υπάρχουν **δύο προσεγγίσεις** για τον υπολογισμό ορισμένου ολοκληρώματος με αλλαγή μεταβλητής:
 - Αλλάζουμε τα όρια της ολοκλήρωσης στα αντίστοιχα όρια του u και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα ως προς u .
 - Υπολογίζουμε την αντιπαράγωγο ως προς x και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τα αρχικά όρια a και b .
- **Δύο νέοι τύποι τριγωνομετρικών ολοκληρωμάτων:**

$$\int \tan \theta d\theta = \ln |\sec \theta| + C \quad \text{και} \quad \int \cot \theta d\theta = \ln |\sin \theta| + C$$

Εφαρμογές ολοκληρώματος

- Αν $f(x) \geq g(x)$ στο $[a, b]$, τότε η περιοχή μεταξύ των γραφικών παραστάσεων είναι κάθετα απλή και έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{εμβαδόν μεταξύ των γραφικών παραστάσεων} &= \int_a^b (y_{\text{πάνω}} - y_{\text{κάτω}}) dx = \\ &= \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \end{aligned}$$

- Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν μεταξύ των $y = f(x)$ και $y = g(x)$ σχεδιάζουμε την περιοχή για να βρούμε την $y_{\text{πανω}}$. Αν είναι αναγκαίο βρίσκουμε τα σημεία τομής λύνοντας την $f(x) = g(x)$.
- **Ολοκλήρωμα κατά μήκος του άξονα των y :** Το $\int_c^d g(y) dy$ είναι ίσο με το προσημασμένο εμβαδόν μεταξύ της γραφικής παράστασης και του άξονα των y για $c \leq y \leq d$. Το προσημασμένο εμβαδόν στα δεξιά του άξονα των y είναι θετικό και το προσημασμένο εμβαδόν στα αριστερά είναι αρνητικό.
- Αν $g(y) \geq h(y)$ στο $[c, d]$, τότε η $x = g(y)$ βρίσκεται στα δεξιά της $x = h(y)$ και η περιοχή είναι οριζόντια απλή:

$$\begin{aligned} \text{εμβαδόν μεταξύ των γραφικών παραστάσεων} &= \int_c^d (x_{\text{δεξιά}} - x_{\text{αριστερά}}) dy = \\ &= \int_c^d (g(y) - h(y)) dy \end{aligned}$$

Τριγωνομετρική αντικατάσταση

- **Τύποι τριγωνομετρικής αντικατάστασης:**

- Για μορφή

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

θέτουμε:

$$x = a \sin \theta, \quad dx = a \cos \theta d\theta, \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

- Για μορφή

$$\sqrt{x^2 + a^2}$$

θέτουμε:

$$x = a \tan \theta, \quad dx = a \sec^2 \theta d\theta, \quad \sqrt{x^2 + a^2} = a \sec \theta$$

- Για μορφή

$$\sqrt{x^2 - a^2}$$

θέτουμε:

$$x = a \sec \theta, \quad dx = a \sec \theta \tan \theta d\theta, \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$$

- **Διαδικασία υπολογισμού:**
 - **Βήμα 1:** Αντικατάσταση για την απαλοιφή της τετραγωνικής ρίζας.
 - **Βήμα 2:** Υπολογισμός του τριγωνομετρικού ολοκληρώματος.
 - **Βήμα 3:** Επαναφορά της αρχικής μεταβλητής (με τη χρήση ορθογωνίων τριγώνων).
- Οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις που περιέχουν την $\sqrt{x^2 + bx + c}$ αντιμετωπίζονται με **συμπλήρωση του τετραγώνου**.

Μέθοδος μερικών κλασμάτων

- Η μέθοδος των μερικών κλασμάτων μας επιτρέπει να διαχωρίσουμε μια περίπλοκη ρητή συνάρτηση σε ένα άθροισμα απλούστερων ρητών όρων που είναι ευκολότερο να ολοκληρωθούν από την αρχική συνάρτηση.
- Υποθέστε αρχικά ότι η P/Q είναι μια **γνήσια ρητή συνάρτηση** [δηλαδή $\deg(P) < \deg(Q)$] και ότι η $Q(x)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ρητά ως γινόμενο γραμμικών και ανάγωγων δευτεροβάθμιων όρων.
- Αν το $Q(x)$ είναι ίσο με ένα γινόμενο δυνάμεων γραμμικών παραγόντων $(x - a)^M$ και ανάγωγων δευτεροβάθμιων όρων $(x^2 + ax + b)^N$, τότε η ανάλυση μερικών κλασμάτων της ρητής συνάρτησης $P(x)/Q(x)$ είναι ένα άθροισμα όρων του παρακάτω τύπου:
 - Το $(x - a)^M$ συνεισφέρει:

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_M}{(x - a)^M}$$

- Το $(x^2 + ax + b)^N$ συνεισφέρει:

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + ax + b} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_Nx + B_N}{(x^2 + ax + b)^N}$$

- Οι μέθοδοι της αντικατάστασης τιμών και των απροσδιόριστων συντελεστών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό των σταθερών A_i και B_i στην ανάλυση μερικών κλασμάτων.
- Οι μεμονωμένοι όροι της ανάλυσης μπορούν στη συνέχεια να ολοκληρωθούν. Αντικατάσταση, συμπλήρωση του τετραγώνου και τριγωνομετρική αντικατάσταση ίσως είναι απαραίτητες για την ολοκλήρωση των όρων που αντιστοιχούν στο $(x^2 + ax + b)^N$.
- Αν η P/Q δεν είναι γνήσια, χρησιμοποιήστε τη **διαίρεση πολωνύμων** για να εκφράσετε το P/Q ως άθροισμα ενός πολωνύμου και μιας γνήσιας ρητής συνάρτησης. Η μέθοδος των μερικών κλασμάτων μπορεί να εφαρμοστεί στη συνέχεια στη γνήσια ρητή συνάρτηση.

Στρατηγική για την ολοκλήρωση

- **Απλοποίηση:** Κάντε όποια απλοποίηση είναι εφικτή.
- **Αντικατάσταση:** Θεωρήστε πιθανές αντικαταστάσεις,

$$u = g(x)$$

έχοντας υπόψη ότι θα χρειαστείτε την παρουσία της $g'(x)$ αφού

$$du = u'(x) dx$$

- **Ολοκλήρωση κατά παράγοντες:** Θεωρήστε την ολοκλήρωση κατά παράγοντες επιλέγοντας το u να είναι μια συνάρτηση που μπορεί να παραγωγιστεί, το dv να είναι κάτι που μπορεί να ολοκληρωθεί και τέτοια ώστε το

$$\int v du$$

να είναι απλούστερο ολοκλήρωμα από το αρχικό. Λάβετε υπόψη ότι η ολοκλήρωση κατά παράγοντες μπορεί να λειτουργήσει ακόμη και αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν είναι ένα προφανές γινόμενο, αρκεί τα u και dv να επιλεγούν κατάλληλα.

- **Τριγωνομετρικό ολοκλήρωμα:** Αν το ολοκλήρωμα είναι τριγωνομετρικό της μορφής

$$\int \sin^n x \cos^m x dx \quad \text{ή} \quad \int \tan^n x \sec^m x dx$$

τότε μπορούν να εφαρμοστούν οι τριγωνομετρικές ταυτότητες και οι αναγωγικοί τύποι.

- **Τριγωνομετρική αντικατάσταση:** Περιέχει το ολοκλήρωμα

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{ή} \quad \sqrt{x^2 + a^2};$$

Αν ναι, τότε δοκιμάστε μια τριγωνομετρική αντικατάσταση.

- **Μερικά κλάσματα:** Είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση ρητή

$$\frac{P}{Q}$$

για πολυώνυμα P και Q ; Αν ναι, η μέθοδος των μερικών κλασμάτων ίσως σας επιτρέπει να διαχωρίσετε τη συνάρτηση σε ένα άθροισμα απλούστερων ρητών όρων που μπορούν να ολοκληρωθούν.

- **Πίνακας ολοκληρωμάτων:** Προσδιορίστε αν το ολοκλήρωμα, μετά από κατάλληλο χειρισμό, ταιριάζει με κάποιο ολοκλήρωμα σε έναν πίνακα ολοκληρωμάτων.
- **Υπολογιστικό σύστημα άλγεβρας:** Εξετάστε τη χρήση ενός υπολογιστικού συστήματος άλγεβρας για να βρείτε το ολοκλήρωμα.
- **Αριθμητική προσέγγιση:** Αν το ολοκλήρωμα είναι ορισμένο και δεν λειτουργεί καμία από τις παραπάνω μεθόδους, προσεγγίστε το ολοκλήρωμα αριθμητικά.

Γενικευμένο ολοκλήρωμα

- Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα ορίζεται ως το όριο ορισμένων ολοκληρωμάτων:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει** αν αυτό το όριο υπάρχει και **αποκλίνει** διαφορετικά.

- Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b)$ και $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$, τότε:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow b^-} \int_a^R f(x) dx$$

- Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \pm\infty$, όπου

$a < c < b$ και αν τα $\int_a^c f(x) dx$ και $\int_c^b f(x) dx$ συγκλίνουν, τότε:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα της x^{-p} ονομάζεται **p -ολοκλήρωμα**. Για $a > 0$:

- $p > 1$: Το $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ συγκλίνει και το $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ αποκλίνει.

- $p < 1$: Το $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ αποκλίνει και το $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$ συγκλίνει.

- $p = 1$: Τα $\int_a^\infty \frac{dx}{x}$ και $\int_0^a \frac{dx}{x}$ αποκλίνουν και τα δύο.

- **Κριτήριο σύγκρισης:** Έστω ότι οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για $x \geq a$. Τότε:

- Αν το $\int_a^\infty f(x) dx$ συγκλίνει, τότε το $\int_a^\infty g(x) dx$ συγκλίνει.

- Αν το $\int_a^\infty g(x) dx$ αποκλίνει, τότε το $\int_a^\infty f(x) dx$ αποκλίνει.

- Το κριτήριο σύγκρισης δεν παρέχει καμία πληροφορία αν αποκλίνει το ολοκλήρωμα της μεγαλύτερης συνάρτησης ή αν συγκλίνει το ολοκλήρωμα της μικρότερης.
- Το κριτήριο σύγκρισης ισχύει επίσης για γενικευμένα ολοκληρώματα συναρτήσεων με άπειρες ασυνέχειες σε άκρο του ολοκληρώματος.

Ακολουθίες

- Μια ακολουθία $\{a_n\}$ **συγκλίνει** σε ένα όριο L αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } n > M$$

Γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow L$$

- Αν δεν υπάρχει το όριο λέμε ότι η $\{a_n\}$ **αποκλίνει**.
- Ειδικότερα, αν οι όροι αυξάνονται απεριόριστα λέμε ότι η $\{a_n\}$ αποκλίνει στο άπειρο.
- Αν $a_n = f(n)$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.
- Μια **γεωμετρική ακολουθία** είναι μια ακολουθία $a_n = cr^n$, όπου τα c και r είναι μη μηδενικά. Συγκλίνει στο 0 για $-1 < r < 1$, συγκλίνει στο c για $r = 1$ και αποκλίνει διαφορετικά.
- Οι βασικοί κανόνες των ορίων και το κριτήριο παρεμβολής ισχύουν και για τις ακολουθίες.
- Αν η f είναι συνεχής και $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(L)$.
- Μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι:
 - **άνω φραγμένη** από το M αν $a_n \leq M$ για κάθε n .
 - **κάτω φραγμένη** από το m αν $a_n \geq m$ για κάθε n .
 Αν η $\{a_n\}$ είναι άνω και κάτω φραγμένη τότε ονομάζεται **φραγμένη**.
- Μια ακολουθία $\{a_n\}$ is **μονότονη** αν είναι αύξουσα ($a_n < a_{n+1}$) ή φθίνουσα ($a_{n+1} < a_n$).
- Οι φραγμένες μονότονες ακολουθίες συγκλίνουν.

Σειρές

- Μια **απειροσειρά** είναι μια έκφραση:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Ονομάζουμε το a_n γενικό όρο της σειράς. Μια απειροσειρά μπορεί να ξεκινά από $n = k$ για οποιοδήποτε ακέραιο k .

- Το **N -οστό μερικό άθροισμα** είναι το πεπερασμένο άθροισμα των όρων έως και τον N -οστό όρο:

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_N$$

- Εξ ορισμού το **άθροισμα** μιας απειροσειράς είναι το όριο $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$. Αν το όριο υπάρχει, λέμε ότι η σειρά είναι **συγκλίνουσα** ή ότι συγκλίνει στο άθροισμα S . Αν το όριο δεν υπάρχει, λέμε ότι η απειροσειρά **αποκλίνει**.
- Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αυξάνεται απεριόριστα, λέμε ότι η σειρά

αποκλίνει στο άπειρο.

- **Κριτήριο απόκλισης του n -οστού όρου:** Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Ωστόσο, μια σειρά μπορεί να αποκλίνει ακόμη και αν ο γενικός της όρος a_n τείνει στο μηδέν.

- **Μερικό άθροισμα μιας γεωμετρικής σειράς:**

$$c + cr + cr^2 + cr^3 + \dots + cr^N = \frac{c(1 - r^{N+1})}{1 - r}$$

- **Γεωμετρική σειρά:** Υποθέστε ότι $c \neq 0$. Αν $|r| < 1$, τότε:

$$\sum_{n=0}^{\infty} cr^n = c + cr + cr^2 + cr^3 + \dots = \frac{c}{1 - r}$$

Η γεωμετρική σειρά αποκλίνει αν $|r| \geq 1$.

Κριτήρια σύγκλισης σειρών

- Τα μερικά αθροίσματα S_N μιας θετικής σειράς

$$\sum a_n$$

σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία.

- **Θεώρημα μερικών αθροισμάτων για θετικές σειρές:** Μια θετική σειρά συγκλίνει αν τα μερικά της αθροίσματα S_N είναι φραγμένα. Διαφορετικά αποκλίνει.
- **Κριτήριο ολοκληρώματος:** Υποθέστε ότι η f είναι θετική, φθίνουσα και συνεχής για $x > M$. Θέτουμε $a_n = f(n)$.
 - Αν το

$$\int_M^{\infty} f(x) dx$$

συγκλίνει, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει.

- Αν το

$$\int_M^{\infty} f(x) dx$$

αποκλίνει, τότε και η $\sum a_n$ αποκλίνει.

- **Σειρές- p :** Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

- **Κριτήριο άμεσης σύγκρισης:** Έστω ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $0 \leq a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq M$.

- Αν η $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει.
- Αν η $\sum a_n$ αποκλίνει, τότε η $\sum b_n$ αποκλίνει.

- **Κριτήριο οριακής σύγκρισης:** Έστω ότι οι $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι θετικές και υπάρχει το παρακάτω όριο:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

- Αν $L > 0$, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η $\sum b_n$.
- Αν $L = \infty$ και η $\sum a_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum b_n$ συγκλίνει.
- Αν $L = 0$ και η $\sum b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει.

- **Κριτήριο λόγου:** Έστω ότι υπάρχει το

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

- Τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει απολύτως αν $\rho < 1$.
- Τότε η $\sum a_n$ αποκλίνει αν $\rho > 1$.
- Το κριτήριο είναι ασαφές αν $\rho = 1$.

- **Κριτήριο ρίζας:** Έστω ότι υπάρχει το

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

- Τότε η $\sum a_n$ συγκλίνει απολύτως αν $L < 1$.
- Τότε η $\sum a_n$ αποκλίνει αν $L > 1$.
- Το κριτήριο είναι ασαφές αν $L = 1$.