Βασικά Μαθηματικά

Σημειώσεις
(σε εξέλιξη ve9)

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Ηλεκτρονικών Υπολογιστών & Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

2021

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Θα χρησιμοποιούμε διάφορα συστήματα αριθμών. Σκοπός μας δεν είναι να δείξουμε την κατασκευή αυτών των συστημάτων, αλλά να δώσουμε και αποδείξουμε, δεχόμενοι την ύπαρξή τους, διάφορες ιδιότητες αυτών.

Επικαλούμενοι τη γνώση και εμπειρία που αποκτήθηκε από τη μελέτη των Μαθηματικών στο λύκειο και χάριν επικοινωνίας δεχόμαστε να συμβολίζουμε με

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

τους **φυσικούς** αριθμούς (natural numbers), δηλαδή τους αριθμούς που χρησιμοποιούμε για να μετράμε. Οι **ακέραιοι** αριθμοί (integer numbers) είναι όλοι οι φυσικοί, το μηδέν, καθώς και οι αρνητικοί των φυσικών αριθμών

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

έτσι ώστε εάν ο m είναι ακέραιος, η εξίσωση $m+n = 0$ έχει λύση στους ακεραίους ($n = -m$), γεγονός που δεν συμβαίνει στους φυσικούς, καθότι $m + n \neq 0$ για κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών.

Οι **ρητοί** αριθμοί (rational numbers) είναι όλα τα κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακεραίους αριθμούς, όπου βέβαια ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Οι ρητοί αριθμοί περιέχουν τους ακεραίους μιας και εάν ο n είναι ακέραιος, τότε $n = n/1$, οπότε ο n είναι ρητός. Επιπλέον εάν $r \neq 0$ είναι ρητός η εξίσωση $rs = 1$ έχει λύση στους ρητούς ($s = 1/r$), πράγμα που δεν συμβαίνει στους ακεραίους, επειδή για κάθε ζευγάρι ακεραίων $m \neq 0$ και n είναι $mn \neq 1$, εκτός και αν $m = n = \pm 1$. Έτσι οι ρητοί αριθμοί είναι οι

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n},\ \text{όπου ο } m \text{ είναι ακέραιος και ο } n \text{ φυσικός}\right\},$$

μιας και για παράδειγμα $2/(-3) = (-2)/3$. Εάν $r = m/n$ με $m \neq 0$ μπορούμε να θεωρούμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n είναι 1, δηλαδή οι m και n είναι **πρώτοι** μεταξύ τους. Στη πραγματικότητα ο αριθμός $r = m/n$ παριστάνει όλους τους ρητούς της μορφής $(km)/(kn)$, όπου το k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός διάφορος του 0.

Γνωρίζουμε ακόμη ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν είναι ρητοί, όπως για παράδειγμα ο αριθμός $\sqrt{2}$ που παριστάνει το μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους ένα. Πράματι εάν συνέβαινε ο αριθμός αυτός να ήταν ρητός τότε θα γράφονταν στη μορφή

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n},$$

για κάποιους θετικούς και πρώτους μεταξύ τους ακεραίους m και n. Υψώνοντας στο τετράγωνο και πολλαπλασιάζοντας θα είχαμε $m^2 = 2n^2$. Αυτό θα σήμαινε ότι ο m^2, άρα και ο m (γιατί;) θα ήταν άρτιος αριθμός, δηλαδή $m = 2k$, για κάποιο φυσικό αριθμό k. Τότε όμως θα ήταν $4k^2 = 2n^2$, ή ισοδύναμα $n^2 = 2k^2$, που θα συνεπαγόταν, όπως πριν, ότι ο n θα ήταν άρτιος αριθμός, δηλαδή $n = 2l$, για κάποιο φυσικό αριθμό l. Τότε όμως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των m και n θα ήταν τουλάχιστον 2. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί ότι ο $\sqrt{3}$, και ο $\sqrt{n}$, όπου ο n είναι φυσικός αριθμός που δεν είναι τέλειο τετράγωνο δεν είναι ρητοί αριθμοί. Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **άρρητοι** (irrational numbers). Άρρητοι αριθμοί είναι επίσης οι π, e, e^{π}. Οι ρητοί αριθμοί μαζί με τους άρρητους αριθμούς αποτελούν τους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι οι πραγματικοί αριθμοί είναι

$$\mathbb{R} = \{x,\ \text{όπου ο } x \text{ είναι είτε ρητός, είτε άρρητος }\}.$$

Η γεωμετρική εικόνα που έχουμε για τους πραγματικούς αριθμούς είναι ότι αυτοί μπορούν να θεωρηθούν ως όλα τα σημεία μίας ευθείας.

Χρησιμοποιούμε επίσης τις εκφράσεις “$P \Rightarrow Q$” και “$P \Leftrightarrow Q$” για να δηλώσουμε αντίστοιχα ότι «το γεγονός P συνεπάγεται το γεγονός Q» και «τα γεγονότα P και Q είναι ισοδύναμα». Σημειώνουμε ότι “$P \Leftrightarrow Q$” σημαίνει ακριβώς “$P \Rightarrow Q$ και $Q \Rightarrow P$”. Ισοδύναμες διατυπώσεις είναι οι

- $P \Rightarrow Q$:
  «Q συνάγεται από το P», ή
  «P είναι ικανή συνθήκη για Q», ή
  «Q είναι αναγκαία συνθήκη για P».
- $P \Leftrightarrow Q$:
  «P εάν και μόνον εάν Q», ή
  «P τότε και μόνον τότε όταν Q», ή
  «P είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για Q», ή
  «P συνεπάγεται Q και αντίστροφα».

Τέλος υπενθυμίζουμε ότι αν με $\neg R$ συμβολίσουμε την άρνηση του γεγονότος R τότε η “$P \Rightarrow Q$” είναι ισοδύναμη με την “$\neg Q \Rightarrow \neg P$”.

Μέρος I

Σύνολα, Συναρτήσεις, Αριθμοί

Κεφάλαιο 1

Σύνολα και συναρτήσεις

1.1 Σύνολα

Η έννοια του **συνόλου** (set) στα Μαθηματικά είναι αρχική και δεν επιδέχεται ορισμού. Είναι ανάλογη της έννοιας του σημείου και της ευθείας στην ευκλείδια γεωμετρία. Ωστόσο λέγοντας σύνολο εννοούμε μια συλλογή διακεκριμμένων αντικειμένων που αποτελούν ολότητα. Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των λέξεων στον πρώτο στίχο της Ιλιάδας, το σύνολο των σημείων ενός ευθυγράμμου τμήματος, το σύνολο των ριζών μιας αλγεβρικής εξίσωσης.

Τα σύνολα τα συμβολίζουμε, συνήθως, με κεφαλαία γράμματα $A, B, \ldots$. Ένα αντικείμενο που ανήκει στο σύνολο A λέγεται **στοιχείο** ή **σημείο** του A. Τα στοιχεία συνόλων τα συμβολίζουμε με πεζά γράμματα. Εάν το x είναι στοιχείο του A γράφουμε $x \in A$ και λέμε ότι το x **ανήκει** στο A ή ότι το x είναι στοιχείο του A. Εάν το x δεν είναι στοιχείο του A γράφουμε $x \notin A$. Εάν A είναι ένα σύνολο με στοιχεία τα x, y, z γράφουμε $A = \{x, y, z\}$.

Ορισμός 1.1. Εάν A και B είναι δύο σύνολα

(1) Θα λέμε ότι το A είναι **υποσύνολο** (subset) του B και γράφουμε $A \subseteq B$ ή $B \supseteq A$ εάν κάθε στοιχείο του A περιέχεται στο σύνολο B. Μερικές φορές θέλοντας να δηλώσουμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B, υπάρχει δηλαδή στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A γράφουμε $A \subsetneq B$.

(2) Θα λέμε ότι τα δύο σύνολα είναι **ίσα** και γράφουμε $A = B$ εάν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Εάν τα A και B δεν είναι ίσα γράφουμε $A \neq B$.

Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι τα παρακάτω αποτελέσματα. Καταρχήν εάν $A = \{x, y, z\}$ και $B = \{y, z, x\}$, τότε $A = B$. Επίσης για κάθε σύνολο A ισχύει $A \subseteq A$, ενώ αν $A = B$ τότε $A \subseteq B$ και

$B \subseteq A$. Συγκεκριμμένα έχουμε

Πρόταση 1.1. *Εάν A και B είναι δύο σύνολα, τότε $A = B$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $A = B$, τότε κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A, επομένως $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Υποθέτουμε τώρα ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, και ας υποθέσοθμε ότι $A \neq B$. Τότε θα υπάρχει στοιχείο του ενός συνόλου, έστω του A, το οποίο δεν περιέχεται στο B, αυτό όμως είναι άτοπο αφού $A \subseteq B$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι υπάρχει στοιχείο του B, το οποίο δεν περιέχεται στο A. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $A \neq B$, κατά συνέπεια $A = B$. □

Ένα σύνολο μπορεί να δηλωθεί με **αναγραφή** των στοιχείων του, για παράδειγμα εάν F είναι το σύνολο των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου, τότε

$$F = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\},$$

ή με **περιγραφή** των στοιχείων του όπου για το ίδιο F έχουμε

$$F = \{x : x \text{ είναι φωνήεν του ελληνικού αλφαβήτου}\}.$$

Παράδειγμα 1.1. Εάν D είναι το σύνολο των λέξεων μήκους τρία που παράγονται με αλφάβητο το $\{0, 1\}$, τότε

$$D = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}, \quad \text{ή}$$
$$D = \{xyz : x \in \{0, 1\},\ y \in \{0, 1\},\ z \in \{0, 1\}\}.$$

• Το σύνολο που περιέχει κανένα στοιχείο λέγεται **κενό σύνολο** (empty set ή null set) και συμβολίζεται με $\varnothing$. Σημειώνουμε ότι εάν A είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο τότε $\varnothing \subseteq A$ γιατί κάθε στοιχείο του $\varnothing$ περιέχεται στο A, ισοδύναμα δεν υπάρχει στοιχείο του $\varnothing$ που να μη περιέχεται στο A.

• Σε αρκετές περιπτώσεις τα σύνολα που χρησιμοποιούμε είναι ή θεωρούνται υποσύνολα ενός και του αυτού συνόλου το οποίο θα ονομάζουμε **βασικό σύνολο**, ή **σύμπαν** (universe). Συνήθως το συμβολίζουμε με Ω. Παρατηρούμε ότι για κάθε υποσύνολο A του Ω έχουμε $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

1.2 Πράξεις συνόλων

Έστω ότι A και B είναι υποσύνολα του Ω.

(1) Η **ένωση** (union) των A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A και B. Συμβολίζεται με $A \cup B$, έτσι

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}. \tag{1.1}$$

Παρατηρούμε ότι $A \cup B = B \cup A$. Σχηματικά μπορούμε να δούμε την ένωση δύο συνόλων σε ένα διάγραμμα του Venn, βλέπε Σχήμα 1.1, το οποίο δείχνει δύο τυχαία σύνολα η ένωση των οποίων είναι το χρωματισμένο τμήμα.

(2) Η **τομή** (intersection) των A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B. Συμβολίζεται με $A \cap B$, έτσι

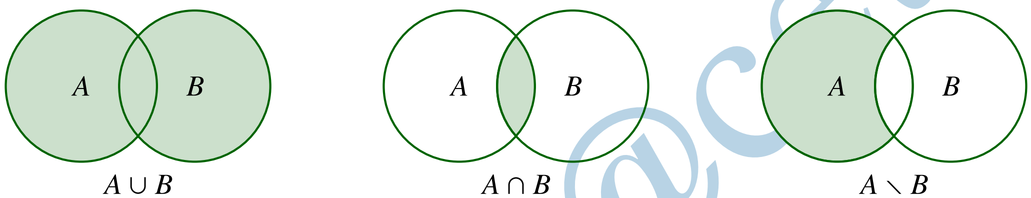
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}. \tag{1.2}$$

Παρατηρούμε ότι $A \cap B = B \cap A$. Εάν $A \cap B = \varnothing$ τότε τα σύνολα A και B λέγονται **ξένα μεταξύ τους** ή **διαζευγμένα**. Την τομή δύο συνόλων μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 1.1.

(3) Η **διαφορά** (difference) του A από το B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B. Συμβολίζεται με $A \setminus B$, ή $A - B$, έτσι

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}. \tag{1.3}$$

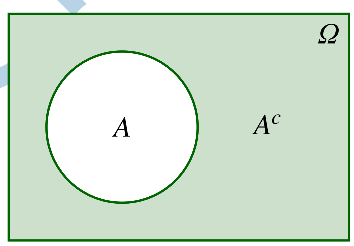
Παρατηρούμε ότι $A \setminus B \neq B \setminus A$. Την διαφορά δύο συνόλων μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Η ένωση $A \cup B$, η τομή $A \cap B$ και η διαφορά $A \setminus B$ δύο συνόλων A και B.

(4) Το **συμπλήρωμα** (complement) ενός συνόλου A ως προς το σύμπαν Ω είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A. Συμβολίζεται με A^c, έτσι

$$A^c = \{x : x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}. \tag{1.4}$$



Σχήμα 1.2: Το συμπλήρωμα A^c του συνόλου A.

Συγκρίνοντας με την (1.3), βλέπε και Σχήμα 1.2, παρατηρούμε ότι $A^c = \Omega \setminus A$. Επιπλέον ισχύουν οι νόμοι

$$A \cup A^c = \Omega, \qquad A \cap A^c = \varnothing, \qquad (A^c)^c = A. \tag{1.5}$$

Από την (1.3) επίσης έχουμε

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\} = \{x : x \in A \text{ και } x \in B^c\} = A \cap B^c. \tag{1.6}$$

(5) Η **συμμετρική διαφορά** (symmetric difference) των A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα $A \setminus B$ και $B \setminus A$. Συμβολίζεται με $A \vartriangle B$, έτσι

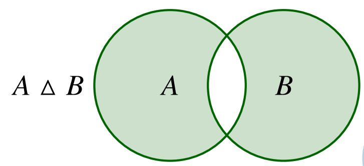
$$A \vartriangle B = \{x : x \in A \setminus B \text{ ή } x \in B \setminus A\}. \tag{1.7}$$

Από την (1.1) βλέπουμε ότι

$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \tag{1.8}$$

ενώ μπορεί επίσης να δειχθεί, βλέπε Σχήμα 1.3, ότι

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (B \cap A). \tag{1.9}$$



Σχήμα 1.3: Η συμμετρική διαφορά $A \vartriangle B$ δύο συνόλων A και B.

Ιδιότητες και συνέπειες των πράξεων. Εάν A, B, C είναι σύνολα, υποσύνολα ενός βασικού συνόλου, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες/νόμοι:

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing, \qquad A \setminus \varnothing = A, \tag{1.10}$$

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A, \qquad A \setminus A = \varnothing. \tag{1.11}$$

Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A. \tag{1.12}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{1.13}$$

Επιμεριστική ιδιότητα:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{1.14}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{1.15}$$

Νόμοι του De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \tag{1.16}$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \tag{1.17}$$

Ενδεικτικά αποδεικνύουμε την ιδιότητα (1.16) του De Morgan. Η απόδειξη των υπόλοιπων νόμων αφήνεται ως άσκηση.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.1 αρκεί να δείξουμε ότι $(A\cup B)^c \subseteq A^c\cap B^c$ και $A^c\cap B^c \subseteq (A\cup B)^c$. Έστω ένα τυχαίο $x \in (A\cup B)^c$, τότε $x \notin (A\cup B) \Rightarrow x \notin A$ και $x \notin B \Rightarrow x \in A^c$ και $x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι κάθε στοιχείο του $(A\cup B)^c$ είναι και στοιχείο του $A^c\cap B^c$, ή ισοδύναμα $(A\cup B)^c \subseteq A^c\cap B^c$. Έστω τώρα $x \in A^c\cap B^c \Rightarrow x \in A^c$ και $x \in B^c \Rightarrow x \notin A$ και $x \notin B \Rightarrow x \notin A\cup B \Rightarrow x \in (A\cup B)^c$, άρα όπως πριν συμπεραίνουμε ότι $A^c\cap B^c \subseteq (A\cup B)^c$. Έτσι τελικά έχουμε το ζητούμενο. □

Ορισμός 1.2. Το **καρτεσιανό γινόμενο** (cartesian product) των μη κενών συνόλων A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων της μορφής (a,b) όπου $a \in A$ και $b \in B$. Συμβολίζεται με $A\times B$, έτσι

$$A\times B = \{(a,b) : a \in A \text{ και } b \in B\}. \tag{1.18}$$

Το στοιχείο (a,b) λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος** με πρώτο στοιχείο το a και δεύτερο το b.

Η ισότητα στο καρτεσιανό γινόμενο ορίζεται με τη σχέση

$$(a,b) = (a',b') \quad \text{εάν και μόνον εάν } a = a' \text{ και } b = b'. \tag{1.19}$$

Κατά συνέπεια $(a,b) \neq (b,a)$ εκτός εάν $a = b$. Εν γένει $A\times B \neq B\times A$. Εάν $A = B$ γράφουμε $A\times A = A^2$.

Ορισμός 1.3. Εάν A είναι ένα σύνολο με $\mathcal{P}(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Έτσι

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}. \tag{1.20}$$

Το σύνολο $\mathcal{P}(A)$ λέγεται **δυναμοσύνολο** (power set) του A.

Βλέπουμε αμέσως ότι $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ και $A \in \mathcal{P}(A)$. Τονίζουμε ότι τα στοιχεία του δυναμοσυνόλου είναι σύνολα.

Παράδειγμα 1.2. Εάν $A = \{0,1,2\}$, τότε

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι εάν το A αποτελείται από n στοιχεία τότε το $\mathcal{P}(A)$ περιέχει 2^n στοιχεία.

Παρατήρηση 1.1. Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο τότε ισχύουν τα παρακάτω

$$\varnothing \neq \{\varnothing\}, \quad \varnothing \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq \mathcal{P}(A), \quad \varnothing \in \mathcal{P}(A), \quad \{\varnothing\} \subseteq \mathcal{P}(A).$$

Να δοθεί παράδειγμα συνόλου A τέτοιου ώστε $\varnothing \in A$.

Παρατήρηση 1.2 (Γενικεύσεις). Ας θεωρήσουμε την οικογένεια συνόλων $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, τότε ορίζουμε

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in A_k \text{ για ένα τουλάχιστον } k \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \tag{1.21}$$

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in A_k \text{ για κάθε } k \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \tag{1.22}$$

Εάν ορίσουμε $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, τότε μπορούμε να γράφουμε

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A, \tag{1.23}$$

Εάν τώρα $\mathcal{F}$ είναι μία τυχαία μη κενή οικογένεια συνόλων ως γενίκευση των σχέσεων (1.23) έχουμε

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A \text{ για κάποιο } A \in \mathcal{F}\} \tag{1.24}$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{x : x \in A \text{ για όλα τα } A \in \mathcal{F}\}. \tag{1.25}$$

Παρόμοια εάν $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{A \in \mathcal{F}} A \\ &= \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots a_n \in A_n, \} \end{aligned} \tag{1.26}$$

1.3 Συναρτήσεις

Η έννοια της **συνάρτησης** (function) είναι για τα Μαθηματικά εξίσου βασική όπως αυτή του συνόλου.

Ορισμός 1.4. Εάν A και B είναι δύο σύνολα μία συνάρτηση f από το A στο B είναι μία αντιστοιχία ή νόμος ώστε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται με ένα και μόνο στοιχείο του B. Εάν f είναι μία συνάρτηση από το A στο B γράφουμε $f : A \to B$. Εάν $x \in A$ με $f(x)$ συμβολίζουμε το στοιχείο του B που αντιστοιχεί μέσω της f στο x. Λέμε ότι το $f(x)$ είναι η **εικόνα** του x μέσω της f.

Πριν απο τον 18ο αιώνα μία συνάρτηση δηλώνονταν με κάποιο μαθηματικό τύπο που επέτρεπε υπολογισμούς, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις που γνωρίζουμε από την προπανεπιστημιακή μας παιδεία $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = \sqrt{x}/(x^2 + 1)$. Έγινε όμως αντιληπτό ότι αυτό δεν ισχύει πάντα. Για παράδειγμα εάν n είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός και $f(n) =$ "το πλήθος των θετικών διαιρετών του n", τότε δεν υπάρχει τύπος για το $f(n)$. Συνώνυμα της συνάρτησης είναι η **απεικόνιση** (mapping), ή **μετασχηματισμός** (transformation), καθόσον εάν $f : A \to B$ η f απεικονίζει το A στο B, ή μετασχηματίζει το A στο B.

Ορισμός 1.5. Έστω f να είναι είναι μία συνάρτηση από το A στο B, δηλαδή $f : A \to B$. Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** (domain) της f και, συνήθως, συμβολίζζεται με $D(f)$ ή D_f. Το σύνολο των $y \in B$ για τα οποία υπάρχουν $x \in A$ τέτοια ώστε $y = f(x)$ λέγεται **πεδίο τιμών** (range) της f και συμβολίζεται με $R(f)$ ή R_f. Εν γένει $R(f) \subseteq B$. Το υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

λέγεται **γράφημα** (graph) της f. Εναλλακτικά συμβολίζεται με G_f.

Σημείωση 1.1. Οι περισσότερες από τις συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών ή κάποιο υποσύνολο αυτού. Σε μία τέτοια περίπτωση μπορεί να δίνεται μόνο ο τύπος της συνάρτησης χωρίς να δίνεται το πεδίο ορισμού.

Ορισμός 1.6. Δύο συναρτήσεις f και g θα λέγονται **ίσες** εάν $D(f) = D(g)$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in D(f)$.

Παράδειγμα 1.3. Έστω A και B δύο μη κενά σύνολα και έστω $b_0 \in B$. Η συνάρτηση $f : A \to B$ με τύπο $f(x) = b_0$, για κάθε $x \in A$, λέγεται **σταθερή** συνάρτηση (constant function).

Παράδειγμα 1.4. Έστω $A \neq \varnothing$. Η συνάρτηση $f : A \to A$ με τύπο $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$, λέγεται **ταυτοτική** συνάρτηση (identity function) και συμβολίζεται με τ_A.

Παράδειγμα 1.5. Έστω $A \neq \varnothing$ και έστω $f : A \to B$. Εάν $A_0 \subseteq A$ η συνάρτηση $f|_{A_0} : A_0 \to B$ που ορίζεται από τη σχέση $f|_{A_0}(x) = f(x)$, για κάθε $x \in A_0$, λέγεται **ο περιορισμός** της f στο A_0 (restriction of f on A_0).

• Έστω $f : A \to B$. Εάν $A_0 \subseteq A$ με $f(A_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του A_0. Το σύνολο αυτό λέγεται η **εικόνα** (image) του A_0 μέσω της f. Έτσι

$$f(A_0) = \{y \in B : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι $f(A_0) \subseteq B$. Εάν $B_0 \subseteq B$ με $f^{-1}(B_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων του A των οποίων οι εικόνες μέσω της f ανήκουν στο B_0. Το σύνολο αυτό λέγεται η **αντίστροφη εικόνα** (preimage) του B_0 μέσω της f. Έτσι

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(B_0) \subseteq A$. Μπορεί να δειχθεί ότι

$$A_0 \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(f(A_0)) \supseteq A_0 \tag{1.27}$$

$$B_0 \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0 \tag{1.28}$$

Ορισμός 1.7. Έστω $f : A \to B$.

(1) Η f λέγεται **ένα-προς-ένα** (injective ή one–to–one) εάν για κάθε ζευγάρι διακριτών στοιχείων του $D(f)$ οι εικόνες τους είναι διακριτές, δηλαδή

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη (γιατί;) με την

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

(2) Η f λέγεται **επί** (surjective ή onto) του B εάν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A, δηλαδή

$$y \in B \Rightarrow y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A.$$

Ισοδύναμα $R(f) = B$.

(3) Εάν η f είναι ένα-προς-ένα και επί θα λέγεται **ένα-προς-ένα αντιστοιχία** μεταξύ των A και B.

Ορισμός 1.8 (Σύνθεση συναρτήσεων). Εάν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ είναι συναρτήσεις και το πεδίο τιμών της f περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g, σχηματικά $R(f) \subseteq D(g)$ ορίζουμε τη συνάρτηση $g \circ f : A \to C$ με τη σχέση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Η $g \circ f$ λέγεται **σύνθεση** (composite) των f και g.

Ορισμός 1.9 (Η αντίστροφη συνάρτηση). Εάν $f : A \to B$ είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία του A με το B, τότε σε κάθε στοιχείο $y \in B$ αντιστοιχεί ένα και μόνο στοιχείο $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Ορίζουμε την **αντίστροφη** συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ της f με τη σχέση

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Πρόταση 1.2. *Έστω $f : A \to B$ μιά ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση. Αν $g : B \to A$ είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(g(y)) = y$ για κάθε $y \in A$, τότε $g = f^{-1}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$. Έστω $x \in A$ και έστω $y = f(x)$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(g(y)) = y$, ισοδύναμα $f(g(y)) = f(x)$ και επειδή η f είναι ένα-προς-ένα έπεται ότι $g(y) = x$, ισοδύναμα $g(f(x)) = x$, που είναι το ζητούμενο. □

1.4 Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι εάν $A \subseteq B$, τότε $A \cup B = B$.

2. Να δειχθεί ότι εάν $A \cup B = A$ και $A \cap B = A$, τότε $A = B$.

3. Να δειχθεί ότι γενικά $(A \setminus B) \cup B \neq A$. Πότε ισχύει $(A \setminus B) \cup B = A$;

4. Έστω A, B, C τυχαία σύνολα. Να δειχθεί ότι

   (α΄) $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$.

   (β΄) $B \setminus (A \cap B) = \varnothing$ αν και μόνον αν $B \subseteq A$.

   (γ΄) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

5. Έστω $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{1, 2\}$.

   (α΄) Να γραφούν τα στοιχεία των συνόλων $A \times B$, $B \times A$ και B^2.

   (β΄) Ισχύει ότι $A \times B = B \times A$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

   (γ΄) Εάν $C \subseteq A$ και $D \subseteq B$ να δειχθεί ότι $C \times D \subseteq A \times B$.

6. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες (1.17) και (1.9).

7. Να αποδειχθούν τα ακόλουθα:

   (α΄) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

   (β΄) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

(γ΄) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

8. Να δειχθεί ότι $A \vartriangle B = B$ αν και μόνον αν $A = \varnothing$.

9. Έστω $f : A \to B$ και έστω $A_i \subseteq A$, $i = 1, 2$. Να δειχθεί ότι

   (α΄) Εάν $A_1 \subseteq A_2$ τότε $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.

   (β΄) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

   (γ΄) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

   (δ΄) $f(A_1 \smallsetminus A_2) \supset f(A_1) \smallsetminus f(A_2)$.

10. Έστω $f : A \to B$ και έστω $B_i \subseteq B$, $i = 1, 2$. Να δειχθεί ότι

   (α΄) Εάν $B_1 \subseteq B_2$ τότε $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.

   (β΄) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   (γ΄) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

   (δ΄) $f^{-1}(B_1 \smallsetminus B_2) = f^{-1}(B_1) \smallsetminus f^{-1}(B_2)$.

11. Έστω $f : A \to B$, $A_0 \subseteq A$, και $B_0 \subseteq B$.

   (α΄) Να αποδειχθούν οι σχέσεις (1.27) και (1.28).

   (β΄) Να αποδειχθεί ότι ισχύει ισότητα στην (1.27) εάν η f είναι ένα-προς-ένα.

   (γ΄) Να αποδειχθεί ότι ισχύει ισότητα στην (1.28) εάν η f είναι επί.

12. Έστω $f : A \to B$. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

   (α΄) Η f είναι ένα προς ένα.

   (β΄) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ για όλα τα υποσύνολα A_1 και A_2 του A.

   (γ΄) $f^{-1}(f(A_0)) = A_0$, για κάθε σύνολο $A_0 \subseteq A$.

   (δ΄) Εάν $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ τότε $f(A_1) \cap f(A_2) = \varnothing$ για όλα τα υποσύνολα A_1 και A_2 του A.

   (ε΄) $f(A_1 \smallsetminus A_2) = f(A_1) \smallsetminus f(A_2)$ για όλα τα υποσύνολα A_1, A_2 του A με $A_1 \smallsetminus A_2 = \varnothing$.

13. Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$. Εάν $C_0 \subseteq C$ να δειχθεί ότι $(g \circ f)^{-1}(C_0) = f^{-1}(g^{-1}(C_0))$.

Κεφάλαιο 2

Οι πραγματικοί αριθμοί

2.1 Το σώμα των πραγματικών αριθμών

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών μπορεί να κατασκευασθεί από τους ρητούς αριθμούς μέσω **θεμελιωδών ακολουθιών** (μέθοδος του Cantor). Για μία τέτοια κατασκευή παραπέμπουμε στο [14]. Δεχόμαστε λοιπόν ότι υπάρχει ένα σύνολο $\mathbb{R}$, που λέγεται το σύνολο των **πραγματικών αριθμών** (real numbers) εφοδιασμένο με δύο πράξεις: την **πρόσθεση** "+" και τον **πολλαπλασιασμό** "·" τέτοιες ώστε εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε οι $x+y$ και $x \cdot y$ είναι επίσης πραγματικοί αριθμοί, για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω νόμοι/αξιώματα:

1. $x + y = y + x$.

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός που λέγεται **μηδέν** (zero) και συμβολίζεται με 0, έτσι ώστε $x + 0 = x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

4. Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x', έτσι ώστε $x+x' = 0$. Ο πραγματικός αριθμός x' λέγεται ο **αντίθετος** (opposite) του x και συμβολίζεται με $-x$.

5. $x \cdot y = y \cdot x$.

6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

7. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός που λέγεται **ένα** (one) και συμβολίζεται με 1, $1 \neq 0$ έτσι ώστε $x \cdot 1 = x$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

8. Για κάθε πραγματικό αριθμό $x \neq 0$ υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός x'', έτσι ώστε $x \cdot x'' = 1$. Ο πραγματικός αριθμός x'' λέγεται ο **αντίστροφος** (inverse) του x και συμβολίζεται με x^{-1}, ή $1/x$.

9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Παρατήρηση 2.1. Εάν x και y, είναι πραγματικοί αριθμοί ο πραγματικός αριθμός $x + y$ λέγεται **άθροισμα** (sum) των x και y, ενώ ο $x \cdot y$ λέγεται **γινόμενο** (product) των x και y. Συνήθως το γινόμενο γράφεται xy. Ορίζουμε τη πράξη της **αφαίρεσης** (subtraction) με τη σχέση

$$y - x = y + (-x).$$

Παρόμοια εάν x και y, είναι πραγματικοί αριθμοί και $x \neq 0$ ορίζουμε το **πηλίκο** (quotient) του y δια x με τη σχέση

$$\frac{y}{x} = yx^{-1} = y\frac{1}{x}.$$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται μία σχέση η **διάταξη** "$\leq$" τέτοια ώστε

10. Εάν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$.
11. $x \leq y$ και $y \leq x$ εάν και μόνον εάν $x = y$.
12. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ή $x \leq y$ ή $y \leq x$.
13. Εάν $x \leq y$ τότε $x + z \leq y + z$ για κάθε πραγματικό αριθμό z.
14. Εάν $0 \leq x$ και $0 \leq y$ τότε $0 \leq x \cdot y$.

Ορισμός 2.1. Ένα σύνολο πραγματικών αριθμών S λέγεται **άνω φραγμένο** (bounded above) εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \leq x$. Το x λέγεται ένα **άνω φράγμα** (upper bound) του S. Εάν s είναι ένα άνω φράγμα του S τέτοιο ώστε $s \leq x$ για κάθε άνω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα** (least upper bound) ή **supremum** του S και συμβολίζεται με $\sup S$.

15. Εάν S είναι ένα άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του S.

Παρατήρηση 2.2. Εάν $x \leq y$ γράφουμε $y \geq x$. Επίσης εάν $x \leq y$ και $y - x \neq 0$ γράφουμε $x < y$, ή $y > x$. Ένας αριθμός x λέγεται **θετικός** (positive) εάν $x > 0$ και **αρνητικός** (negative) εάν $x < 0$.

• Εάν ο n είναι φυσικός αριθμός και ο x είναι πραγματικός αριθμός γράφουμε

$$nx = (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n})x = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n}$$

και κατ΄ αναλογία ορίζουμε

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}.$$

Πρόταση 2.1 (Αξίωμα του Αρχιμήδη). *Εάν x και y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $y < nx$.*

Απόδειξη. Με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x > 0$ και $y >$ ώστε $nx \le y$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Έστω $B_{x,y} = \{n \in \mathbb{N} : nx \le y\}$. Το B_{xy} είναι άνω φραγμένο, άρα από το νόμο 15 έπεται ότι υπάρχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω b. Τότε $nx \le b$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως $(n+1)x \le b$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $nx \le b - x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή το b είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του $B_{x,y}$ θα πρέπει να είναι $b \le b - x$, ή ισοδύναμα ότι $x \le 0$, που είναι άτοπο. Κατά συνέπεια για κάθε ζευγάρι θετικών πραγματικών αριθμών x και y υπάρχει φυσικός n, ώστε $nx > y$. □

Παράδειγμα 2.1. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν το a είναι τυχόν στοιχείο του A, τότε $a = 1 - 1/m$ για κάποιο φυσικό αριθμό m, κατά συνέπεια $a < 1$. Επειδή το a είναι τυχόν έπεται ότι A είναι άνω φραγμένο. Ισχυριζόμαστε ότι $\sup A = 1$. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $0 < s < 1$ ώστε $a \le s$ για κάθε $a \in A$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1 για τους αριθμούς $1/(1-s) > 0$ και 1 υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $1/(1-s) < n_0$. Τότε όμως

$$\frac{1}{n_0} < 1 - s \Leftrightarrow s < 1 - \frac{1}{n_0}.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα όμως αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το s είναι ένα άνω φράγμα για το A. Κατά συνέπεια δεν υπάρχει άνω φράγμα του A μικρότερο του 1, επομένως $\sup A = 1$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ύπαρξη του **ακεραίου μέρους** πραγματικού αριθμού.

Πρόταση 2.2. *Εάν $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος m_x ώστε $m_x \le x < m_x + 1$.*

Απόδειξη. Το σύνολο $A_x = \{m \in \mathbb{Z} : m \le x\}$ είναι ένα άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, κατά συνέπεια έχει ελάχιστο άνω φράγμα (νόμος 15), έστω m_x. Τότε $m_x \le x$. Αν υποθέσουμε ότι $m_x + 1 \le x$ τότε θα πρέπει $m_x + 1 \le m_x$, αφού το m_x είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A_x, που είναι άτοπο. Επομένως $x < m_x + 1$. Κατά συνέπεια $m_x \le x < m_x + 1$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $m_x \in A_x$, δηλαδή ο m_x είναι ακέραιος. Επειδή ο $m_x - 1$ δεν είναι άνω φράγμα υπάρχει $q \in \mathbb{Z}$ ώστε $m_x - 1 < q \le m_x$. Αν $m_x \notin A_x$, τότε $q < m_x$, οπότε το q δεν είναι άν φράγμα του A_x, κατά συνέπεια υπάρχει $p \in A_x$ με $q < p < m_x$. Έτσι $m_x - 1 < q < p < m_x$, οπότε $0 < p - q < m_x - q < 1$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού οι p, q είναι ακέραιοι. Επομένως $m_x \in A_x$. Αποδεικνύουμε τώρα τη μοναδικότητα. Έστω ότι υπάρχει $m'_x \in \mathbb{Z}$ με $m'_x \le x < m'_x + 1$. Από τον ορισμό των m_x και m'_x προκύπτει ότι $m_x < m'_x + 1$ και $m'_x < m_x + 1$, κατά συνέπεια $m_x \le m'_x$ και $m'_x \le m_x$ επομένως $m_x = m'_x$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ορισμός 2.2. Εάν $x \in \mathbb{R}$, ο μοναδικός ακέραιος, την ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζει η Πρόταση 2.2, λέγεται ακέραιο μέρος του x και συμβολίζεται με $[x]$, έτσι $[x] \in \mathbb{Z}$ και $[x] \leq x < [x] + 1$.

Για παράδειγμα $[0.75] = 0$, $[3] = 3$, $[-1.3] = -2$. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$x - 1 < [x] \leq x.$$

2.2 Η ευθεία των πραγματικών αριθμών

Από τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών προκύπτει ότι το σύνολο $\mathbb{R}$ έχει την επιπλέον ιδιότητα

Πρόταση 2.3. *Εάν $x < y$ τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός z τέτοιος ώστε $x < z$ και $z < y$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι για $z = \frac{1}{2}(x + y) \in \mathbb{R}$ ισχύει το συμπέρασμα. Πράγματι

$$x = \frac{1}{2}2x = \frac{1}{2}(x + x) < \frac{1}{2}(x + y)$$

από την υπόθεση $x < y$. Όμοια

$$\frac{1}{2}(x + y) < \frac{1}{2}(y + y) = \frac{1}{2}2y = y,$$

γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. □

Εάν $x < z$ και $z < y$ γράφουμε $x < z < y$. Το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.3 εκφράζει την **πυκνότητα** των πραγματικών αριθμών και οδηγεί στο να θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς ως τα σημεία μίας προσανατολισμένης ευθείας.

Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, τότε με τα **διαστήματα**

$$(a, b), \qquad [a, b), \qquad (a, b], \qquad [a, b]$$

συμβολίζουμε αντίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$a < x < b, \qquad a \leq x < b, \qquad a < x \leq b, \qquad a \leq x \leq b.$$

Εάν θεωρήσουμε τα σύμβολα $-\infty$ και $+\infty$, αντίστοιχα, **μείον άπειρο** (minus infinity) και **σύν άπειρο** (plus infinity), τέτοια ώστε $-\infty < x < +\infty$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, μπορούμε να γράφουμε $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Έτσι εάν a είναι ένας πραγματικός αριθμός με τα ημιάπειρα διαστήματα

$$(-\infty, a), \qquad (-\infty, a], \qquad (a, +\infty), \qquad [a, +\infty)$$

συμβολίζουμε ανίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$x < a, \qquad x \leq a, \qquad x > a, \qquad x \geq a.$$

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί εκφράζει το γεγονός ότι οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στους πραγματικούς αριθμούς.

Πρόταση 2.4. *Εάν x και y είναι άρρητοι αριθμοί με $x < y$, τότε υπάρχει ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε $x < r < y$.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε ότι αν οι x, y είναι ρητοί το αποτέλεσμα προφανώς ισχύει και προκύπτει από την Πρόταση 2.3. Από την υπόθεση έχουμε ότι $y - x > 0$, επομένως από την Πρόταση 2.1 έπεται ότι υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n(y - x) > 1$, ισοδύναμα $ny > nx + 1$, έτσι θα είναι

$$nx < [nx] + 1 \leq nx + 1 < ny \Rightarrow x < \frac{[nx] + 1}{n} < y$$

Ο $r = ([nx] + 1)/n$ είναι ρητός κατά συνέπεια έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 2.1. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί με $x < y$, τότε υπάρχει άρρητος αριθμός s τέτοιος ώστε $x < s < y$.

Παράδειγμα 2.2. Εάν $S = (1, 2)$, τότε το 2 καθώς και κάθε πραγματικός αριθμός $x \geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S. Όμοια εάν $S = (1, 2]$, τότε κάθε $x \geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S. Παρατηρούμε ότι εάν $S = (1, 2)$, τότε $\sup S = 2$ και $\sup S \notin S$, ενώ αν $S = (1, 2]$, τότε $\sup S = 2$ και $\sup S \in S$, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα συνόλου μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο. Παρατηρούμε ότι το $\sup(1, +\infty)$ δεν υπάρχει (γιατί;).

Ορισμός 2.3. Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ λέγεται **κάτω φραγμένο** (bounded below) εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \geq x$. Το x λέγεται ένα **κάτω φράγμα** (lower bound) του S. Εάν s είναι ένας πραγματικός αριθμός τέτοιος ώστε $s \geq x$ για κάθε κάτω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα** (greatest lower bound) ή **infimum** του S και συμβολίζεται με $\inf S$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του μεγίστου κάτω φράγματος βλέπουμε ότι $\inf(1, 2) = 1$, $\inf[1, 2) = 1$, ενώ το $\inf(-\infty, 2)$ δεν υπάρχει. Μπορεί να αποδειχθεί η ακόλουθη πρόταση. Για την απόδειξη βλέπε Άσκηση 2.2.

Πρόταση 2.5. *Κάθε κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

Άσκηση 2.2. Εάν $S \subset \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $-S = \{-x : x \in S\}$, δηλαδή $-[1, 2) = (-2, -1]$. Να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί:

(α΄) Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι κάτω φραγμένο.

(β΄) Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι άνω φραγμένο. **Υπόδειξη**: $-(-S) = S$.

(γ΄) $\sup S = -\inf(-S)$ και $\inf S = -\sup(-S)$.

Ορισμός 2.4. Έστω S ένα σύνολο πραγματικών αριθμών.

(1) Το σημείο $s^* \in S$ λέγεται **μέγιστο** (maximum) του S εάν $s \leq s^*$ για κάθε $s \in S$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $s^* = \max S$.

(2) Το σημείο $s_* \in S$ λέγεται **ελάχιστο** (minimum) του S εάν $s \geq s_*$ για κάθε $s \in S$.Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $s_* = \min S$.

Πρόταση 2.6. *Έστω S ένα σύνολο πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι*

(1) *$s = \max S$ αν και μόνο αν $s = \sup S$ και $s \in S$.*

(2) *$s = \min S$ αν και μόνο αν $s = \inf S$ και $s \in S$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. □

Η απόλυτη τιμή και δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Ορισμός 2.5. Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** (absolute value) του x με τη σχέση

$$|x| = \begin{cases} x & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $|x| \geq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι η ανισότητα

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Πρόταση 2.7 (Ιδιότητες της απόλυτης τιμής). *Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της απόλυτης τιμής:*

(1) $|x| \geq 0$ *και* $|x| = 0$, *εάν και μόνον εάν* $x = 0$.

(2) $|xy| = |x||y|$

(3) $|x/y| = |x|/|y|, \quad y \neq 0$

(4) $|x| = |-x|$

(5) $|x+y| \leq |x| + |y|$ *Η ανισότητα αυτή είναι η* ***τριγωνική ανισότητα***

(6) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Απόδειξη. Έστω $x, y \in \mathbb{R}$

(1) Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της απόλυτης τιμής.

(2) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής είναι $xy = \pm|xy|$.

(α΄) Αν $xy = |xy|$, τότε $xy = |x||y|$, ή $xy = (-|x|)(-|y|)$ οπότε $|xy| = xy = |x||y|$.

(β΄) Αν $xy = -|xy|$, τότε $xy = -|x||y|$, οπότε $|xy| = -xy = |x||y|$.

(3) Αν $y \neq 0$ από την (1) είναι $|y| > 0$, οπότε από την (2) έχουμε

$$|x| = \left|\frac{x}{y}y\right| = \left|\frac{x}{y}\right||y| \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

(4) Πάλι μια εφαρμογή της (2) δίνει

$$|-x| = |(-1)x| = |-1||x| = 1|x| = |x|.$$

(5) Όπως παρατηρήσαμε είναι

$$-|x| \leq x \leq |x|$$
$$-|y| \leq y \leq |y|$$

και προσθέτοντας παίρνουμε

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

κατά συνέπεια

$$\pm(x+y) \leq |x| + |y| \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|.$$

(6) Από την (5) παίρνουμε

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|$$
$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x - y|$$

επομένως

$$\pm(|x| - |y|) \leq |x - y| \Rightarrow ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Άσκηση 2.3. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ είναι $|x-y| < \epsilon$, τότε $x = y$.

Πρόταση 2.8. *Έστω a ένας πραγματικός αριθμός. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε (επαγωγικά)*

$$a^1 = a$$
$$a^{n+1} = a^n a.$$

Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί να δειχθεί ότι

$$a^m a^n = a^{m+n}, \qquad (a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n,$$

για κάθε φυσικό αριθμό n, όπου m είναι ένας τυχαίος αλλα σταθερός φυσικός αριθμός.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. □

Συμφωνούμε ότι για $x \neq 0$ να γράφουμε $x^0 = 1$.

Ορισμός 2.6. Εάν $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **τετραγωνική ρίζα** του x, $\sqrt{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^2 = x$, δηλαδή

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x.$$

Ειδικά

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Γενικότερα αν n είναι **άρτιος** φυσικός αριθμός και $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^n = x$, δηλαδή

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x. \tag{2.1}$$

Αν n είναι **περιττός** φυσικός αριθμός και x είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο πραγματικός αριθμός y που ικανοποιεί την (2.1). Για τη n-οστή ρίζα του πραγματικού αριθμού x, γράφουμε επίσης

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Παρατήρηση 2.3 (Δυνάμεις). Μπορεί, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, να αποδειχθεί ότι αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και m, n φυσικοί αριθμοί τότε ισχύουν οι ιδιότητες

Δ1. $x^n x^m = x^{n+m}$.

Δ2. $(x^n)^m = x^{nm}$.

Δ3. $x^n y^n = (xy)^n$.

Δ4. $\dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n$, $y \neq 0$.

Από την Δ3. για $y = x^{-1}$, όταν $x \neq 0$, έπεται ότι $x^n(x^{-1})^n = (xx^{-1})^n = 1$, κατά συνέπεια ορίζοντας

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$$

για $n \in \mathbb{N}$, μπορεί να δειχθεί ότι οι Δ1.– Δ4. ισχύουν και για ακέραιους m και n, ειδικότερα

Δ5. $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$, $x \neq 0$.

Αν $r = m/n \in \mathbb{Q}$ με $n > 0$ και $x \geq 0$ ορίζοντας

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

ώστε $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$ μπορεί να δειχθεί ότι ιχύουν οι νόμοι

Δ6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$, με $m, n \in \mathbb{N}$ και $x \geq 0$.

Δ7. $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, με $n > 0$, $x \geq 0$ και $y \geq 0$.

Δ8. $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$, με $x \geq 0$ και $y > 0$.

Έτσι τελικά αν r και s είναι ρητοί αριθμοί και $x \geq 0$, $y \geq 0$, (ή αυστηρά θετικοί όπου χρειάζεται) είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

(α′) $x^r x^s = x^{r+s}$

(β′) $\dfrac{x^r}{x^s} = x^{r-s}$

(γ′) $(x^r)^s = x^{rs}$

(δ′) $(xy)^r = x^r y^r$

(ε′) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$.

Παρατήρηση 2.4. Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $\oplus$ και $\odot$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες/αξιώματα 1–9 με $\oplus$ στη θέση του $+$ και $\odot$ στη θέση του $\cdot$, τότε η τριάδα $(A, \oplus, \odot)$ λέγεται **σώμα** (field). Άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τις γνωστές πράξεις αποτελούν σώμα. Ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 10–14 λέγεται **διατεταγμένο σώμα** (ordered field), ενώ εάν επιπλέον ικανοποιεί και το αξίωμα 15 λέγεται **πλήρως διατεταγμένο σώμα** (totally ordered field), άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τη γνωστή διάταξη αποτελούν ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Αποδεικνύεται ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι κατά κάποιο τρόπο μοναδικό, με την έννοια ότι κάθε σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15 είναι ταυτόσημο με το $\mathbb{R}$, **ίσομορφο** (isomorphic) με το $\mathbb{R}$ στη γλώσσα της άλγεβρας[1]. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στα συγγράματα [13] και [14]. Στη συνέχεια να κατασκευάσει πρώτα τους φυσικούς αριθμούς[2] και μετά τους ακεραίους και τους ρητούς. Για τη προσέγγιση αυτή παραπέμπουμε στα συγγράμματα [2] και [10].

2.3 Το δεκαδικό ανάπτυγμα πραγματικού αριθμού

Από τα πρώτα χρόνια μας στο σχολείο γνωρίζουμε ότι οι υποδιαιρέσεις ολόκληρων αριθμών (φυσικών ή ακεραίων) παρίστανται με δεκαδικούς αριθμούς. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε ότι

$$\frac{3}{5} = 0.6, \qquad \frac{1}{4} = 0.25, \qquad \frac{27}{4} = 6.75.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0.6, \qquad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = 0.2 + 0.05 = 0.25,$$

και

$$\frac{27}{4} = \frac{4 \cdot 6 + 3}{4} = 6 + \frac{3}{4} = 6 + \frac{75}{100} = 6 + \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = 6 + \frac{7}{10} + \frac{5}{10^2} = 6 + 0.7 + 0.05 = 6.75,$$

δηλαδή οι ρητοί αυτοί αριθμοί, όπως και άλλοι, μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, \tag{2.2}$$

όπου ο $a_0 \in \mathbb{Z}$, και $a_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ για $k = 1, 2, \ldots, n$. Βέβαια δεν είναι αλήθεια ότι κάθε ρητός μπορεί να γραφεί στη μορφή (2.2). Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι

$$\frac{1}{3} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

---

[1] Εάν $(A, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ είναι ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15, είναι δηλαδή ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ένα προς ένα και επί τέτοια ώστε εάν x και y είναι στοιχεία του A, τότε

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \odot y) = f(x)f(y), \qquad x \preccurlyeq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

[2] Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται **επαγωγικό** αν $1 \in A$ και για κάθε $x \in A$ το $x + 1 \in A$. Για παράδειγμα το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{R}$ είναι επαγωγικά σύνολα, όπως είναι, για παράδειγμα, και το

$$Z = \{n, m + \sqrt{2} : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{N}$ είναι το "μικρότερο" επαγωγικό σύνολο, με την έννοια

$$\mathbb{N} = \bigcap_{A \in \mathcal{E}} A$$

όπου $\mathcal{E}$ είναι η κλάση των επαγωγικών συνόλων.

για κάποιο θετικό ακέραιο n, θα είχαμε, αφού $a_0 = 0$ (γιατί;),

$$\frac{1}{3} = \frac{10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + \cdots + a_n}{10^n} = \frac{m}{10^n},$$

για κάποιο θετικό ακέραιο m, ισοδύναμα ότι $10^n = 3m$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού καμιά δύναμη του 10 δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο του 3 (γιατί;). Πράγματι επειδή

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

με άπειρο πλήθος δεκαδικών ψηφίων, ο $1/3$ θα μπορούσε να παρασταθεί ως ένα "άπειρο" άθροισμα, σωστότερα ως άθροισμα άπειρου πλήθους όρων

$$\frac{1}{3} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots.$$

Το ίδιο συμβαίνει και με τους άρρητους αριθμούς, για παράδειγμα τον $\pi = 3.141592653589793\ldots$, οπότε

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{6}{10^7} + \frac{5}{10^8} + \cdots + \frac{3}{10^{15}} + \cdots.$$

Αποδεικνύεται ότι αν ο r είναι ρητός τότε είτε το δεκαδικό ανάπτυγμά του είναι πεπερασμένο, είτε περιέχει ένα επαναλαμβανόμενο τμήμα, για παράδειγμα

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots, \qquad \frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots,$$

και στη περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}, \qquad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857},$$

ενώ αν ο r είναι άρρητος τότε το δεκαδικό ανάπτυγμά του περιέχει άπειρο πλήθος ψηφίων χωρίς να επαναλαμβάνεται κάποιο τμήμα του αναπτύγματος.

2.4 Ασκήσεις

1. [10] Να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες της άλγεβρας των πραγματικών αριθμών:

   (α΄) Εάν $x + y = x$, τότε $y = 0$.

   (β΄) $0x = 0$. **Υπόδειξη**: $0 = 0 + 0$.

   (γ΄) $-0 = 0$.

   (δ΄) $-(-x) = x$. **Υπόδειξη**: Ο $-(-x)$ είναι ο αντίθετος του $-x$.

   (ε΄) $x(-y) = -(xy) = (-x)y$.

   (ϛ΄) $(-1)x = -x$.

(ζ΄) $x(y - z) = xy - xz$.

(η΄) $-(x + y) = -x - y$, $-(x - y) = -x + y$.

(θ΄) Εάν $x \neq 0$ και $xy = x$, τότε $y = 1$.

(ι΄) Εάν $x \neq 0$, τότε $x/x = 1$.

(ια΄) $x/1 = x$.

(ιβ΄) Εάν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, τότε $xy \neq 0$.

(ιγ΄) $(1/x)(1/y) = 1/(xy)$, εάν $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

(ιδ΄) $(w/x)(y/z) = (wy)/(xz)$, εάν $x \neq 0$ και $z \neq 0$.

(ιε΄) $(w/x) + (y/z) = (wz + yx)/(xz)$, εάν $x \neq 0$ και $z \neq 0$.

(ιϛ΄) Εάν $x \neq 0$, τότε $1/x \neq 0$.

(ιζ΄) Εάν $x \neq 0$, τότε $(x^{-1})^{-1} = x$.

(ιη΄) $1/(x/y) = y/x$, εάν $x \neq 0$ και $y \neq 0$.

(ιθ΄) $(w/x)/(y/z) = (wz)/(xy)$, εάν $x \neq 0$, $y \neq 0$ και $z \neq 0$.

(κ΄) $(xy)/z = x(y/z)$, εάν $z \neq 0$.

(κα΄) $(-x)/y = x/(-y) = -(x/y)$, εάν $y \neq 0$.

2. [10] Να αποδειχθούν οι παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων πραγματικών αριθμών:

(α΄) Εάν $w \leq x$ και $y \leq z$, τότε $w + y \leq x + z$.

(β΄) Εάν $x \leq y$ και $z \geq 0$, τότε $zx \leq zy$.

(γ΄) $x \leq 0$ εάν και μόνον εάν $-x \geq 0$.

(δ΄) $x \leq y$ εάν και μόνον εάν $-x \geq -y$.

(ε΄) Εάν $x \leq y$ και $z \leq 0$, τότε $zx \geq zy$.

(ϛ΄) Εάν $x \neq 0$, τότε $x^2 > 0$, όπου $x^2 = xx$.

(ζ΄) $-1 < 0 < 1$.

(η΄) Εάν $xy > 0$, τότε οι x και y είναι και οι δύο θετικοί ή και οι δύο αρνητικοί.

(θ΄) Εάν $x > 0$, τότε $1/x > 0$.

(ι΄) Εάν $0 < x \leq y$, τότε $1/y \leq 1/x$.

3. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

(α΄) $(x - 1)(x - 2) > 0$.

(β΄) $x^2 + x + 1 > 2$.

(γ΄) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} > 0$.

(δ΄) $\frac{x-1}{x+1} > 0$.

4. Να βρεθούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει

   (α΄) $|x-2| > 8$.

   (β΄) $|x-2| < 8$.

   (γ΄) $|x-1| + |x-2| > 1$.

   (δ΄) $|x-1| + |x+1| < 2$.

   (ε΄) $|x-1||x+2| = 0$.

   (ϛ΄) $|x-1||x+2| = 3$.

5. Να βρεθούν, εάν αυτά υπάρχουν τα $\inf S$ και $\sup S$, όπου

   (α΄) $S = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

   (β΄) $S = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

6. Έστω ότι A είναι ένα τυχαίο σύνολο εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $\oplus$ και $\odot$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες/αξιώματα

   1. $x \oplus y = y \oplus x$, για κάθε $x, y \in A$.
   2. $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, για κάθε $x, y, z \in A$.
   3. Υπάρχει στοιχείο $0 \in A$, έτσι ώστε $x \oplus 0 = x$, για κάθε $x \in A$.
   4. Για κάθε $x \in A$ υπάρχει στοιχείο $x' \in A$, έτσι ώστε $x \oplus x' = 0$.
   5. $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$, για κάθε $x, y, z \in A$.
   6. $x \odot (y \oplus z) = x \odot y \oplus x \odot z$ και
      $(x \oplus y) \odot z = x \odot z \oplus y \odot z$, για κάθε $x, y, z \in A$.

   Η τριάδα $(A, \oplus, \odot)$ λέγεται **δακτύλιος** (ring). Να δειχθεί ότι το σύνολο των ακεραίων εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, αποτελεί δακτύλιο.

5

Κεφάλαιο 3

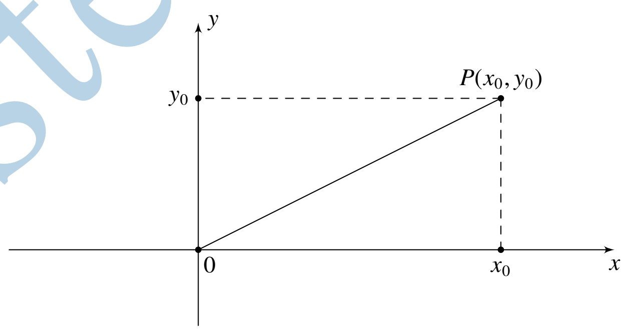
Το καρτεσιανό επίπεδο

3.1 Εισαγωγικά

Με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{R}^2$ το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με ένα **ορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0, 0)$ θα το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**, ή **πραγματικό επίπεδο** ή διδιάστατο πραγματικό χώρο. Τον οριζόντιο άξονα τον λέμε συνήθως x-άξονα και τον κατακόρυφο y-άξονα. Κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί σε μοναδικό ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου. Έτσι γράφουμε $P(x_0, y_0)$ για να δηλώσουμε αυτή την ένα προς ένα αντιστοιχία.



Σχήμα 3.1: Το καρτεσιανό επίπεδο.

Το σημείο x_0 στον x-άξονα το λέμε x **συντεταγμένη** του σημείου P, και το y_0 στον y-άξονα το λέμε y **συντεταγμένη** του P. Γενικά αν P είναι είναι ένα σημείο του επιπέδου και x και y είναι αντίστοιχα οι συντεταγμένες του P το ζευγάρι (x, y) θα λέμε **καρτεσιανές συντεταγμένες** του σημείου P. Τις καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου P τις λέμε και **προβολές** του σημείου στους άξονες. Έτσι τη x συντεταγμένη του P τη λέμε και προβολή του P στον x-άξονα και την y συντεταγμένη του P τη λέμε προβολή του P στον y-άξονα.

Όμοια το καρτεσιανό γινόμενο

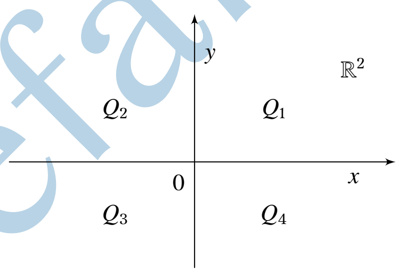
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιασμένο με ένα **τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με τρεις ευθείες ανά δύο κάθετες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0, 0, 0)$ θα το λέμε **τριδιάστατο πραγματικό χώρο**. Κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί σε μοναδική τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του χώρου. Γενικότερα για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τον n-διάστατο πραγματικό χώρο

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ \ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

3.2 Βασικά στοιχεία

Το ορθογώνιο σύστημα αξόνων χωρίζει το καρτεσιανό επίπεδο σε τέσσερα ξένα μεταξύ τους σύνολα τα οποία λέμε πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο (quadrants). Αυτά είναι αντίστοιχα τα



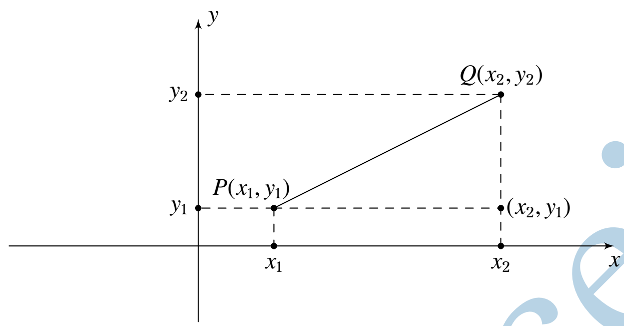
Σχήμα 3.2: Τα τεταρτημόρια

$$Q_1 = \{(x, y) : x > 0 \text{ και } y > 0\}, \qquad Q_2 = \{(x, y) : x < 0 \text{ και } y > 0\},$$
$$Q_3 = \{(x, y) : x < 0 \text{ και } y < 0\}, \qquad Q_4 = \{(x, y) : x > 0 \text{ και } y < 0\}.$$

3.2.1 Απόσταση στο επίπεδο

Αν $P = (x_1, y_1)$ και $Q = (x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$) τότε η απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q, την οποία συμβολίζουμε με $d(P, Q)$, είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα P και Q, επομένως από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_2, y_1) προκύπτει ότι

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{3.1}$$



Σχήμα 3.3: Απόσταση στο επίπεδο

Μια άμεση συνέπεια του αποτελέσματος αυτού είναι ότι αν το (x, y) είναι σημείο του κύκλου κέντρου (a, b) και ακτίνας $r \geq 0$, τότε

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \tag{3.2}$$

Έτσι η (3.2) είναι η **εξίσωση του κύκλου** με κέντρο το (a, b) και ακτίνα r. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

γράφεται

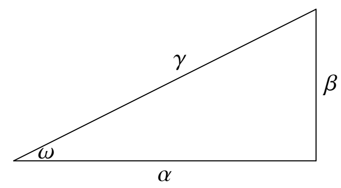
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

κατά συνέπεια η εξίσωση παριστάνει κύκλο κέντρου $(1, -1)$ και ακτίνας 2.

Άσκηση 3.1. Η **έλλειψη** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερό. Τα δύο αυτά σημεία λέγονται **εστίες** της έλλειψης. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στα σημεία $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ και άθροισμα αποστάσεων ίσο με $2a$, όπου $a > c > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

3.2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε τρίγωνο

Θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος με μήκη πλευρών α, β, και γ, όπου $\alpha < \gamma$ και $\beta < \gamma$. Θεωρούμε μία από τις δύο γωνίες που δεν είναι η ορθή, έστω την ω, και ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω με τις σχέσεις



Σχήμα 3.4: Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

$$\sin\omega = \frac{\beta}{\gamma} \qquad \text{ημίτονο } \omega = \frac{\text{απέναντι πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\cos\omega = \frac{\alpha}{\gamma} \qquad \text{συνημίτονο } \omega = \frac{\text{προσκείμενη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\tan\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \qquad \text{εφαπτομένη } \omega = \frac{\text{απέναντι πλευρά}}{\text{προσκείμενη πλευρά}}$$

$$\cot\omega = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega} \qquad \text{συνεφαπτομένη } \omega = \frac{\text{προσκείμενη πλευρά}}{\text{απέναντι πλευρά}}$$

$$\sec\omega = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\cos\omega} \qquad \text{τέμνουσα } \omega = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{προσκείμενη πλευρά}}$$

$$\csc\omega = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{\sin\omega} \qquad \text{συντέμνουσα } \omega = \frac{\text{υποτείνουσα}}{\text{απέναντι πλευρά}}$$

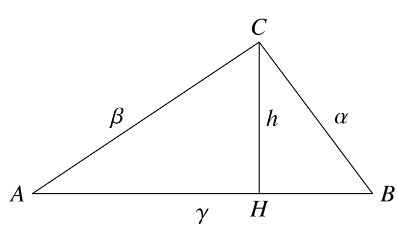
Άμεσες συνέπειες του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας είναι οι ταυτότητες

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1 \qquad \tan\omega = \frac{1}{\cot\omega} \qquad \sec^2\omega - \tan^2\omega = 1 \qquad \csc^2\omega - \cot^2\omega = 1.$$

Άσκηση 3.2 (Ο νόμος των ημιτόνων). Έστω ABC ένα τρίγωνο με μήκη των αντίστοιχων πλευρών α, β, και γ, όπως στο σχήμα. Δείξτε ότι ισχύει ο νόμος

$$\frac{\sin A}{\alpha} = \frac{\sin B}{\beta} = \frac{\sin C}{\gamma}.$$

Λύση. Έστω ABC το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ όπως στο Σχήμα 3.5. Έστω CH το ύψος του τριγώνου στην πλευρά γ μήκους h.



Σχήμα 3.5: Ο νόμος των ημιτόνων

Από τον ορισμό του ημιτόνου γωνίας βρίσκουμε

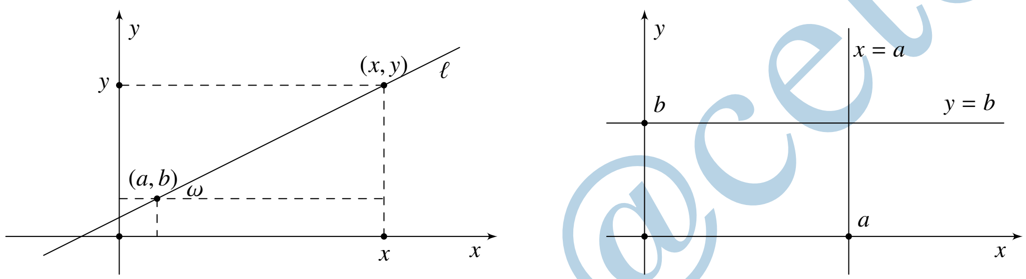
$$\sin A = \frac{h}{\beta} \Rightarrow h = \beta \sin A, \qquad \text{και} \qquad \sin B = \frac{h}{\alpha} \Rightarrow h = \alpha \sin B,$$

επομένως

$$\frac{\sin A}{\alpha} = \frac{\sin B}{\beta}.$$

Ο πλήρης νόμος έπεται με ανάλογο τρόπο. □

3.2.3 Ευθείες στο επίπεδο



Σχήμα 3.6: Ευθείες στο επίπεδο

Έστω ℓ να είναι μια ευθεία στο επίπεδο, η οποία δεν είναι παράλληλη στον y-άξονα, και περιέχει το σημείο (a, b). Αν η ℓ σχηματίζει γωνία ω με τον x-άξονα και (x, y) είναι ένα σημείο της ευθείας, τότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο παίρνουμε

$$\tan \omega = \frac{y - b}{x - a}$$

οπότε αν ορίσουμε τη **κλίση** της ευθείας ℓ να είναι $m = \tan \omega$ τότε η σχέση

$$y - b = m(x - a) \tag{3.3}$$

είναι η εξίσωση της ευθείας που έχει κλίση m και περιέχει το σημείο (a, b). Αν $m = 0$ τότε η εξίσωση γίνεται $y = b$ που είναι η ευθεία παράλληλη στον x-άξονα που περιέχει το σημείο $(0, b)$. Όμοια η $x = a$ παριστάνει την ευθεία που είναι κάθετη στον x-άξονα στο σημείο $(a, 0)$. Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή είναι $\omega = \pi/2$. Η εξίσωση της ευθείας που περιέχει τα σημεία (a, b) και (a', b') είναι

$$y - b = \frac{b - b'}{a - a'}(x - a)$$

(γιατί;). Γράφοντας την εξίσωση (3.3) ως

$$y = mx + (b - am) = mx + c,$$

όπου $c = b - am$, βλέπουμε ότι για $x = 0$ είναι $y = c$, κατά συνέπεια η

$$y = mx + c, \tag{3.4}$$

είναι η εξίσωση της ευθείας με κλίση m η οποία τέμνει τον y-άξονα στο $(0, c)$.

Γενικά κάθε εξίσωση

$$ax + by + c = 0,$$

με a, b και c πραγματικούς αριθμούς, παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο.

3.2.4 Περί κύκλου

Έστω P_n ένα πολύγωνο με $n \geq 3$ πλευρές εγγεγραμμένο σε κύκλο. Το P_n λέγεται **κανονικό** αν οι πλευρές του είναι ίσες μεταξύ τους. Στη περίπτωση αυτή τα n το πλήθος τρίγωνα με κορυφές το κέντρο του κύκλου και δύο διαδοχικές κορυφές του πολυγώνου είναι ίσα μεταξύ τους. Επίσης τα n τόξα που αποκόπτουν οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσα μεταξύ τους.

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσουν δύο προβλήματα που αφορούν σε κύκλο.

Πρόβλημα 1: Τι μπορούμε να ορίσουμε ως μήκος της περιφέρειας του κύκλου και πόσο είναι αυτό;

Πρόβλημα 2: Με τί ισούται το εμβαδόν της περιοχής του επιπέδου που περικλείει ένας κύκλος;

Αν O είναι ένα σημείο στο επίπεδο και $r \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός με $C(O, r)$ θα συμβολίζουμε τον κύκλο κέντρου O και ακτίνας r. Με $D(O, r)$ συμβολίζουμε την περιοχή που περικλείει ο κύκλος $C(O, r)$ την οποία θα λέμε **δίσκο** κέντρου O και ακτίνας r. Εάν για κάποιο λόγο δεν ενδιαφέρει να δηλωθεί το κέντρο γράφουμε απλά C_r για τον κύκλο και D_r για το δίσκο. Αν P_n είναι ένα πολύγωνο με p_n θα συμβολίζουμε την **περίμετρο** του P_n, δηλαδή το άθροισμα των μηκών των πλευρών του P_n.

Πρόταση 3.1. *Έστω P_n ένα εγγεγραμμένο σε κύκλο κανονικό πολύγωνο. Ο λόγος της περιμέτρου p_n προς τη διάμετρο του κύκλου είναι ίδιος για όλες τις ακτίνες.*

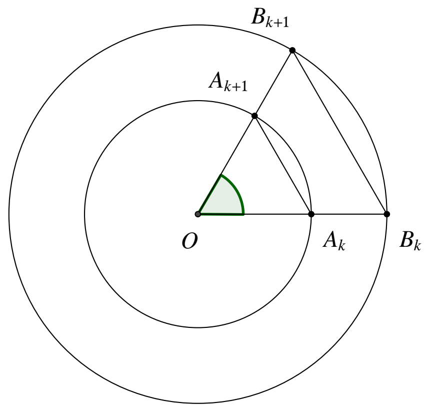
Απόδειξη. Έστω $C(O, r_1)$ και $C(O, r_2)$ δύο ομόκεντροι κύκλοι και ας υποθέσουμε ότι $r_1 < r_2$. Για n σταθερό, αλλά τυχαίο, αν P_n και Q_n είναι εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα, αντίστοιχα στους $C(O, r_1)$ και $C(O, r_2)$ με κορυφές A_k και B_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ και περιμέτρους p_n και q_n, τότε από τα όμοια τρίγωνα A_kOA_{k+1} και B_kOB_{k+1}, $k = 1, 2, \ldots, n$ με $A_{n+1} = A_1$ και $B_{n+1} = B_1$, έπεται ότι

$$\frac{A_kA_{k+1}}{r_1} = \frac{B_kB_{k+1}}{r_2}$$

απ΄ όπου αθροίζοντας ως προς k παίρνουμε

$$\frac{p_n}{r_1} = \frac{q_n}{r_2}, \qquad \text{ή} \qquad \frac{p_n}{2r_1} = \frac{q_n}{2r_2}$$

που είναι το ζητούμενο. □



Σχήμα 3.7: Ομοιότητα τριγώνων

Παρατήρηση 3.1. Θεωρούμε μια ακολουθία $(P_{2^n})_{n=2}^{\infty}$ εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων σε κύκλο $C(O,r)$. Για την ακολουθία των αντίστοιχων περιμέτρων $(p_{2^n})_{n=2}^{\infty}$ ισχύει (γιατί;)

$$p_4 < p_8 < \cdots < p_{2^n} < \cdots < 8r. \tag{3.5}$$

Το πάνω φράγμα $8r$ είναι η περίμετρος του περιγεγραμμένου στον κύκλο τετραγώνου. Συνεπώς η ακολουθία $(p_{2^n})_{n=2}^{\infty}$ συγκλίνει. Έστω $L(r)$ το όριο της ακολουθίας,

$$\lim_{n\to\infty} p_{2^n} = L(r).$$

Αν h_{2^n} είναι η απόσταση της πλευράς του πολυγώνου P_{2^n} από το κέντρο του κύκλου, δηλαδή το ύψος του τριγώνου A_kOA_{k+1} στην απόδειξη της Πρότασης 3.1, τότε το εμβαδόν $A(P_{2^n})$ του πολυγώνου P_{2^n} είναι

$$A(P_{2^n}) = \frac{1}{2}p_{2^n}h_{2^n}.$$

Επειδή $p_{2^n} \to L(r)$ και $h_{2^n} \to r$, καθώς $n \to \infty$, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} A(P_{2^n}) = \frac{1}{2}L(r)r.$$

Επειδή για μεγάλα n η πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από τις πλευρές του P_{2^n} προσεγγίζει τον κύκλο και το πολύγωνο P_{2^n} προσεγγίζει τον δίσκο ορίζουμε ως **μήκος της περιφέρειας** $L(C_r)$ του $C(O,r)$ το όριο $L(r)$, δηλαδή

$$L(C_r) = \lim_{n\to\infty} p_{2^n} = L(r), \tag{3.6}$$

και ως **εμβαδόν** $A(D_r)$ **του δίσκου** $D(O,r)$ το

$$A(D_r) = \lim_{n\to\infty} A(P_{2^n}) = \frac{1}{2}L(r)r. \tag{3.7}$$

Η γεωμετρική μέθοδος που ακολουθήσαμε για να υπολογίσουμε το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδόν του δίσκου είναι η "μέθοδος της εξάντλησης" την οποία επινόησε και χρησιμοποίησε ο

Εύδοξος (408-355 π.Χ.) και αργότερα ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) για τον υπολογισμό του μήκους γενικών καμπυλών σχημάτων και του εμδαδού καμπυλόγραμμων περιοχών. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το όρια στις (3.6) και (3.7) είναι ανεξάρτητα από την επιλογή των πολυγώνων που θεωρήσαμε[1]. Η συγκεκριμένη επιλογή, κανονικότητα, έγινε προκειμένου να προκύπτει εύκολα η μονοτονία της ακολουθίας των περιμέτρων και των εμβαδών των εγγεγραμμένων πολυγώνων. Η μέθοδος αυτή, της εξάντλησης, γενικεύεται και οδηγεί στο ολοκλήρωμα, που θα συναντήσουμε παρακάτω.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μήκος της περιφέρειας $L(r)$.

Θεώρημα 3.1 (Εύδοξος). *Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς τη διάμετρο κύκλου είναι ίδιος για όλες τις ακτίνες.*

Απόδειξη. Έστω $C(O_1, r_1)$ και $C(O_2, r_2)$ δύο κύκλοι. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.1 έχουμε ότι

$$\frac{p_{2^n}}{2r_1} = \frac{q_{2^n}}{2r_2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{p_{2^n}}{2r_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{2^n}}{2r_2}$$

οπότε

$$\frac{L(r_1)}{2r_1} = \frac{L(r_2)}{2r_2}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε. □

Ορισμός 3.1. Έστω $C(O, r)$ ένας κύκλος και έστω $L(r)$ το μήκος της περιφέρειάς του. Ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό π με τη σχέση

$$\frac{L(r)}{2r} = \pi.$$

Η επιλογή του συμβόλου π για τον λόγο αυτό οφείλεται στον Euler. Από τη (3.5) έπεται ότι $2\sqrt{2} \leq \pi \leq 4$, όπου για το κάτω φράγμα πήραμε την περίμετρο του εγγεγραμμένου τετραγώνου.[2]

[1]Θα μπορούσαμε να πάρουμε την ακολουθία των εγγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων $(P_{3\cdot 2^{n-1}})_{n=1}^{\infty}$ για την οποία η αντίστοιχη ακολουθία των περιμέτρων ικανοποιεί την ανάλογη σχέση

$$p_3 < p_6 < \cdots < p_{3\cdot 2^{n-1}} < \cdots < 8r.$$

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία αποδεικνύεται ότι για την ακολουθία των κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο $(P_n)_{n=3}^{\infty}$ η αντίστοιχη ακολουθία των περιμέτρων είναι επίσης γνησίως αύξουσα (και φραγμένη).

[2]Ο αριθμός π ήταν γνωστός στους αρχαίους Έλληνες από τον 5ο π.Χ. αιώνα. Ο Ιπποκράτης ο Χίος φαίνεται ότι γνώριζε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.1 από το 430 π.Χ. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) απέδειξε ότι $3+10/71 < \pi < 3+1/7$, οπότε $\pi \approx 3.14\ldots$. Το 1761 ο Lambert απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι άρρητος. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι ο π είναι **υπερβατικός**, δεν προκύπτει δηλαδή ως λύση κάποιας αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ότι δεν μπορεί να βρεθεί η θέση του π (να κατασκευαστεί) με χάρακα και διαβήτη πάνω στην πραγματική ευθεία, κατά συνέπεια το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με χάρακα και διαβήτη είναι αδύνατο.

Από τις (3.6) και (3.7) έπεται ότι το μήκος της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r είναι

$$L(C_r) = 2\pi r \tag{3.8}$$

και το εμβαδόν δίσκου ακτίνας r είναι

$$A(D_r) = \pi r^2. \tag{3.9}$$

Ειδικά το μήκος της μοναδιαίας περιφέρειας και το εμβαδόν του μοναδιαίου δίσκου αντίστοιχα είναι

$$L(C_1) = 2\pi, \qquad A(D_1) = \pi. \tag{3.10}$$

Μήκος τόξου και εμβαδόν κυκλικού τομέα

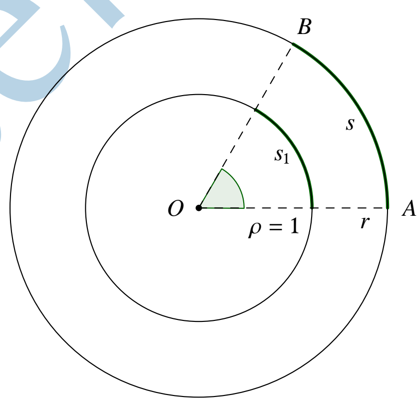
Θυμίζουμε ότι μια γωνία με κορυφή στο κέντρο ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη γωνία**. Θυμίζουμε επίσης ότι το τμήμα ενός δίσκου το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών μιας επίκεντρης γωνίας και της περιφέρειας λέγεται **κυκλικός τομέας**. Αν στον κύκλο $C(O,r)$ θεωρήσουμε τον κυκλικό τομέα AOB, και s είναι το μήκος του τόξου AB, από τις (3.8) και (3.10) βρίσκουμε (πώς;)

$$\frac{s}{2r} = \frac{s_1}{2} = \pi \Rightarrow s = s_1 r$$

όπου s_1 είναι το μήκος του τόξου στη μοναδιαία περιφέρεια που αποκόπτει η γωνία AOB, βλέπε Σχήμα 3.8, δηλαδή μια υποδιαίρεση του 2π. Επίσης σε αναλογία της (3.7) το εμβαδόν του κυκλικού τομέα AOB θα είναι

$$A = \frac{1}{2} sr = \frac{1}{2} s_1 r^2 \tag{3.11}$$

όπου s_1 είναι όπως πριν.



Σχήμα 3.8: Μήκος τόξου και εμβαδόν κυκλικού τομέα

Άσκηση 3.3. Σε κύκλο $C(O,r)$ θεωρούμε τον κυκλικό τομέα AOB, όπως στο σχήμα 3.8. Ορίζουμε P_1 να είναι το τρίγωνο AOB και $p_1 = AB =$ το μήκος του τμήματος με άκρα τα A και B. Αν K

είναι σημείο της περιφέρειας ώστε η OK να είναι η διχοτόμος της γωνίας AOB ορίζουμε P_2 να είναι το τετράπλευρο $OAKB$ και $p_2 = AK + KB$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία διχοτομώντας τις γωνίες AOK και KOB και συνεχίζουμε. Έτσι προκύπτει μια ακολουθία πολυγώνων $(P_{2^n})_{n=0}^{\infty}$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$P_1 \subset P_2 \subset P_4 \subset \cdots \subset P_{2^n} \subset P_{2^{n+1}} \subset \cdots \qquad p_1 < p_2 < p_4 < \cdots < p_{2^n} < p_{2^{n+1}} < \cdots$$

όπου p_{2^n} είναι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής που προσεγγίζει το τόξο AB, και ισούται με την περίμετρο του P_{2^n} μείον $2r$. Δείξτε ότι η ακολουθία (p_{2^n}) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμο, έστω s, τον οποίο ορίζουμε να είναι το μήκος του τόξου AB. Δείξτε ότι η ακολουθία των εμβαδών $(A(P_{2^n}))$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $sr/2$ τον οποίο ορίζουμε να είναι το εμβαδόν του κυκλικού τομέα AOB.[3]

3.2.5 Μονάδες μέτρησης γωνίας

Ας θεωρήσουμε μια γωνία η κορυφή της οποίας βρίσκεται στο κέντρο ενός κύκλου. Μια τέτοια γωνία λέγεται επίκεντρη. Η γωνία αυτή αποκόπτει ένα τόξο της περιφέρειας. Είναι λογικό να θελήσουμε να μετρήσουμε τη γωνία μετρώντας το αντίστοιχο τόξο. Εδώ πρέπει να σκεφτούμε ότι το "μήκος του τόξου" εξαρτάται από την ακτίνα του κύκλου, για παράδειγμα αν θεωρήσουμε έναν άλλο κύκλο με το ίδιο κέντρο αλλά μεγαλύτερης ακτίνας, τότε το τόξο που αποκόπτει η γωνία στον νέο κύκλο έχει "μεγαλύτερο μήκος". Η δυσκολία αυτή ξεπερνιέται με δύο τρόπους.

Πρώτος τρόπος: Διαιρώντας την περιφέρεια σε 360 ισομήκη τόξα ορίζουμε ως μια μονάδα μέτρησης γωνιών την **μοίρα** (degree) να είναι εκείνη η επίκεντρη γωνία η οποία αντιστοιχεί σε ένα από αυτά τα τόξα. Αντί για 1 μοίρα γράφουμε 1°, έτσι 1° είναι η επίκεντρη γωνία η οποία αντιστοιχεί στο $1/360$ της περιφέρειας. Η μονάδα αυτή είναι ανεξάρτητη της ακτίνας του κύκλου. Μια ορθή γωνία αντιστοιχεί στο $1/4$ της περιφέρειας και $360/4 = 90$, κατά συνέπεια η γωνία 90° είναι ορθή.

Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε ένα κύκλο ακτίνας 1, ένα μοναδιαίο δηλαδή κύκλο, και ορίζουμε τη μονάδα **ακτίνιο** (radian) να είναι εκείνο το μήκος τόξου έτσι ώστε το μήκος της περιφέρειας του μοναδιαίου κύκλου να είναι 2π ακτίνια, και γράφουμε 2π rad.

Από τον ορισμό των δύο μονάδων προκύπτει η αντιστοιχία

$$2\pi \text{ rad} \simeq 360^\circ \Leftrightarrow \pi \text{ rad} \simeq 180^\circ,$$

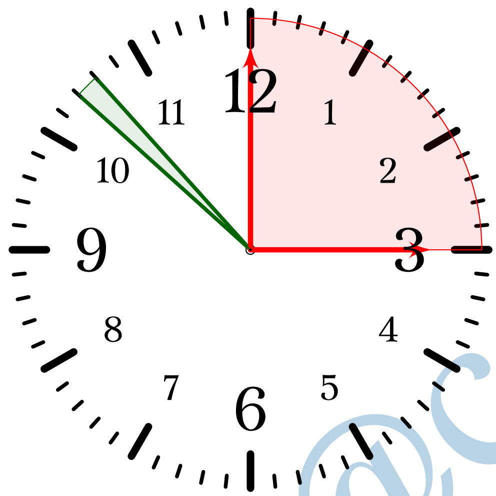
κατά συνέπεια

$$1 \text{ rad} \simeq \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57.2957795130823209\ldots^\circ .$$

[3] Μπορεί να αποδειχθεί ότι τόσο το όριο s όσο και το $sr/2$ είναι ανεξάρτητα του τρόπου που επιλέγεται η ακολουθία των πολυγώνων, κατά συνέπεια το μήκος τόξου και το εμβαδόν του κυκλικού τομέα είναι καλά ορισμένα.

Έτσι έχουμε για παράδειγμα τις αντιστοιχίες

$$30^\circ \simeq \frac{\pi}{6}, \qquad 45^\circ \simeq \frac{\pi}{4}, \qquad 60^\circ \simeq \frac{\pi}{3}, \qquad 90^\circ \simeq \frac{\pi}{2}, \qquad 120^\circ \simeq \frac{2\pi}{3}, \qquad \cdots$$



Σχήμα 3.9: Η πράσινη γωνία, η γωνία δηλαδή που αντιστοιχεί σε ένα λεπτό της ώρας, είναι $360^\circ/60 = 6^\circ$, ή $2\pi/60 = \pi/30$ ακτίνια, και η κόκκινη είναι $360^\circ/4 = 90^\circ$, ή $2\pi/4 = \pi/2$ ακτίνια

Απόρροια του ορισμού του ακτινίου είναι ότι αν s είναι το μήκος ενός τόξου κύκλου ακτίνας r και θ είναι το μέτρο σε ακτίνια της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί στο τόξο, δηλαδή το μήκος του τόξου της μοναδιαίας περιφέρειας που αντιστοιχεί στην επίκεντρη γωνία, τότε

$$s = \theta r.$$

Το γεγονός αυτό συμφωνεί με το αποτέλεσμα ότι το μήκος της περιφέρειας ακτίνας r είναι ίσο με $2\pi r$.

3.2.6 Ο τριγωνομετρικός κύκλος

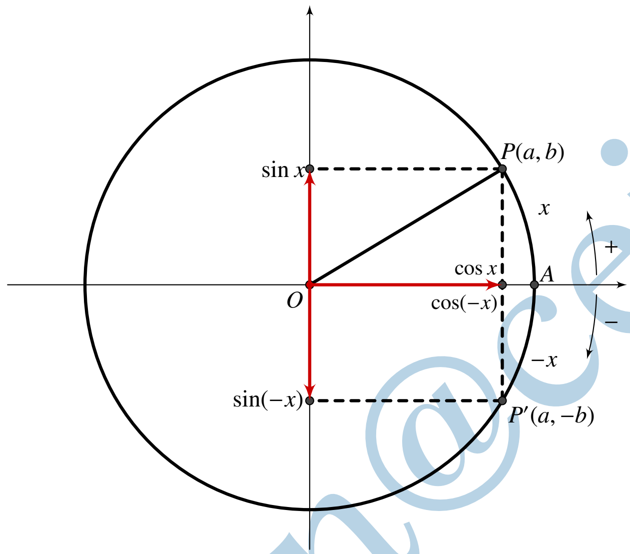
Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων κάθετων μεταξύ τους, έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο, και έναν κύκλο ακτίνας 1 με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια ορίζουμε προσανατολισμό στον κύκλο. Θεωρούμε ως αρχή μέτρησης το σημείο $(1, 0)$ της περιφέρειας, το σημείο A στο Σχήμα 3.10. Ορίζουμε ως **θετική φορά** διαγραφής εκείνη κατά την οποία η κίνηση γίνεται αντίθετα από αυτήν των δεικτών του ρολογιού, και **αρνητική φορά** την αντίθετη, δηλαδή εκείνη κατά την οποία η κίνηση ακολουθεί αυτήν των δεικτών. Τον προσανατολισμένο μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή αυτόν με ακτίνα ίση με 1, ονομάζουμε **τριγωνομετρικό κύκλο**.

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός ώστε $-\pi \le x \le \pi$. Έστω P το σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο έτσι ώστε το τόξο AP να είναι ίσο με x rad. Εννοείται ότι αν $x < 0$, τότε το τόξο AP

έχει μήκος $|x|$ και η μετάβαση από το A στο P γίνεται κατά την αρνητική φορά. Αν (a, b) είναι οι συντεταγμένες του σημείου P ορίζουμε

$$\cos x = a \qquad \text{και} \qquad \sin x = b.$$

Σημειώνουμε ότι αν $x = \pi$ ή $x = -\pi$, τότε $P = (-1, 0)$. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι



Σχήμα 3.10: Ο τριγωνομετρικός κύκλος Ι

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x. \tag{3.12}$$

Επεκτείνοντας τον ορισμό, για $-\pi \le x \le \pi$ και $k \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \text{και} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

Έτσι ορίζουμε πρακτικά τις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $\cos x$ και $\sin x$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Παρατηρούμε ότι

$$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \text{και} \qquad -1 \le \sin x \le 1 \tag{3.13}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού των συναρτήσεων cos και sin είναι η **βασική τριγωνομετρική ταυτότητα**

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{3.14}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πράγματι αν $x \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχουν μοναδικοί $k \in \mathbb{N}$ και $x_0 \in (-\pi, \pi]$ ώστε $x = x_0 + 2k\pi$, και οι $|\cos x_0|$ και $|\sin x_0|$ είναι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου με υποτείνουσα την ακτίνα του τριγωνομετρικού κύκλου, βλέπε Σχήμα 3.10.

Από τον ορισμό υπολογίζουμε για παράδειγμα

Τριγωνομετρικοί αριθμοί κάποιων χαρακτηριστικών γωνιών									
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\cos x$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0	$\sqrt{2}/2$	1
$\sin x$	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0

Άσκηση 3.4. Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών $\pi/6$ και $\pi/3$. **Υπόδειξη**: Υπάρχει μια χαρακτηριστική σχέση μεταξύ των πλευρών τριγώνου με γωνίες $\pi/6$, $\pi/3$ και $\pi/2$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις σχέσεις

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Οι κλασματικές αυτές συναρτήσεις ορίζονται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τις διακριτές τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής. Συγκεκριμένα, επειδή

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \text{και} \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

έπεται ότι τα πεδία ορισμού αυτών των συναρτήσεων είναι

$$\begin{aligned} D(\tan) = D(\sec) &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\} \\ D(\cot) = D(\csc) &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

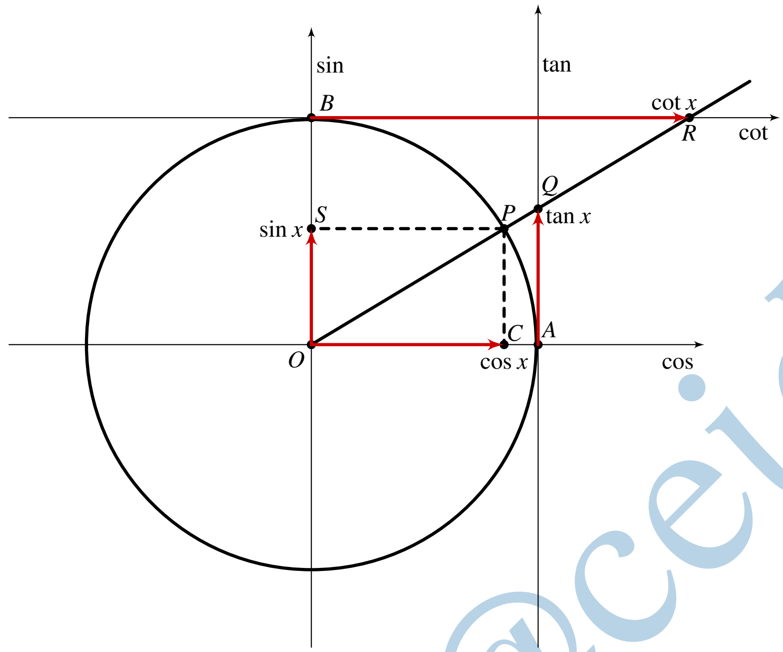
Έστω $x \in \mathbb{R}$ και P το σημείο στον τριγωνομετρικό κύκλο ώστε το προσημασμένο μέτρο του τόξου AP να είναι x. Η προβολή του σημείου P στον οριζόντιο άξονα είναι $\cos x$ και η προβολή του P στον κατακόρυφο άξονα είναι $\sin x$. Έτσι τον μεν οριζόντιο άξονα ονομάζουμε **άξονα των συνημιτόνων** και τον κατακόρυφο ονομάζουμε **άξονα των ημιτόνων**. Στον τριγωνομετρικό κύκλο θεωρούμε τις εφαπτόμενες ευθείες στα σημεία $A(1,0)$ και $B(0,1)$, βλέπε Σχήμα 3.11. Έστω $C = (\cos x, 0)$ και $S = (0, \sin x)$ και έστω Q και R τα σημεία τομής της ευθείας που περνά από τα O και P και της κατακόρυφης και οριζόντιας εφαπτομένης αντίστοιχα. Από τα όμοια τρίγωνα AOQ και COP έχουμε

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AQ}{CP} \Rightarrow AQ = \frac{CP}{OC} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x,$$

ενώ από τα BOR και SOP έπεται ότι

$$\frac{OB}{OS} = \frac{BR}{SP} \Rightarrow BR = \frac{SP}{OS} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$$

Έτσι η ημιευθεία από το O δια του P τέμνει τον μεν κατακόρυφο εφαπτόμενο άξονα στο $\tan x$ τον δε οριζόντιο εφαπτόμενο άξονα στο $\cot x$, κατά συνέπεια τον εφαπτόμενο άξονα με αρχή το $(1,0)$ ονομάζουμε **άξονα των εφαπτομένων** και τον εφαπτόμενο άξονα με αρχή το $(0,1)$ ονομάζουμε **άξονα των συνεφαπτομένων**.



Σχήμα 3.11: Ο τριγωνομετρικός κύκλος II

Παρατηρούμε ότι αν $0 < x < \pi/2$, τότε από το τρίγωνο POC και τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας ορθογωνίου τριγώνου έχουμε

$$\cos x = \frac{OC}{OP} = OC = a$$
$$\sin x = \frac{CP}{OP} = CP = b$$

κατά συνέπεια ο ορισμός των $\sin x$ και $\cos x$ επεκτείνει αυτόν των συνημιτόνου και ημιτόνου γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Το ανάλογο ισχύει και για τα $\tan x$ και $\cot x$ από τον ορισμό τους.

Παρατήρηση 3.2. Αν $Q(x, y) \neq (0, 0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου και θέσουμε $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, την απόστασή του από την αρχή των αξόνων, τότε $r > 0$ και το σημείο $P(x/r, y/r)$ βρίσκεται επάνω στη μοναδιαία περιφέρεια αφού

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

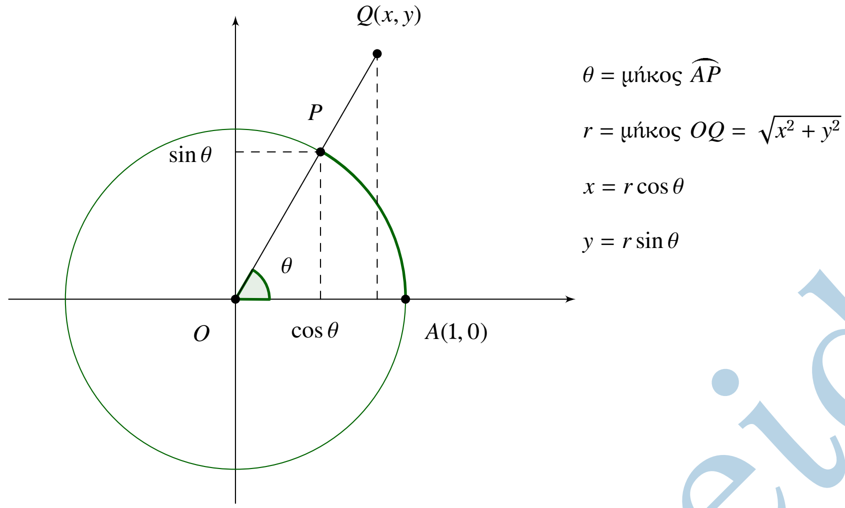
από τον ορισμό του r. Αν θ είναι το τόξο από το $A(0, 1)$ στο P, βλέπε Σχήμα 3.12, τότε

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}, \tag{3.15}$$

κατά συνέπεια

$$x = r\cos\theta \qquad \text{και} \qquad y = r\sin\theta. \tag{3.16}$$

Τους αριθμούς r και θ λέμε **πολικές συντεταγμένες** του σημείου Q.

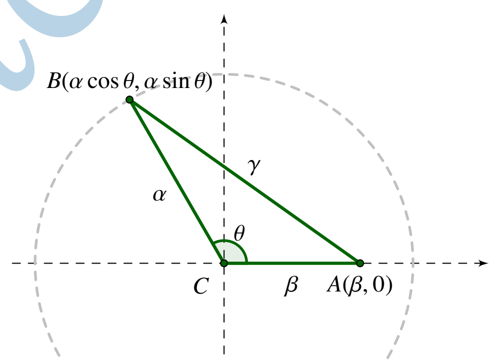


Σχήμα 3.12: Καρτεσιανές και πολικές συντεταγμένες

Άσκηση 3.5 (Ο νόμος του συνημιτόνου). Έστω ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, και γ. Εάν θ είναι η γωνία απέναντι από την πλευρά μήκους γ δείξτε ότι

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta.$$

Λύση. Έστω ABC το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ τοποθετημενο στο καρτεσιανό επίπεδο με τον τρόπο που αποτυπώνεται στο Σχήμα 3.13.



Σχήμα 3.13: Ο νόμος του συνημιτόνου

Η κορυφή B βρίσκεται πάνω σε περιφέρεια ακτίνας α, κατά συνέπεια οι συντεταγμένες του B

είναι $(\alpha\cos\theta, \alpha\sin\theta)$ (γιατί;). Το μήκος γ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων A και B, επομένως

$$\begin{aligned}\gamma^2 &= (\alpha\cos\theta - \beta)^2 + (\alpha\sin\theta)^2\\ &= \alpha^2\cos^2\theta - 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2 + \alpha^2\sin^2\theta\\ &= \alpha^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta\\ &= \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta \qquad\qquad \text{(από την (3.14))}\end{aligned}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε. □

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση που η γωνία θ είναι ορθή ο νόμος του συνημιτόνου καταλήγει στο Πυθαγόριο Θεώρημα.

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

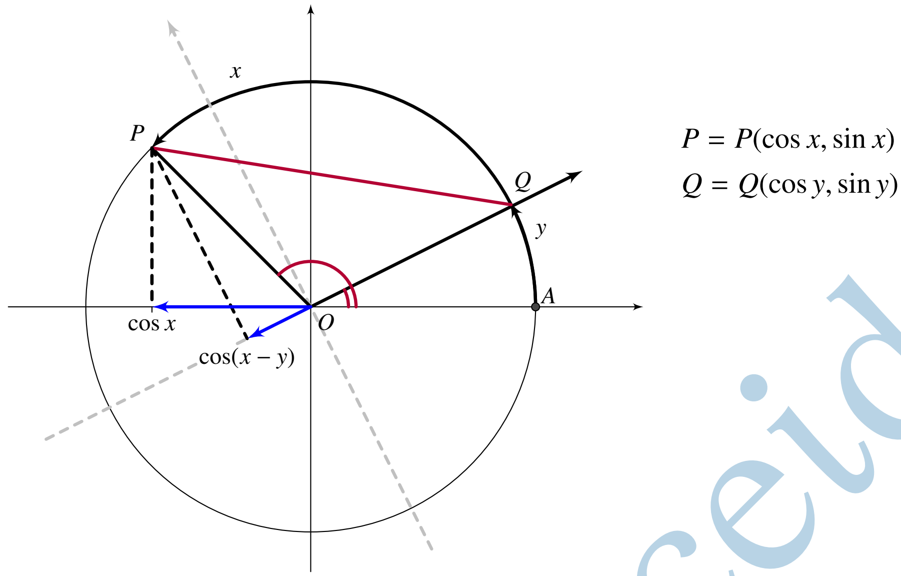
Για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις ισχύουν αρκετές ταυτοτικές σχέσεις μερικές από τις οποίες είναι πολύ χρήσιμες σε διάφορους υπολογισμούς. Αφήνουμε την απόδειξή τους ως άσκηση.

1. $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$.
2. $\sin(\pi \pm x) = \pm\sin x$.
3. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp\sin x$.
4. $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$.
5. $\cos(x \pm y) = \cos x\,\cos y \mp \sin x\,\sin y$.
6. $\sin(x \pm y) = \sin x\,\cos y \pm \cos x\,\sin y$.
7. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.
8. $\sin 2x = 2\sin x\,\cos x$.
9. $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$.
10. $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$.
11. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.
12. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

Αποδεικνύουμε την 5. Πρώτα δείχνουμε ότι $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$. Αν $x = y$ η σχέση γίνεται $\cos 0 = 1 = \cos^2 + \sin^2 x$ η οποία ισχύει. Υποθέτουμε ότι $x \neq y$. Έστω P και Q σημεία στον τριγωνομετρικό κύκλο με $P = P(\cos x, \sin x)$ και $Q = Q(\cos y, \sin y)$. Αν $d = d(P, Q)$ είναι η απόσταση μεταξύ P και Q, τότε

$$\begin{aligned}d^2 &= (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2\\ &= \cos^2 x - 2\cos x\cos y + \cos^2 y + \sin^2 x - 2\sin x\sin y + \sin^2 y\\ &= 2 - 2(\cos x\cos y + \sin x\sin y)\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων με κέντρο πάλι το O (ισοδυναμεί με στροφή του αρχικού συστήματος) ώστε ο οριζόντιος άξονας να είναι κατά μήκος του OQ, βλέπε σχήμα, τότε στο νέο



Σχήμα 3.14: Το συνημίτονο της διαφοράς δύο τόξων

σύστημα οι συντεταγμένες των P και Q είναι $P(\cos(x-y), \sin(x-y))$ και $Q(1,0)$ και για την απόσταση μεταξύ τους έχουμε

$$\begin{aligned} d^2 &= (\cos(x-y)-1)^2 + \sin^2(x-y) \\ &= \cos^2(x-y) - 2\cos(x-y) + 1 + \sin^2(x-y) \\ &= 2 - 2\cos(x-y). \end{aligned}$$

Επειδή η απόσταση είναι ανεξάρτητη του ορθογωνίου συστήματος οι δύο εκφράσεις είναι ίσες και από την ισότητα προκύπτει η ζητούμενη σχέση. Θέτοντας στη συνέχεια $-y$ στη θέση του y στη σχέση που αποδείξαμε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos(-y) + \sin x \sin(-x) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin x \end{aligned}$$

αφού η sin είναι περιττή. Η απόδειξη της 5. είναι πλήρης. Σημειώνουμε ότι η 6. προκύπτει από την 5. με χρήση της 3.

Άσκηση 3.6. Για $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι

(α′) $\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x$.

(β′) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Άσκηση 3.7. Για $x, y \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \, \tan y}.$$

Τρεις χρήσιμες ανισότητες

Έστω $0 < x < \pi/2$ και έστω P το σημείο στον τριγωνομετρικό κύκλο ώστε το μήκος του τόξου AP να είναι x. Η ημιευθεία από το κέντρο O του κύκλου δια του P τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων στο Q, βλέπε Σχήμα 3.11. Αν C είναι η προβολή του P στον οριζόντιο άξονα, τότε

$$\begin{gathered}
\text{Εμβαδόν τριγώνου } POC \leq \text{Εμβαδόν τομέα } POA \leq \text{Εμβαδόν τριγώνου } QOA \\
\frac{1}{2}(\cos x)(\sin x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x \\
\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \\
\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}
\end{gathered}$$

Επειδή

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

και η $\cos x$ είναι άρτα συνάρτηση έπεται ότι

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \tag{3.17}$$

Αν στο Σχήμα 3.11 θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα PA, τότε αφενός $PC < AP$, αφού η AP είναι η υποτείνουσα στο τρίγωνο PCA, και αφετέρου $AP <$ τόξο AP (γιατί;) έτσι ισχύει η ανισότητα

$$0 < \sin x < x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

επιπλέον από την απόδειξη της (3.17) έπεται ότι $x \leq \tan x$, κατά συνέπεια

$$0 < \sin x < x \leq \tan x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

οπότε και

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{3.18}$$

Άμεση συνέπεια της (3.18) είναι η

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{3.19}$$

Κεφάλαιο 4

Οι Φυσικοί αριθμοί

4.1 Το σύνολο των φυσικών αριθμών

Το σύνολο των φυσικών (natural) αριθμών $\mathbb{N}$ ορίζεται μοναδικά από τα αξιώματα του Peano (1858–1932). Βλέπε για παράδειγμα [8], [7].

- **Αξίωμα 1** Ο 1 είναι φυσικός αριθμός.
- **Αξίωμα 2** Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός επόμενος φυσικός αριθμός n^+.
- **Αξίωμα 3** Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n με $n^+ = 1$.
- **Αξίωμα 4** Για κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών m και n με $m^+ = n^+$ είναι $m = n$.
- **Αξίωμα 5** Εάν A είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις ιδιότητες: (i) $1 \in A$ και (ii) για κάθε $n \in A$, ο $n^+ \in A$ τότε $A = \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $1^+ = 2$, $2^+ = 3$, $3^+ = 4$, και τα λοιπά, οπότε

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}. \tag{4.1}$$

Το τελευταίο αξίωμα χαρακτηρίζεται ως η **αρχή της μαθηματικής επαγωγής**.

Θεώρημα 4.1 (Αρχή της μαθηματικής επαγωγής). *Έστω $p(n)$ να είναι μία πρόταση που διατυπώνεται για τον τυχαίο φυσικό αριθμό n, και είναι τέτοια ώστε:*

(1) *Η $p(1)$ είναι αληθής*

(2) *Για κάθε φυσικό αριθμό k όταν η $p(k)$ είναι αληθής, τότε και η $p(k^+)$ είναι αληθής.*

Τότε η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω A να είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών για τους οποίους η p είναι αληθής, δηλαδή $A = \{n \in \mathbb{N} : p(n) \text{ είναι αληθής}\}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $1 \in A$, και εάν $k \in A$ τότε $k^+ \in A$. Τότε όμως από το Αξίωμα 5 έπεται ότι $A = \mathbb{N}$, ή ισοδύναμα η $p(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Στο $\mathbb{N}$ η πράξη της **πρόσθεσης** "+" μπορεί να ορισθεί επαγωγικά ως

$$n + 1 = n^+, \qquad n + 2 = (n+1)^+, \qquad \ldots, \qquad n + (m+1) = (n+m)^+, \qquad \ldots$$

έτσι ώστε αν $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε $n + m \in \mathbb{N}$, καθώς και ο **πολλαπλασιασμός** "·" ως

$$n \cdot 1 = n, \qquad n \cdot 2 = (n \cdot 1) + n, \qquad \ldots, \qquad n \cdot (m+1) = (n \cdot m) + n, \qquad \ldots$$

έτσι ώστε αν $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε $n \cdot m \in \mathbb{N}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι για τις δύο πράξεις ισχύουν οι ιδιότητες

1. $n + m = m + n$.
2. $(n + m) + l = n + (m + l)$.
3. $n \cdot m = m \cdot n$.
4. $(n \cdot m) \cdot l = n \cdot (m \cdot l)$.
5. $n \cdot 1 = n$.
6. $n \cdot (m + l) = n \cdot m + n \cdot l$.

4.2 Μαθηματική επαγωγή

Προτάσεις όπως αυτές που περιγράφει το Θεώρημα 4.1 συναντώνται πολύ συχνά στα Μαθηματικά. Μία τέτοια είναι η πρόταση $p(n) \equiv$ "$1+2+3+\cdots+n = n(n+1)/2$". Για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ακολουθούμε τα βήματα:

(Β$_1$) Αποδεικνύουμε ότι η $p(1)$ είναι αληθής.

(Β$_2$) Υποθέτουμε ότι η $p(k)$ είναι αληθής και δείχνουμε ότι η $p(k+1)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα 4.1. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών $1, 2, \ldots, n$ ισούται με $n(n+1)/2$, δηλαδή

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{4.2}$$

Για $n = 1$ η (4.2) γίνεται

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

που ισχύει. Άρα η (4.2) είναι αληθής για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{4.3}$$

για κάποιο φυσικό k, και αποδεικνύουμε ότι

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{4.4}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) &= 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \qquad \text{(από την υπόθεση (4.3))} \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

που είναι η (4.4). Σύμφωνα με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η (4.2) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 4.1. Στη γλώσσα της Λογικής η αρχή της Μαθηματικής επαγωγής κωδικοποιείται ως εξής: «Εάν η $p(1)$ είναι αληθής και η $p(k) \to p(k+1)$ είναι αληθής $\forall k \in \mathbb{N}$, τότε η $p(n)$ είναι αληθής $\forall n \in \mathbb{N}$». Στη πράξη αυτό αποδεικνύουμε αφού δεν γνωρίζουμε εάν η $p(k)$ αληθεύει.

Στη συνέχεια δίνουμε μία διαφορετικού τύπου εφαρμογή της μαθηματικής επαγωγής. Το αποτέλεσμα αυτό αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 1.2. Πρώτα εισάγουμε τη σχετική ορολογία. Εάν A είναι ένα σύνολο που περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του. Εάν $|A| = n$ μπορούμε να γράφουμε $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Παρατηρούμε ότι εάν A και B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, συγκεκριμμένα $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Παράδειγμα 4.2. Εάν A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο με $|A| = n$ όπου n είναι φυσικός αριθμός, τότε $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Θυμίζουμε ότι $\mathcal{P}(A)$ είναι το δυναμοσύνολο του A.

Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για $n = 1$. Έστω A ένα σύνολο με ένα στοιχείο, δηλαδή έστω $A = A_1 = \{a_1\}$. Τότε $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a_1\}\}$, οπότε $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1$, κατά συνέπεια ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = 1$.

Δεχόμαστε στη συνέχεια ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k$, υποθέτουμε δηλαδή ότι κάθε σύνολο με k στοιχεία έχει 2^k υποσύνολα, ισοδύναμα εάν $|A| = k$, τότε $|\mathcal{P}(A)| = 2^k$.

Με την παραπάνω υπόθεση αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k+1$, δηλαδή εάν A είναι ένα σύνολο με $k+1$ στοιχεία τότε $|\mathcal{P}(A)| = 2^{k+1}$. Έστω λοιπόν ότι

$$A = A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\},$$

τότε όμως μπορούμε να γράψουμε $A = A_k \cup \{a_{k+1}\}$, όπου $A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Ένα υποσύνολο του A είτε περιέχει το a_{k+1} είτε όχι. Αν περιέχει το a_{k+1} θα είναι της μορφής $B \cup \{a_{k+1}\}$ όπου $B \subseteq A_k$, κατά συνέπεια θα έχουμε

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A_k) \cup \{B \cup \{a_{k+1}\} : B \in \mathcal{P}(A_k)\}$$

όπου τα σύνολα που αποτελούν την ένωση είναι ξένα μεταξύ τους (γιατί;). Παρατηρούμε ότι $|\{B \cup \{a_{k+1}\} : B \in \mathcal{P}(A_k)\}| = |\mathcal{P}(A_k)|$ (γιατί;), επομένως

$$|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(A_k)| + |\mathcal{P}(A_k)| = 2^k + 2^k = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

που είναι αυτό που θέλουμε να δείξουμε.

Έτσι ο ισχυρισμός είναι σωστός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε εδώ ότι εάν $A = \varnothing$, τότε $|A| = 0$, και $\mathcal{P}(A) = \{\varnothing\}$, οπότε $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$, δηλαδή η πρόταση: $|A| = n \to |\mathcal{P}(A)| = 2^n$ είναι αληθής για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αρκετές φορές γράφουμε

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}. \tag{4.5}$$

Πρόταση 4.1 (Η ανισότητα του Bernoulli). *Εάν $a \geq -1$ να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει*

$$(1+a)^n \geq 1 + na. \tag{4.6}$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n = 1$. Πραγματικά

$$(1+a)^1 = 1 + a,$$

άρα η (4.6) ιχύει ως ισότητα. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η (4.6) ισχύει για $n = k$, δηλαδή $(1+a)^k \geq 1 + ka$ και αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για $n = k+1$, δηλαδή $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$. Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \\
&\geq (1+a)(1+ka) && \text{(από την υπόθεση της επαγωγής, αφού } 1+a \geq 0\text{)} \\
&= 1 + ka + a + ka^2 \\
&= 1 + (k+1)a + ka^2 \\
&\geq 1 + (k+1)a && (ka^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

που είναι η ανισότητα που θέλουμε. Άρα η (4.6) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Κάποιες φορές έχουμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής όχι για όλα τα n αλλά για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι κάποιος συγκεκριμμένος αριθμός. Στη περίπτωση αυτή ως πρώτο βήμα δείχνουμε ότι η $p(n_0)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα 4.3. Να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 4$ ισχύει

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n > n + 1. \tag{4.7}$$

Για $n = 4$ έχουμε

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} > \frac{80}{16} = 5 = 4 + 1,$$

άρα η ανισότητα ισχύει για $n = 4$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \geq 4$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^k > k + 1$$

και αποδεικνύουμε ότι

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} > (k + 1) + 1.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} &= \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k \\
&> \frac{3}{2}(k + 1) && \text{(από την υπόθεση της επαγωγής)} \\
&= k + \frac{k}{2} + \frac{3}{2} \\
&\geq k + 2 + \frac{3}{2} && (k \geq 4) \\
&> (k + 1) + 1
\end{aligned}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να αποδείξουμε. Άρα η (4.7) είναι αληθής για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 4$. Η (4.7) προφανώς δεν ισχύει για $n = 3$, καθόσον $(3/2)^3 = 3 + 1/2 < 3 + 1$.

Άσκηση 4.1 (Παραλλαγή της ανισότητας του Bernoulli). Εάν $a \neq 0$ και $a > -1$ να δειχθεί ότι

$$(1 + a)^n > 1 + na, \tag{4.8}$$

για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$.

Μία παραλλαγή της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής είναι η παρακάτω. Η απόδειξή της αφήνεται ως άσκηση.

Θεώρημα 4.2. *Έστω $p(n)$ να είναι μία πρόταση που διατυπώνεται για τον τυχαίο φυσικό αριθμό n, και είναι τέτοια ώστε:*

(1) *$p(1)$ είναι αληθής*

(2) *Εάν για κάθε φυσικό αριθμό k όταν η $p(j)$ είναι αληθής για κάθε $j \leq k$, τότε και η $p(k+1)$ είναι αληθής.*

Τότε η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

4.3 Επαγωγικοί ορισμοί

Παράδειγμα 4.4. Εάν $a_1, a_2, a_3, \ldots$ είναι αριθμοί ορίζουμε

$$\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1 \qquad \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{n+1},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$. Έτσι

$$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 \qquad \sum_{k=1}^{3} a_k = (a_1 + a_2) + a_3.$$

Επειδή $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα) μπορούμε να γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1 + a_2 + a_3,$$

και γενικότερα

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Παράδειγμα 4.5. Εάν $A_1, A_2, A_3, \ldots$ είναι σύνολα ορίζουμε

$$\bigcup_{k=1}^{1} A_k = A_1 \qquad \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1},$$

όπου $n \in \mathbb{N}$. Έτσι

$$\bigcup_{k=1}^{2} A_k = A_1 \cup A_2 \qquad \bigcup_{k=1}^{3} A_k = (A_1 \cup A_2) \cup A_3.$$

Επειδή $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα) μπορούμε να γράφουμε

$$\bigcup_{k=1}^{3} A_k = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

και γενικότερα

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

Από δε την Παρατήρηση 1.2 έπεται ότι

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

Τα ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την τομή.

4.4 Το δυωνυμικό Θεώρημα

Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί θυμίζουμε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,\end{aligned}$$

οι οποίες επαληθεύονται εύκολα κάνοντας πράξεις. Είναι λοιπόν λογικό να σκεφτούμε εάν υπάρχει γενικός τύπος για το ανάπτυγμα του $(a+b)^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 4.1. Εάν $n \in \mathbb{N}$ με $n!$ συμβολίζουμε τον αριθμό

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Ο $n!$ διαβάζεται ***n* παραγοντικό** (factorial). Έτσι $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, κοκ. Ορίζουμε επίσης $0! = 1$. Για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ και $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ορίζουμε τον **δυωνυμικό συντελεστή** (binomial coefficient) n ανά k με τη σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Πολλές φορές γράφουμε $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Παρατήρηση 4.2 (Ιδιότητες των δυωνυμικών συντελεστών). Εάν $n \in \mathbb{N}_0$ και $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, τότε ισχύουν οι ταυτότητες

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, ειδικότερα για $k = n$ είναι $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

   Η απόδειξη έπεται άμεσα από τον ορισμό

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Πράγματι

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!}$$
$$= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}.$$

Θεώρημα 4.3 (Το Δυωνυμικό Θεώρημα). *Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \tag{4.9}$$

για κάθε φυσικό αριθμό n.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι εάν ένας τουλάχιστον από τους a και b είναι μηδέν τότε η (4.9) ισχύει τετριμμένα. Ας υποθέσουμε ότι $a \neq 0$ και $b \neq 0$, τότε

$$(a+b)^n = b^n\left(\frac{a}{b}+1\right)^n,$$

οπότε η (4.9) γράφεται

$$b^n\left(\frac{a}{b}+1\right)^n = b^n\left[\binom{n}{0}\frac{a^n}{b^n} + \binom{n}{1}\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \binom{n}{2}\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{a}{b} + \binom{n}{n}\right].$$

Ορίζοντας $t = a/b$ βλέπουμε ότι η (4.9) είναι ισοδύναμη με την

$$(t+1)^n = \binom{n}{0}t^n + \binom{n}{1}t^{n-1} + \binom{n}{2}t^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}t + \binom{n}{n}. \tag{4.10}$$

Αποδεικνύουμε την (4.10) με μαθηματική επαγωγή.
Για $n = 1$ έχουμε

$$\binom{1}{0}t + \binom{1}{1} = t + 1 = (t+1)^1,$$

οπότε η ισότητα (4.10) ισχύει για $n = 1$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι

$$(t+1)^k = \binom{k}{0}t^k + \binom{k}{1}t^{k-1} + \binom{k}{2}t^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}t + \binom{k}{k}.$$

Τότε

$$(t+1)^{k+1} = (t+1)(t+1)^k$$
$$= (t+1)\left[\binom{k}{0}t^k + \binom{k}{1}t^{k-1} + \binom{k}{2}t^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}t + \binom{k}{k}\right],$$

από την υπόθεση της επαγωγής, έτσι υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}(t+1)^{k+1} &= \binom{k}{0}t^{k+1} + \binom{k}{1}t^{k} + \binom{k}{2}t^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-1}t^{2} + \binom{k}{k}t \\ &\quad + \binom{k}{0}t^{k} + \binom{k}{1}t^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-2}t^{2} + \binom{k}{k-1}t + \binom{k}{k} \\ &= \binom{k}{0}t^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]t^{k} + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]t^{k-1} + \cdots + \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]t + \binom{k}{k} \\ &= \binom{k+1}{0}t^{k+1} + \binom{k+1}{1}t^{k} + \binom{k+1}{2}t^{k-2} + \cdots + \binom{k+1}{k}t + \binom{k+1}{k+1},\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες των δυωνυμικών συντελεστών (βλέπε Παρατήρηση 4.2). Η τελευταία όμως ισότητα είναι η (4.10) για $n = k+1$, οπότε η (4.10) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα και η (4.9). □

Πόρισμα 4.1. *Εάν n είναι φυσικός αριθμός, τότε*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^{n}. \tag{4.11}$$

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.10) για $a = b = 1$ έπεται το αποτέλεσμα. □

4.5 Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

   (α΄) $n < 2^{n}$.

   (β΄) $1 + 2n \leq 3^{n}$.

   (γ΄) $(1+m)^{n} \geq 1 + nm$, όπου m είναι σταθερός φυσικός αριθμός.

2. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

   (α΄) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^{2}$.

   (β΄) $1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \cdots + n^{2} = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (γ΄) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

   (δ΄) $\dfrac{n^{2}}{2} < 1 + 2 + 3 + \cdots + n < \dfrac{(n+1)^{2}}{2}$.

3. Να δειχθεί ότι το πλήθος των διαγωνίων κυρτού πολυγώνου με n κορυφές ισούται με $n(n-3)/2$.

4. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

(α΄) Ο 2 διαιρεί τον $n^2 + n$.

(β΄) Ο 4 διαιρεί τον $5^n - 1$.

(γ΄) Ο 64 διαιρεί τον $7^{2n} + 16n - 1$.

5. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \qquad a \neq 1.$$

6. Εάν a είναι ένας πραγματικός αριθμός, να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

(α΄) $(1 - a)^n \geq 1 - na, \qquad a \leq 1.$

(β΄) $(1 - a)^n < \dfrac{1}{1 + na}, \qquad 0 < a \leq 1.$

7. Εάν $a \neq b$ είναι πραγματικοί αριθμοί με χρήση της μαθηματικής επαγωγής να δειχθεί ότι ο $a - b$ είναι παράγοντας του $a^n - b^n$ για κάθε φυσικό αριθμό n. **Υπόδειξη**: $a^{k+1} - b^{k+1} = a^k(a - b) + (a^k - b^k)b$.

8. Να δειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

(α΄) $\displaystyle\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} > \frac{1}{2}$. **Υπόδειξη**: Αν $a \leq c_k \leq b$ για $k = 1, 2, \ldots, n$, τότε $na \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_n \leq nb$.

(β΄) $\displaystyle\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{2^n}$.

(γ΄) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n+2}{2}$.

(δ΄) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$.

Κεφάλαιο 5

Οι μιγαδικοί αριθμοί

5.1 Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x^2 \geq 0$. Διατυπώνεται λοιπόν το ερώτημα κατά πόσον υπάρχει ένα σύστημα αριθμών που κατά κάποια έννοια επεκτείνει τους πραγματικούς αριθμούς και είναι τέτοιο ώστε η εξίσωση $x^2+1=0$ να έχει λύση. Αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο σύστημα υπάρχει και αυτό είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Σε αυτό το σύστημα οι ζητούμενες λύσεις δεν θα μπορούσαν να είναι άλλες από τις

$$x = \sqrt{-1}, \qquad \text{και} \qquad x = -\sqrt{-1}.$$

Στη συνέχεια με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών, με $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων και με $\mathbb{Q}$ το σύνολο τν ρητών αριθμών.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Στο σύνολο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, όπου

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2,$$

με τη γνωστή πρόσθεση

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{5.1}$$

ορίζουμε την πράξη του πολαπλασιασμού με τη σχέση

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \tag{5.2}$$

Παρατηρούμε ότι για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \tag{5.3}$$

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0) \tag{5.4}$$

$$(x, y)(1, 0) = (x, y), \tag{5.5}$$

δηλαδή το $(0,0)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, δηλαδή το μηδέν, το $(-x,-y)$ είναι το αντίθετο του (x,y), ενώ το $(1,0)$ είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, η μονάδα. Εξετάζοντας εάν υπάρχει το αντίστροφο του (x,y), δηλαδή εκείνο το (x',y') για το οποίο

$$(x,y)(x',y') = (1,0)$$

και παρατηρώντας ότι

$$(0,0)(x',y') = (0,0) \tag{5.6}$$

υποθέτουμε ότι $(x,y) \neq (0,0)$. Εάν (a,b) είναι το αντίστροφο στοιχείο του (x,y), εάν αυτό υπάρχει, τότε θα πρέπει

$$(x,y)(a,b) = (xa - yb, xb + ya) = (1,0).$$

Από την παραπάνω ισότητα στο $\mathbb{R}^2$ προκύπτουν οι σχέσεις $xa - yb = 1$ και $xb + ya = 0$. Λύνοντας αυτό το σύστημα βρίσκουμε

$$a = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad b = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Οι αριθμοί a και b υπάρχουν, καθόσον $x^2 + y^2 > 0$ οποτεδήποτε $(x,y) \neq (0,0)$, επομένως το αντίστροφο του (x,y) το οποίο συμβολίζουμε με $(x,y)^{-1}$ είναι το

$$(x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right). \tag{5.7}$$

Το σύνολο των σημείων $z = (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις (5.1) και (5.2) συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$ και τα στοιχεία του καλούμε *μιγαδικούς αριθμούς* (complex numbers). Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{C}$ είναι σώμα, ικανοποιούνται δηλαδή οι νόμοι

M1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.

M2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

M3. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{0} = (0,0)$, έτσι ώστε $z + \mathbf{0} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

M4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός $-z$, έτσι ώστε $z + (-z) = \mathbf{0}$.

M5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.

M6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

M7. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{1} = (1,0)$, έτσι ώστε $z \cdot \mathbf{1} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.

M8. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός z^{-1} έτσι ώστε $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.

M9. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

Απόρροια των πράξεων (5.1) και (5.2) είναι ότι

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$
$$(0,1)(y,0) = (0,y)$$

έτσι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \tag{5.8}$$

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, σημείο της ευθείας, μπορεί να ταυτοποιηθεί με το $(x, 0)$, σημείο του επιπέδου. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0), \qquad (x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0),$$

δηλαδή το σώμα των μιγαδικών αριθμών επεκτείνει κατά φυσιολογικό τρόπο το σώμα των πραγματικών αριθμών, και υπό το πρίσμα της ταυτοποίησης $x \equiv (x, 0)$ μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Στη συνέχεια θα γράφουμε 0 αντί για $\mathbf{0}$ και 1 αντί για $\mathbf{1}$. Θέτοντας $i = (0, 1)$ σύμφωνα με την παραπάνω ταυτοποίηση η (5.8) γράφεται

$$(x, y) = x + iy. \tag{5.9}$$

Ο μιγαδικός αριθμός i λέγεται *φανταστική μονάδα* (imaginary unit) για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω. Εάν $z = (x, y)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $z = x + iy$. Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε το άθροισμα $z_1 + z_2$ και το γινόμενο $z_1 z_2$ δίνονται, μέσω των (5.1) και (5.2), από τις σχέσεις

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{5.10}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{5.11}$$

Όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, επαγωγικά ορίζουμε $z^{n+1} = z^n z$, για κάθε φυσικό αριθμό n. Παρατηρούμε ότι

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

σύμφωνα με την ταυτοποίηση, γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία φανταστική μονάδα. Επειδή $-i = (0, -1)$ θα είναι

$$(-i)^2 = (0, -1)(0, -1) = (-1, 0) = -1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $i^2 + 1 = 0$ και $(-i)^2 + 1 = 0$.

Παρατήρηση 5.1. Ας θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Από τον αντιμεταθετικό νόμο (νόμος Μ5) έχουμε $iy = yi$ οπότε ο μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy, \qquad \text{ή} \qquad z = x + yi.$$

Επίσης από την μοναδικότητα του αντίθετου μιγαδικού αριθμού έπεται ότι

$$i(-y) = (-1)iy = -iy.$$

Έτσι από τις (5.9), (5.4) και (5.7) έπεται ότι οι $-z$ και z^{-1}, εφόσον $z \neq 0$, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$-z = -x + i(-y) = -x - iy \tag{5.12}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{5.13}$$

Παρατήρηση 5.2. Έστω $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε κάνοντας χρήση του νόμου Μ9 (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) && \text{(νόμος M9)} \\
&= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 && \text{(νόμος M9)} \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 && \text{(νόμος M5)} \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 && (i^2 = -1) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) && \text{(νόμος M9)}
\end{aligned}$$

που είναι η (5.11). Ο πολλαπλασιασμός δηλαδή, μιγαδικών αριθμών μπορεί να εκτελεσθεί με χρήση της οικείας, από τους πραγματικούς αριθμούς, επιμεριστικής ιδιότητας.

Παρατήρηση 5.3. Εάν $z_1 = x_1+iy_1$ και $z_2 = x_2+iy_2$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπως στους πραγματικούς αριθμούς, η αφαίρεση και το πηλίκο ορίζονται, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) + (-x_2 + i(-y_2)) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{5.14}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{-y_2}{x_2^2+y_2^2}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{-x_1y_2 + x_2y_1}{x_2^2+y_2^2}. \tag{5.15}$$

Παρατηρούμε ότι για $z_1 = 1 = 1 + i0$ και $z_2 = z = x + iy$ από την τελευταία σχέση έπεται

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = z^{-1}. \tag{5.16}$$

Επακόλουθο της τελευταίας αυτής σχέσης είναι η

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\frac{1}{z_2}. \tag{5.17}$$

• Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, τότε από τον ορισμό του $\mathbb{C}$ έχουμε ότι $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$. Ο x λέγεται *πραγματικό μέρος* (real part) του z και γράφουμε $x = \operatorname{Re} z$, και ο y λέγεται *φανταστικό μέρος* (imaginary part) του z και γράφουμε $y = \operatorname{Im} z$. Έτσι εάν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\operatorname{Re} z = z$ και $\operatorname{Im} z = 0$, ενώ εάν $z = iy$, με $y \in \mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re} z = 0$ και $\operatorname{Im} z = -iz$.

• Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι *ίσοι* και γράφουμε $z_1 = z_2$, εάν και μόνον εάν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$, ισοδύναμα $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ και $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

• Δείξαμε λοιπόν ότι το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ αποτελεί μία φυσιολογική επέκταση των πραγματικών αριθμών, όπου στο σύστημα αυτό η εξίσωση $z^2 + 1 = 0$ έχει λύση.

• Κλείνουμε αυτή τη παράγραφο με μία παρατήρηση. Δεν υπάρχει στο $\mathbb{C}$ μία διάταξη που να είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και να επεκτείνει τη γνωστή διάταξη του $\mathbb{R}$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι μία τέτοια υπάρχει και αν τη συμβολίσουμε με '$\leq$', τότε θα πρέπει να ισχύει $0 \leq 1$, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Επίσης ένα από τα δύο είναι αληθές: είτε $0 \leq i$, είτε $0 \geq i$. Εάν $0 \leq i$, τότε πολλαπλασιάζοντας με i παίρνουμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι άτοπο. Όμοια εάν $0 \geq i$ τότε πολλαπλασιάζοντας πάλι με i θα είχαμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι επίσης άτοπο.

5.2 Το μέτρο ο συζυγής και το όρισμα μιγαδικού αριθμού

Ορισμός 5.1. Έστω $z = x + iy$ ένας μιγαδικός αριθμός.

(1) *Το μέτρο* (modulus) του z, συμβολίζεται με $|z|$, ορίζεται να είναι ο πραγματικός αριθμός

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5.18}$$

(2) *Ο συζυγής* (conjugate) του z, συμβολίζεται με $\bar{z}$, ορίζεται να είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$\bar{z} = x - iy. \tag{5.19}$$

Παρατηρούμε ότι αν $z \in \mathbb{R}$, ισοδύναμα $y = 0$, τότε $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$, δηλαδή το μέτρο μιγαδικού αριθμού γενικεύει την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού. Για το λόγο αυτό το μέτρο το λέμε και απόλυτη τιμή. Επιπλέον αν $z \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{z} = z$.

Παράδειγμα 5.1. Να βρεθεί το μέτρο και ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού $-i(2 - i3)$.

Εάν $z = -i(2 - i3)$, τότε $z = -i2 + 3i^2 = -3 - i2$, οπότε

$$|z| = |-i(2 - i3)| = |-3 - i2| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$
$$\bar{z} = \overline{-i(2 - i3)} = \overline{-3 - i2} = -3 + i2.$$

Οι ιδιότητες του μέτρου και του συζυγούς μιγαδικού αριθμού συνοψίζονται στη

Πρόταση 5.1. *Ισχύουν οι ιδιότητες:*

(1) *$|z| \geq 0$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και $|z| = 0$ εάν και μόνον εάν $z = 0$.*

(2) *$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.*

(3) *$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 με $z_2 \neq 0$.*

(4) *$z = \bar{z}$ εάν και μόνον εάν $z \in \mathbb{R}$.*

(5) *$z = \bar{\bar{z}}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.*

(6) *$|z| = |\bar{z}|$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.*

(7) *$|z|^2 = z\bar{z}$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.*

(8) *$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.*

(9) *$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2.*

(10) *$\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$, για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 με $z_2 \neq 0$.*

Απόδειξη. Έστω $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$, και $z_2 = x_2 + iy_2$ να είναι μιγαδικοί αριθμοί.

(1) Επειδή $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, είναι προφανές ότι $|z| \geq 0$, ενώ $|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ και $y = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

(2) Από την σχέση (5.11) έπεται ότι $|z_1 z_2| = |(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_1 + x_2y_2)|$ έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_1 + x_2y_2)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &= |z_1||z_2|. \end{aligned}$$

(3) Από την (5.16) για $z \neq 0$ έχουμε

$$1 = z\frac{1}{z} \Longrightarrow 1 = \left|z\frac{1}{z}\right| = |z|\left|\frac{1}{z}\right| \Longrightarrow \frac{1}{|z|} = \left|\frac{1}{z}\right|$$

με χρήση της ιδιότητας 2, επομένως για $z_2 \neq 0$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1|\frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

(4) Έστω $z = x + iy$, τότε $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + iy = x - iy \Leftrightarrow 0 = i2y \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

(5) Έστω $z = x + iy$, τότε $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$.

(6) Έστω $z = x + iy$, τότε $|\bar{z}| = |x - iy| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

(7) Εάν $z = x + iy$, έχουμε $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$.

(8) Από την (5.10) έπεται ότι $\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(9) Έχουμε $\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_1 + x_2y_2) = \overline{z_1 z_2}$, μιας και από την (5.11) $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_1 + x_2y_2)$.

(10) Από την (5.16) για $z \neq 0$ έχουμε

$$1 = z\frac{1}{z} \Longrightarrow 1 = \bar{1} = \overline{\left(z\frac{1}{z}\right)} = \bar{z}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \Longrightarrow \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$$

με χρήση της ιδιότητας 9, επομένως για $z_2 \neq 0$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1\frac{1}{z_2}} = \bar{z}_1\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \bar{z}_1\frac{1}{\bar{z}_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 5.4. Εάν $z = x + iy$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός τότε $x = \operatorname{Re} z$ και $y = \operatorname{Im} z$. Επειδή $z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x$, και $z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = i2y$, συμπεραίνουμε

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \tag{5.20}$$

Επίσης $x \leq |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, όμοια $y \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \qquad \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z|. \tag{5.21}$$

Άσκηση 5.1. Να δειχθεί ότι ο αριθμός a είναι πραγματικός εάν και μόνον εάν $\operatorname{Re} a = a$.

Παρατήρηση 5.5. Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί θυμίζουμε τη γνωστή ιδιότητα της απόλυτης τιμής $|a + b| \leq |a| + |b|$. Το ίδιο ισχύει και για μιγαδικούς αριθμούς. Ας είναι z_1, και z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί. Τότε ισχύει η *τριγωνική ανισότητα*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{5.22}$$

Κάνοντας χρήση της Πρότασης 5.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) && (\text{ ιδιότητες 7 και 8 })\\
&= z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 &&\\
&= |z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} + |z_2|^2 && (\text{ ιδιότητες 7 και 5 })\\
&= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 && (\text{ σχέση (5.20) })\\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| + |z_2|^2 && (\text{ σχέση (5.21) })\\
&= |z_1|^2 + 2|z_1||\bar{z}_2| + |z_2|^2 && (\text{ ιδιότητα 2 })\\
&= (|z_1| + |z_2|)^2 && (\text{ ιδιότητα 6 })
\end{aligned}$$

απ΄ όπου έπεται η ζητούμενη τριγωνική ανισότητα.

Άσκηση 5.2. Εάν $z \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι

$$|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

Παρατήρηση 5.6. Από τις ιδιότητες που περιγράφονται στη Πρόταση 5.1 έπεται ότι για $z \neq 0$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \tag{5.23}$$

που είναι ακριβώς η σχέση (5.16). Επειδή $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, έπεται αμέσως ότι

$$\frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{i\bar{i}} = \frac{-i}{|i|^2} = -i. \tag{5.24}$$

γενικότερα εάν $z \in \mathbb{C}$ και $|z| = 1$, από την (5.23) έπεται ότι $1/z = \bar{z}$.

Αν $z = x + iy \neq 0$, τότε $|z| > 0$, οπότε τα κλάσματα

$$\frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{και} \qquad \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ορίζονται και ικανοποιούν τη σχέση

$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

κατά συνέπεια υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Ορισμός 5.2. Έστω $z \neq 0$, και έστω $\theta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \qquad \text{και} \qquad \sin\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Ορίζουμε ως *όρισμα* (argument) του z και γράφουμε $\arg z$ το σύνολο όλων των τιμών $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, δηλαδή

$$\arg z = \{\theta + 2k\pi \ : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Παρατήρηση 5.7. Είναι προφανές ότι κάθε διάστημα $(a, a + 2\pi]$, με $a \in \mathbb{R}$ περιέχει ένα μοναδικό όρισμα του z. Εάν θ_a είναι αυτό το όρισμα, $a < \theta_a \leq a + 2\pi$, γράφουμε $\theta_a = \arg_a z$. Έτσι

$$\{\arg_a z\} = \arg z \cap (a, a + 2\pi].$$

Ορισμός 5.3. Ορίζουμε ως *κύριο* ή *πρωτεύον* (principal) όρισμα του z εκείνο το θ για το οποίο ισχύει $\theta \in (-\pi, \pi]$. Συμβολίζουμε με $\operatorname{Arg} z$ το κύριο όρισμα του z, οπότε για κάθε $z \neq 0$ στο $\mathbb{C}$ είναι $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.

Παράδειγμα 5.2. Να βρεθεί το όρισμα και το κύριο όρισμα για κάθε έναν από τους αριθμούς (i) $z = 1$, (ii) $z = -2$, (iii) $z = i$, (iv) $z = -1 - i$. Επίσης, εάν $a \neq 0$ να βρεθεί το όρισμα θ_a του $z = -1 - i$ ώστε $\theta_a \in (a, a + 2\pi]$, δηλαδή το $\arg_a(-1 - i)$.

(i) Επειδή $z = x = |z| = 1$, είναι $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, άρα $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, επομένως

$$\arg 1 = \{2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg} 1 = 0.$$

(ii) Εδώ είναι $x = -2$, $y = 0$ και $|z| = 2$, άρα $\cos\theta = -1$, $\sin\theta = 0$, άρα $\theta = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, επομένως

$$\arg(-2) = \{(2k + 1)\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} = \{-\pi + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg}(-2) = \pi.$$

(iii) Εδώ είναι $x = 0$, $y = 1$ και $|z| = 1$, άρα $\cos\theta = 0$, $\sin\theta = 1$, άρα $\theta = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, επομένως

$$\arg i = \{\pi/2 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \qquad \text{και} \qquad \operatorname{Arg} i = \pi/2.$$

(iv) Εδώ είναι $x = y = -1$ και $|z| = \sqrt{2}$, άρα $\cos\theta = \sin\theta = -1/\sqrt{2}$, άρα ένα όρισμα είναι $\theta = 5\pi/4$, και ένα άλλο το $\theta = -3\pi/4$, επομένως

$$\arg(-1 - i) = \{5\pi/4 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} = \{-3\pi/4 + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\text{και} \qquad \operatorname{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4.$$

Σημειώνουμε ότι $5\pi/4 \notin (-\pi, \pi]$.

Επειδή $\operatorname{Arg}(-1 - i) = -3\pi/4$ ψάχνουμε $k_a \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$a < 2k_a\pi - \frac{3\pi}{4} \leq a + 2\pi.$$

Ισοδύναμα, θέλουμε

$$a + \frac{3\pi}{4} < 2k_a\pi \leq a + \frac{3\pi}{4} + 2\pi \Leftrightarrow \frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8} < k_a \leq \frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8} + 1.$$

Το διάστημα

$$\left(\frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8}, \ \frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8} + 1\right]$$

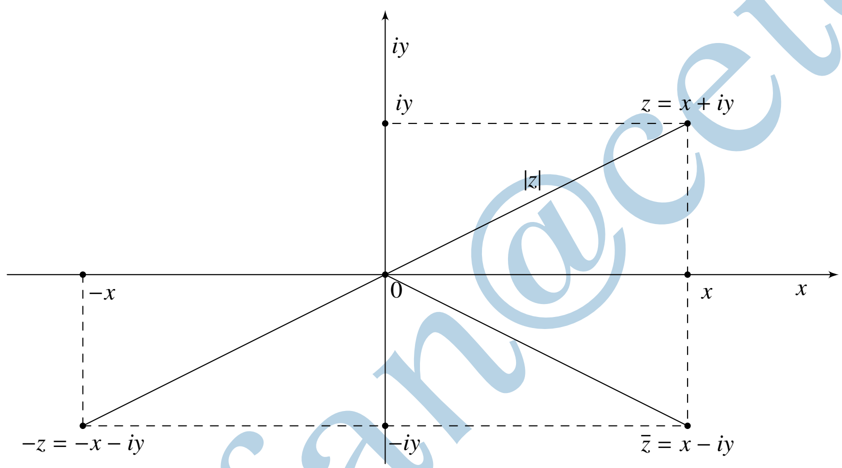
περιέχει μόνο το ένα από τα άκρα του και έχει μήκος 1, κατά συνέπεια περιέχει ακριβώς έναν ακέραιο, τον

$$k_a = \left[\frac{a}{2\pi} + \frac{3}{8}\right] + 1,$$

όπου με [ ] συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος.

5.3 Το μιγαδικό επίπεδο

Οι πραγματικοί αριθμοί αντιστοιχούν σε σημεία μιάς προσανατολισμένης ευθείας. Από τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών έπεται ότι υπάρχει μία ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$ και του σημείου (x, y) του επιπέδου. Έτσι το επίπεδο του οποίου κάθε σημείο (x, y) ταυτίζουμε με τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ονομάζουμε *μιγαδικό επίπεδο* (complex plane). Ο άξονας των x λέγεται *πραγματικός άξονας* (real axis), ενώ αυτός των y λέγεται *φανταστικός άξονας* (imaginary axis). Το μέτρο $|z|$ είναι η απόσταση του σημείου z από το 0, ενώ ο συζυγής $\bar{z}$ του z είναι το συμμετρικό σημείο του z ως προς τον πραγματικό άξονα.



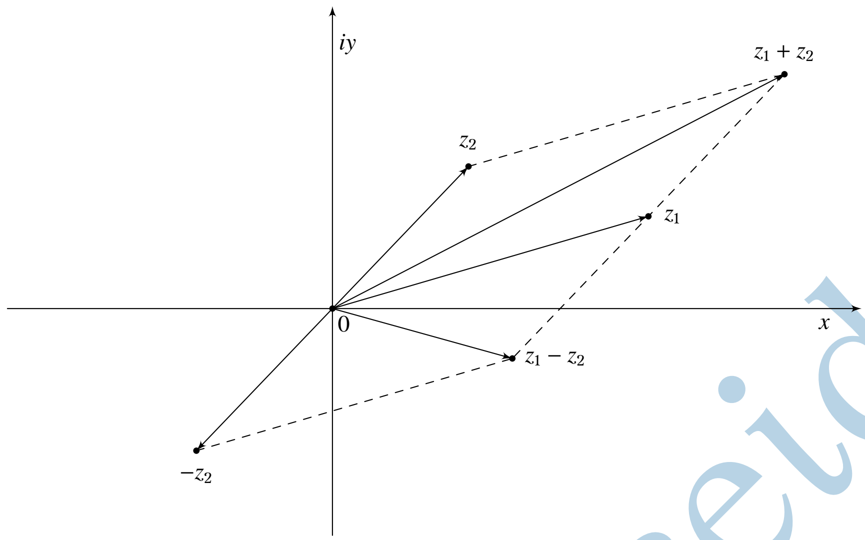
Σχήμα 5.1: Γραφική απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών z, $\bar{z}$ και $-z$.

Το άθροισμα των $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ αντιστοιχεί στο σημείο $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Έτσι λοιπόν ο αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να ταυτιστεί με το διάνυσμα με αρχή το σημείο $(0, 0)$ και πέρας το (x, y) ενώ το μέτρο $|z|$ είναι το μέτρο του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθυγράμου τμήματος από το $(0, 0)$ στο (x, y). Ο $z_1 + z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και z_2, και ο $z_1 - z_2$ είναι το διανυσματικό άθροισμα των διανυσμάτων z_1 και $-z_2$.

Οι αριθμοί z_1 και z_2 ορίζουν ένα παραλληλόγραμο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), και $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Τα $|z_1 + z_2|$ και $|z_1 - z_2|$ είναι τα μέτρα των διαγωνίων του παραλληλογράμου. Από την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας (5.22) προκύπτει *ο νόμος του παραλληλογράμου*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \tag{5.25}$$

ο οποίος μας λέει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων παραλληλογράμου ισούται με το άθροίσμα των τετραγώνων των πλευρών του.



Σχήμα 5.2: Το άθροισμα και η διαφορά μιγαδικών αριθμών.

5.3.1 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν r και θ είναι οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $(x, y) \neq (0, 0)$ τότε ο μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$. Παρατηρούμε ότι

$$|z| = \sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2} = r$$

ενώ το $\theta \in \arg z$, είναι καταληπτό ως τη γωνία (σε ακτίνια) μεταξύ της πραγματικής θετικής ημιευθείας και του ευθυγράμμου τμήματος από το 0 στο z. Η έκφραση

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{5.26}$$

λέγεται *τριγωνομετρική μορφή* (trigonometric form) ή *πολική μορφή* (polar form) του μιγαδικού αριθμού z.

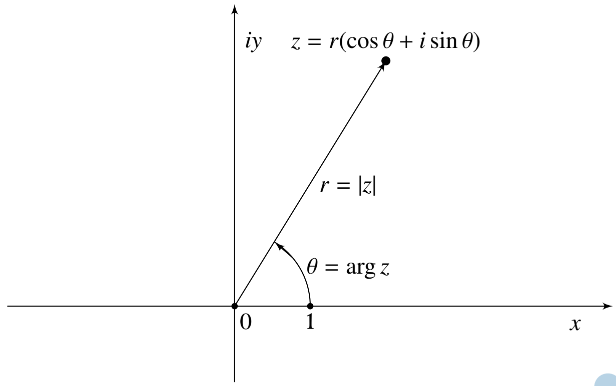
Παράδειγμα 5.3. Να γραφούν σε πολική μορφή οι αριθμοί (i) $z = 1 + i$, (ii) $z = 1$, (iii) $z = -2$.

(i) Επειδή $|1 + i| = \sqrt{2}$, έχουμε

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\Big)$$

(ii) $1 = 1 + i0 = \cos 0 + i\sin 0$.

(iii) $-2 = 2(-1 + i0) = (\cos\pi + i\sin\pi)$.



Σχήμα 5.3: Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού.

Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)], \end{aligned}$$

οπότε η πολική μορφή του γινομένου $z_1 z_2$ δίνεται από τη σχέση

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]. \tag{5.27}$$

Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι μη μηδενικός αριθμός, ισοδύναμα $r \neq 0$, τότε από τη σχέση (5.27) έπεται ότι

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]. \tag{5.28}$$

Σημειώνουμε ότι η σχέση αυτή προκύπτει επίσης από την (5.23). Εάν τώρα $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ είναι διάφορος του μηδενός, τότε συνδυάζοντας τις (5.27) και (5.28) έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{5.29}$$

Παράδειγμα 5.4. Εάν $z_1 = 2\sqrt{3} - i2$ και $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$ να γραφούν οι z_1 και z_2 σε πολική μορφή και να υπολογισθούν οι $z_1 z_2$ και z_1/z_2.

Επειδή $|z_1| = |2\sqrt{3} - i2| = \sqrt{16} = 4$ και $|z_2| = |-1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2$ θα έχουμε αντίστοιχα

$$\begin{aligned} z_1 &= 4\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right], \\ z_2 &= 2\left[\left(-\frac{1}{2}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2\left[\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right]. \end{aligned}$$

Από την σχέση (5.27) υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 4 \cdot 2\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\Big) + i\Big(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\Big)\Big] \\ &= 8\Big[\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big] \\ &= i8, \end{aligned}$$

ενώ από την (5.29) το πηλίκο

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4}{2}\Big[\cos\Big(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\Big)\Big] \\ &= 2\Big[\cos\Big(-\frac{5\pi}{6}\Big) + i\sin\Big(-\frac{5\pi}{6}\Big)\Big] \\ &= 2\Big[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big] \\ &= -\sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Εάν $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ με μαθηματική επαγωγή μέσω της (5.27) έχουμε

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)], \tag{5.30}$$

και ειδικά για $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$ προκύπτει

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)], \tag{5.31}$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Εάν $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r \neq 0$, από τις σχέσεις (5.28) και (5.31) έπεται ότι για $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \Big(\frac{1}{z}\Big)^n = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)],$$

και επειδή $z^0 = 1$, τελικά η σχέση (5.31) ισχύει για κάθε ακέραιο $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Εάν $z = \cos\theta + i\sin\theta$ η (5.31) μετασχηματίζεται στην

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{5.32}$$

Η τελευταία σχέση είναι γνωστή ως *τύπος του de Moivre*.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή του τύπου του de Moivre είναι η εύρεση ριζών μιγαδικών αριθμών. Θέτουμε λοιπόν το εξής

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εάν w είναι ένας μιγαδικός αριθμός και $n \geq 2$ είναι ένας φυσικός αριθμός να βρεθούν μιγαδικοί z τέτοιοι ώστε $z^n = w$. Έστω ότι $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, τότε παρατηρούμε ότι ο αριθμός $z_0 = r^{1/n}(\cos(\theta/n) + i\sin(\theta/n))$ ικανοποιεί την

$$z_0^n = \Big[\sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\Big)\Big]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta) = w, \tag{5.33}$$

δηλαδή ο z_0 είναι μία λύση του προβλήματος. Όμως και οι $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n]+i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$, $k = 1, 2, \ldots$ είναι λύσεις μιας και

$$z_k^n = \left[\sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big)\right]^n = r(\cos(\theta+2k\pi) + i\sin(\theta+2k\pi)) = w. \tag{5.34}$$

Από τις (5.33) και (5.34) βλέπουμε ότι οι αριθμοί $z_k = r^{1/n}(\cos[(\theta+2k\pi)/n] + i\sin[(\theta+2k\pi)/n])$ ικανοποιούν $z_k^n = w$ για $k = 0, 1, 2, \ldots$. Στη συνέχεια θυμίζουμε ότι για n σταθερό κάθε $k \in \mathbb{N}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $k = m + ln$ όπου $m = 0, 1, \ldots, n-1$ και $l \in \mathbb{N}$ (διαίρεση του k δια n). Έτσι εάν $k \geq n$, τότε

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big) \\ &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2m\pi+2ln\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2m\pi+2ln\pi}{n}\Big) \\ &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\Big(\frac{\theta+2m\pi}{n} + 2l\pi\Big) + i\sin\Big(\frac{\theta+2m\pi}{n} + 2l\pi\Big)\Big) \\ &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2m\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2m\pi}{n}\Big) \\ &= z_m \end{aligned}$$

όπου $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. **Συμπέρασμα**: Οι n το πλήθος μιγαδικοί αριθμοί

$$z_k = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5.35}$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και λέγονται *ν*οστες ρίζες του $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Παράδειγμα 5.5. Επειδή $1 = \cos 0 + i\sin 0$, οι *n-οστες ρίζες της μονάδας* είναι οι αριθμοί

$$\zeta_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.36}$$

Εάν ορίσουμε

$$\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}, \tag{5.37}$$

τότε από τον τύπο του de Moivre έπεται ότι οι *ν*οστες ρίζες της μονάδας είναι οι $1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}$. Παρατηρούμε ότι $\omega_n^n = 1$. Οι *ν*οστες ρίζες της μονάδας είναι οι κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου με n πλευρές εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο.

Παράδειγμα 5.6. Να βρεθούν αριθμοί z τέτοιοι ώστε $z^2 = -2$ (τετραγωνικές ρίζες του -2).

Είναι $-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, οπότε οι αριθμοί που ζητούμε δίνονται από τη σχέση

$$z_k = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{2}\Big), \qquad k = 0, 1.$$

Έτσι έχουμε

$$z_0 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) = i\sqrt{2}, \qquad z_1 = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\Big) = -i\sqrt{2}.$$

Πράγματι $z_0^2 = (i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$ και $z_1^2 = (-i\sqrt{2})^2 = i^2 2 = -2$.

5.4 Γεωμετρικοί τόποι στο μιγαδικό επίπεδο

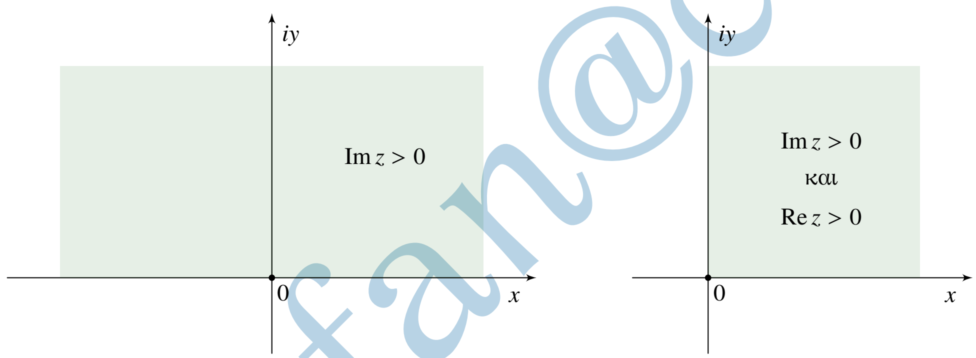
Η ευθεία των πραγματικών αριθμών, ως υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, μπορεί να εκφρασθεί ως το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με μηδενικό φανταστικό μέρος, δηλαδή

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Επίσης κάθε πραγματικός αριθμός είναι ίσος με τον συζυγή του, κατά συνέπεια

$$\mathbb{R} = \{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \bar{z} = z\}.$$

Γενικότερα, υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου μπορούν να εκφρασθούν με κατάλληλες αλγεβρικές σχέσεις. Άλλα παραδείγματα είναι το σύνολο $\{z : z \in \mathbb{C} \text{ και } \operatorname{Im} z > 0\}$ που παριστάνει το άνω ημιεπίπεδο, και το $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \text{ και } \operatorname{Im} z > 0\}$ που παριστάνει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου.



Σχήμα 5.4: Το άνω ημιεπίπεδο και το πρώτο τεταρτημόριο.

Ας θεωρήσουμε τώρα τους μιγαδικούς αριθμούς z με την ιδιότητα $|z| = 1$. Έτσι εάν $z = x + iy$ οι αριθμοί αυτοί ικανοποιούν τη σχέση $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ ή $x^2 + y^2 = 1$ που είναι η εξίσωση του κύκλου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας 1. Επομένως το υποσύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ είναι το εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, ενώ το $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ είναι το εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.[1] Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ λέγεται *ανοικτός δίσκος* κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας r, ενώ το $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ λέγεται *κλειστός δίσκος* κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας r. Εάν w είναι ένας σταθερός μιγαδικός αριθμός τότε οι αριθμοί z που ικανοποιούν τη σχέση $|z - w| = r$, όπου r είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, είναι όλοι εκείνοι των οποίων η απόσταση από τον w ισούται με r, άρα το

$$C(w, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - w| = r\}$$

[1] Κάθε κύκλος, με θετική ακτίνα, χωρίζει το επίπεδο σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα. Το ένα είναι φραγμένο και το άλλο μη φραγμένο. Το φραγμένο υποσύνολο το λέμε εσωτερικό του κύκλου, και το μή φραγμένο υποσύνολο το λέμε εξωτερικό του κύκλου.

περιγράφει τον κύκλο κέντρου w και ακτίνας r. Έτσι τα $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| \le r\}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z-w| > r\}$, και $\{z \in \mathbb{C} : |z| \ge r\}$ περιγράφουν αντίστοιχα τον ανοικτό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, τον κλειστό δίσκο κέντρου w και ακτίνας r, το εξωτερικό του κλειστού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r, και το εξωτερικό του ανοικτού δίσκου κέντρου w και ακτίνας r.

Παράδειγμα 5.7. Να περιγραφεί το σύνολο

$$F = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}.$$

Εάν $z = x + iy \in F$, τότε $x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z = y$, κατά συνέπεια το F είναι η ευθεία $y = x$ του επιπέδου.

Παράδειγμα 5.8. Εάν z_0 και $z_1 \neq 0$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να περιγραφεί το σύνολο

$$L = \{z : z = z_0 + tz_1, \text{ όπου } t \in \mathbb{R}\}.$$

Έστω ότι $z_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ με $-\pi < \theta \le \pi$, τότε,

$$\begin{aligned} tz_1 &= tr(\cos\theta + i\sin\theta), && \text{εάν } t \ge 0,\\ tz_1 &= -tr(-\cos\theta - i\sin\theta = -tr(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)), && \text{εάν } t < 0, \end{aligned}$$

(γιατί;) επομένως το σύνολο $L' = \{z : z = tz_1, \text{ όπου } t \in \mathbb{R}\}$ είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία 0 και z_1 (του μιγαδικού επιπέδου). Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ τα σημεία 0, tz_1 $z_0 + tz_1$ και z_0 σχηματίζουν παραλληλόγραμο στο οποίο οι πλευρές δια των σημείων $z_0, z_0 + tz_1$ και των $0, tz_1$ είναι παράλληλες. Άρα το σύνολο L είναι ευθεία που περνά από το z_0 και είναι παράλληλη στην L', ή ισοδύναμα L είναι η ευθεία που περνά από τα σημεία z_0 και $z_0 + z_1$, ή ισοδύναμα η ευθεία που περιέχει το z_0 και είναι παράλληλη στο διάνυσμα z_1.

Παράδειγμα 5.9. Εάν z_0 και $z_1 \neq 0$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να δειχθεί ότι το σύνολο

$$E = \left\{z : \operatorname{Im} \frac{z - z_0}{z_1} = 0\right\}$$

περιγράφει την ευθεία που περνά από το z_0 και είναι παράλληλη στο z_1.

Εάν $z \in E$ τότε $\operatorname{Im}[(z-z_0)/z_1] = 0$, επομένως $(z-z_0)/z_1 = \lambda$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$, οπότε $z - z_0 = \lambda z_1$ ή $z = z_0 + \lambda z_1$, δηλαδή $z \in L$ (Παράδειγμα 5.8). Έτσι $E \subset L$. Επειδή ισχύει και το αντίστροφο έχουμε τελικά ότι $E = L$.

5.5 Ασκήσεις

1. Να γραφούν οι παρακάτω μιγαδικοί αριθμοί στη μορφή $a + ib$:

(α΄) $(-3+i)(1-i2)$

(β΄) $\dfrac{1}{9+i2}$.

(γ΄) $(\sqrt{7}+i\sqrt{3})(\sqrt{7}-i\sqrt{3})$.

(δ΄) $\dfrac{7-i}{3+i5}$.

2. Εάν $z \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

   (α΄) $(1+z)^2 = 1+2z+z^2$.

   (β΄) $(1+z)^n = 1+\binom{n}{1}z+\binom{n}{2}z^2+\cdots+\binom{n}{k}z^k+\cdots+\binom{n}{n-1}z^{n-1}+z^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Να υπολογισθούν οι δυνάμεις i^n, για κάθε ακέραιο αριθμό n.

4. Εάν $z \in \mathbb{C}$ και $w \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι:

   (α΄) $z^2+1 = (z+i)(z-i)$

   (β΄) $z^2+w^2 = (z+iw)(z-iw)$.

5. Να δειχθεί ότι οι αριθμοί $1 \pm i$ ικανοποιούν την εξίσωση $z^2-2z+2=0$.

6. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί να βρεθούν οι τιμές τους σε κάθε μία από τις εφράσεις:

   (α΄) $5x+i6 = -8+i2y$.

   (β΄) $i(2x-4y) = 4x+2+i3y$.

   (γ΄) $(3x+i)^2 = 8+iy$.

   (δ΄) $x+iy = (x-iy)^2$.

7. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $z^2+z+1=0$. **Υπόδειξη**: Θέτουμε $z=x+iy$ στην εξίσωση και αφού κάνουμε πράξεις κοιτάζουμε ξεχωριστά το πραγματικό και φανταστικό μέρος.

8. Εάν $z \in \mathbb{C}$ να δειχθεί ότι: (i) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$ και (ii) $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

9. Εάν z, w, v και u είναι μιγαδικοί αριθμοί να αποδειχθούν οι ισότητες:

   (α΄) $\dfrac{1}{zw} = \dfrac{1}{z}\dfrac{1}{w}$.

   (β΄) $\dfrac{z+w}{v} = \dfrac{z}{v}+\dfrac{w}{v}$, $v \neq 0$.

   (γ΄) $\dfrac{zw}{vu} = \dfrac{z}{v}\dfrac{w}{u}$, $v \neq 0$ και $u \neq 0$.

   (δ΄) $\dfrac{zw}{zv} = \dfrac{w}{v}$, $z \neq 0$ και $v \neq 0$.

10. Να βρεθεί το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών:

    (α΄) $\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$.

    (β΄) $\left(\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^6$.

    (γ΄) $\left(\dfrac{2+i3}{3-i4}\right)^3$.

    (δ΄) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$.

11. Να βρεθούν τα x και y, όταν $x+iy = |x+iy|$.

12. Εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί να δειχθεί ότι: (i) $|z| = |-z|$ και (ii) $\overline{z-w} = \bar{z}-\bar{w}$.

13. Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής να δειχθεί ότι εάν $z_1, z_2, \ldots, z_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k| \tag{5.38}$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

14. Να δειχθεί ότι εάν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$.

15. Να δειχθεί ότι εάν z και w είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε ισχύουν τα παρακάτω:

    (α΄) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

    (β΄) $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2$.

    (γ΄) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *Νόμος του παραλληλογράμου*.

16. Αποδείξτε τις ιδιότητες του ορίσματος:

    (α΄) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.

    (β΄) $\arg \dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

17. Δείξτε ότι εάν $\operatorname{Re} z_1 > 0$ και $\operatorname{Re} z_2 > 0$, τότε
$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$
Δώστε αντιπαράδειγμα όπου $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

18. Η συνάρτηση $\tan\theta$ είναι ένα προς ένα στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, κατά συνέπεια η αντίστροφη συνάρτηση arctan ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με τη σχέση $\arctan t = \theta$ αν και μόνον αν $\tan\theta = t$ και $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Εάν $z = x + iy$ δείξτε ότι

    (α΄) $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x}$, εάν $x > 0$.

    (β΄) $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x} + \pi$, εάν $x < 0$ και $y \geq 0$.

    (γ΄) $\operatorname{Arg} z = \arctan \dfrac{y}{x} - \pi$, εάν $x < 0$ και $y < 0$.

    (δ΄) $\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y > 0$.

    (ε΄) $\operatorname{Arg} z = -\dfrac{\pi}{2}$, εάν $x = 0$ και $y < 0$.

19. Να βρεθούν οι ρίζες:

    (α΄) $(2i)^{1/2}$ (β΄) $(1)^{1/3}$ (γ΄) $(-i)^{1/2}$ (δ΄) $(-1)^{1/3}$.

20. Αφού αποδειχθεί το δυωνυμικό θεώρημα

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \text{με } a \text{ και } b \text{ στο } \mathbb{C}$$

(βλ. Άσκηση 2) κάνοντας χρήση αυτού και του τύπου του de Moivre να αποδειχθεί ότι

(α΄) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$, (β΄) $\sin 3\theta = -\sin^3\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta$.

21. Αφού αποδειχθεί ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 1$ ισχύει

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z},$$

για κάθε $n \geq 2$, με χρήση της ταυτότητας να αποδειχθούν οι

(α΄) $1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2\sin(\theta/2)}$ $(0 < \theta < 2\pi)$.

(β΄) $1 + \omega_n + \omega_n^2 + \cdots + \omega_n^{n-1} = 0$, όπου $\omega_n = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

22. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών που αντιστοιχεί σε κάθε μία από τις σχέσεις:

(α΄) $z + \bar{z} = 1$, (β΄) $z - \bar{z} = i$, (γ΄) $z + \bar{z} = |z|^2$, (δ΄) $\bar{z} = |z|$.

23. Να περιγραφούν γεωμετρικά οι σχέσεις:

(α΄) $1 < \operatorname{Re} z < 2$,

(β΄) $1 < |z| < 2$,

(γ΄) $|\operatorname{Im} z| \geq 1$,

(δ΄) $|z| = \operatorname{Im} z + 1$,

(ε΄) $\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3}$,

(ϛ΄) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq 1$.

24. Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τη σχέση $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}(az + b)$.

25. Να περιγραφεί το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που είναι τέτοιοι ώστε

(α΄) $|z - i| = |z + i|$, (β΄) $|z - i| < |z - 1|$, (γ΄) $|z - 4| \geq |z|$.

26. Πότε η εξίσωση $az + b\bar{z} + c = 0$ παριστάνει ευθεία;

27. Η έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία που λέγονται εστίες είναι σταθερό.

(α΄) Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 και άθροισμα αποστάσεων από τις εστίες ίσο με $2c$, όπου $c > 0$.

(β΄) Εάν $z_1 = -a$ και $z_2 = a$, όπου a είναι θετικός αριθμός, να δειχθεί ότι η εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες x και y γράφεται

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

28. Εάν $z_0 \neq z_1$ είναι μιγαδικοί αριθμοί να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right] = 0.$$

29. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων z που ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathrm{Im}\left[\frac{z - z_0}{z_1}\right] > 0.$$

Μέρος II

Ακολουθίες και Σειρές αριθμών

Κεφάλαιο 1

Ακολουθίες

1.1 Εισαγωγή

Ο πραγματικός αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος, κατά συνέπεια το δεκαδικό του ανάπτυγμα περιέχει άπειρους όρους και μάλιστα χωρίς περιοδική επανάληψη κάποιου τμήματος του αναπτύγματος. Μια αριθμομηχανή δίνει μια τυπική προσέγγιση $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$ Θεωρώντας τους διαδοχικούς ρητούς (γιατί;) αριθμούς

$$
\begin{array}{lll}
a_1 = 1.4, & a_2 = 1.41, & a_3 = 1.414, \\
a_4 = 1.4142, & a_5 = 1.41421, & a_6 = 1.414213, \\
a_7 = 1.4142135, & a_6 = 1.41421356, & a_9 = 1.414213562, \\
a_{10} = 1.4142135623, & \cdots &
\end{array}
$$

παρατηρούμε ότι η συλογή αυτή, με τον τρόπο που είναι γραμμένη, παριστάνει προσεγγίσεις του $\sqrt{2}$ έτσι ώστε ο n στην τάξη όρος, a_n, της συλλογής είναι η προσέγγιση που περιέχει τα n πρώτα δεκαδικά ψηφία του δεκαδικού αναπτύγματος. Παρατηρούμε επιπλέον ότι καθώς το n μεγαλώνει ο όρος a_n παρέχει μια καλύτερη προσέγγιση του $\sqrt{2}$, έτσι καθώς ο n τείνει στο άπειρο, ο a_n τείνει να γίνει ο $\sqrt{2}$. Η παραπάνω συλλογή αριθμών είναι παράδειγμα μιας ακολουθίας, όπως λέμε, αριθμών, και κάθε μέλος ή αριθμός της συλλογής λέγεται όρος της ακολουθίας, συγκεκριμένα ο a_n λέγεται n-οστός όρος της ακολουθίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση λέμε, επίσης, ότι η ακολουθία των a_n τείνει, ή συγκλίνει στον $\sqrt{2}$, ή ισοδύναμα ότι ο $\sqrt{2}$ είναι το όριο της ακολουθίας $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$

Σημειώνουμε ότι κάθε όρος της ακολουθίας μπορεί να ιδωθεί ως η τιμή μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και τιμές στους πραγματικούς αριθμούς, ας πούμε $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, όπου

$$a_n = a(n) = \text{“τα πρώτα } n \text{ διαδοχικά δεκαδικά ψηφία του } \sqrt{2}\text{”}.$$

1.2 Ορισμοί

Ορισμός 1.1. Εάν S είναι ένα μη κενό σύνολο τότε κάθε συνάρτηση ορισμένη στο σύνολο των φυσικών αριθμών $a : \mathbb{N} \to S$ λέγεται **ακολουθία** (sequence) του S. Αντί για $a(n)$ γράφουμε a_n. Το a_1 λέγεται πρώτος όρος της ακολουθίας, το a_2 δεύτερος όρος, ..., το a_n n-οστός όρος της ακολουθίας. Μία ακολουθία γράφεται ως $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, ή με παράθεση των όρων της $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε επίσης και (a_n). Εάν οι a_n είναι πραγματικοί αριθμοί, δηλαδή $S \subset \mathbb{R}$, η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 1.1. Η ακολουθία των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ $n \in \mathbb{N}$. Εδώ $a_n = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.2. Η ακολουθία με όρους

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.3. Οι όροι της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ είναι οι

$$-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Παράδειγμα 1.4. Εάν c είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία

$$c, c, c, \dots, c, \dots$$

Εδώ είναι $a_n = c$, $n \in \mathbb{N}$. Η παραπάνω ακολουθία λέγεται **σταθερή** ακολουθία.

Σημείωση 1.1. Διακρίνουμε τους άπειρους **όρους της ακολουθίας** $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ από το **σύνολο τιμών της ακολουθίας** $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ που μπορεί να είναι πεπερασμένο. Για παράδειγμα για την ακολουθία $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ έχουμε ότι οι όροι της ακολουθίας είναι οι $-1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$ ενώ το σύνολο τιμών είναι το $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$.

Ορισμός 1.2. Εάν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθίες πραγματικών αριθμών, τότε:

(1) Θα λέμε ότι οι ακολουθίες είναι **ίσες** εάν $a_n = b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $c_n = a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **άθροισμα** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

(3) Η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $c_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **διαφορά** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

(4) Η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου $c_n = a_n b_n$, $n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **γινόμενο** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

(5) Εάν $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, με $c_n = a_n/b_n$, $n \in \mathbb{N}$ θα λέγεται **πηλίκο** των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$.

• Εάν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία και f είναι μία συνάρτηση τέτοια ώστε η $f(a_n)$ να ορίζεται για κάθε φυσικό αριθμό n, τότε μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ με τη σχέση $c_n = f(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Για παράδειγμα

1. $(\sqrt{a_n})_{n=1}^{\infty}$, με όρους $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \sqrt{a_3}, \ldots, \sqrt{a_n}, \ldots$, εάν $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
2. $\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$, με όρους $\dfrac{1}{a_1+1}, \dfrac{1}{a_2+1}, \dfrac{1}{a_3+1}, \ldots, \dfrac{1}{a_n+1}, \ldots$, εάν $a_n \neq -1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

1.3 Φράγμα ακολουθίας

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $a_1 = 1 \leq 1$, $a_2 = 1/2 < 1$, και γενικότερα $a_n = 1/n < 1$, $\forall n > 1$. Επίσης ισχύει $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τελικά έχουμε $0 < a_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 1.3. Μία ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ λέγεται:

(1) **Άνω φραγμένη** (bounded above) εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός M λέγεται **άνω φράγμα** (upper bound) της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(2) **Κάτω φραγμένη** (bounded below) εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός m τέτοιος ώστε $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός m λέγεται **κάτω φράγμα** (lower bound) της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

(3) **Φραγμένη** (bounded) εάν είναι άνω και κάτω φραγμένη.

Παρατηρούμε ότι το άνω φράγμα ακολουθίας, εάν αυτό υπάρχει, δεν είναι μοναδικό, γιατί εάν M είναι άνω φράγμα της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, τότε για κάθε $\delta > 0$ το $M + \delta$ είναι επίσης άνω φράγμα, αφού $a_n \leq M < M + \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Το ανάλογο ισχύει και για το κάτω φράγμα.

Πρόταση 1.1. *Μία ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη εάν και μόνον εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός L τέτοιος ώστε $|a_n| \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Υπάρχουν, τότε, πραγματικοί αριθμοί m και M τέτοιοι ώστε $m \leq a_n \leq M$. Εάν $L = \max\{|m|, |M|\}$, τότε έχουμε

$$a_n \leq M \leq |M| \leq L, \qquad \text{και} \qquad a_n \geq m \geq -|m| \geq -L,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Έτσι $-L \leq a_n \leq L$, ή ισοδύναμα $|a_n| \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξαμε λοιπόν ότι εάν μία ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός L έτσι ώστε $|a_n| \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ας υποθέσουμε ότι για την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ υπάρχει πραγματικός αριθμός L τέτοιος ώστε $|a_n| \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε θα είναι $-L \leq a_n \leq L$, $\forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία είναι άνω και κάτω φραγμένη, άρα φραγμένη. □

Παράδειγμα 1.5. Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Να εξετασθεί εάν η ακολουθία είναι φραγμένη.

Παρατηρούμε ότι

$$|a_n| = \left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

οπότε από την Πρόταση 1.1 έπεται ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.

Διαφορετικά, μέσω του ορισμού,

$$a_n = \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \leq 1 \qquad \text{και} \qquad a_n = \frac{\sin n}{n} \geq \frac{-1}{n} \geq -1,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Παράδειγμα 1.6. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = \frac{2^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι φραγμένη.

Υπολογίζουμε μερικούς όρους της ακολουθίας

$$a_1 = \frac{2}{1} = 2, \qquad a_2 = \frac{2^2}{2!} = 2, \qquad a_3 = \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3} < 2, \qquad a_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3} < 2.$$

Παρατηρούμε ότι για $n \geq 3$ ισχύει

$$a_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n} = 2\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}, \tag{1.1}$$

οπότε έπεται ότι $a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή επιπλέον η ακολουθία έχει θετικούς όρους συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.

Από τη σχέση (1.1) παίρνουμε την χρήσιμη ανισότητα

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-2}}, \quad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{1.2}$$

για την οποία παρατηρούμε ότι ισχύει και για $n = 1, 2$.

1.4 Μονοτονία ακολουθιών

Ορισμός 1.4. Η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ λέγεται:

(1) **Αύξουσα** (increasing) εάν $a_n \leq a_{n+1}$ και **γνησίως αύξουσα** (strictly increasing) εάν $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) **Φθίνουσα** (decreasing) εάν $a_n \geq a_{n+1}$ και **γνησίως φθίνουσα** (strictly decreasing) εάν $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Μία ακολουθία που είναι αύξουσα, ή φθίνουσα (γνησίως αύξουσα, ή γνησίως φθίνουσα) λέγεται **μονότονη** (**γνησίως μονότονη**) (monotone (strictly monotone)).

Παράδειγμα 1.7. Να εξετασθούν ως προς τη μονοτονία οι ακολουθίες με γενικό όρο

(α΄) $a_n = r^n, \quad r > 0$ (β΄) $a_n = \sqrt[n]{2}$ (γ΄) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ (δ΄) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

(α΄) Θεωρούμε τη διαφορά

$$a_n - a_{n+1} = r^n - r^{n+1} = r^n(1 - r)$$

κατά συνέπεια:

Εάν $r < 1$ τότε $a_n - a_{n+1} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$, οπότε η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Εάν $r = 1$ τότε $a_n - a_{n+1} = 0 \Rightarrow a_n = a_{n+1}$, οπότε η ακολουθία είναι σταθερή.

Εάν $r > 1$ τότε $a_n - a_{n+1} < 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$, οπότε η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

Δεύτερος τρόπος. Επειδή $a_n > 0$ θεωρούμε το πηλίκο

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{r^n}{r^{n+1}} = \frac{1}{r}$$

επομένως

Εάν $r < 1$ τότε $a_n/a_{n+1} > 1 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$, οπότε η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Εάν $r = 1$ τότε $a_n/a_{n+1} = 1 \Rightarrow a_n = a_{n+1}$, οπότε η ακολουθία είναι σταθερή.

Εάν $r > 1$ τότε $a_n/a_{n+1} < 1 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$, οπότε η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα.

(β΄) Και εδώ είναι $a_n > 0$ οπότε θεωρώντας το πηλίκο

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^{1/n}}{2^{1/(n+1)}} = 2^{1/n-1/(n+1)} = 2^{1/[n(n+1)]} > 1$$

βλέπουμε ότι $a_n > a_{n+1}$, δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

(γ΄) Πάλι θεωρούμε το πηλίκο a_n/a_{n+1}, καθόσον $a_n > 0$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2^n/n!}{2^{n+1}/(n+1)!} = \frac{2^n}{2^{n+1}}\frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n+1}{2} \geq 1,$$

επομένως $a_n \geq a_{n+1}$, δηλαδή η ακολουθία είναι φθίνουσα.

(δ΄) Είναι $a_n > 0$ οπότε

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!/n^n}{(n+1)!/(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1,$$

επομένως $a_n < a_{n+1}$, δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Παράδειγμα 1.8. Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη.

Με χρήση του διωνυμικού θεωρήματος υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right), \end{aligned}$$

όμοια

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + \binom{n+1}{n+1}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Από τα αναπτύγματα των a_n και a_{n+1}, παρατηρούμε ότι

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leq \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ (στη πραγματικότητα η ανισότητα είναι αυστηρή για $2 \leq k \leq n$), ενώ ο τελευταίος όρος στο ανάπτυγμα του a_{n+1} είναι θετικός, άρα $a_n < a_{n+1}$. Έτσι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή δε $a_1 = 2$ έπεται ότι $a_n \geq 2$, δηλαδή η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. Αναζητώντας ένα άνω φράγμα της ακολουθίας και επειδή

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \leq 1,$$

από το ανάπτυγμα του a_n έπεται ότι

$$\begin{aligned}
a_n &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
&\leq 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{1}{3^{n-2}} && \left(\text{από την } (1.2)\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{n-2}}\right) \\
&= 2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - 1/3^{n-1}}{1 - 1/3}\right) && \left(\text{Άσκηση } 3.5\right) \\
&= 2 + \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) \\
&< 2.75.
\end{aligned}$$

Έτσι τελικά έχουμε ότι $2 \leq a_n < 2.75$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Παρατήρηση 1.1. Η μονοτονία της σημαντικής ακολουθίας του Παραδείγματος 1.8 προκύπτει εύκολα με χρήση της ανισότητας του Bernoulli $(1 + a)^n \geq 1 + na$ για $a \geq -1$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Συγκεκριμένα

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

κατά συνέπεια

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1-n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

έτσι για $n > 1$ έχουμε

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Συνεπώς $a_n \leq a_{n+1}$ για $n = 2, 3, \ldots$, επιπλέον

$$a_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} > (1 + 1) = a_1,$$

επομένως $a_n \leq a_{n+1}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.9. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ που ορίζεται με τη σχέση

$$a_{n+1} = \gamma + a_n^2, \quad a_1 = \gamma, \qquad \text{όπου } 0 < \gamma \leq \frac{1}{4}$$

είναι γνησίως αύξουσα και φραγμένη.

Κάθε ακολουθία που ορίζεται με ανάλογο τρόπο, δηλαδή ο γενικός όρος εκφράζεται μέσω προηγούμενων όρων, λέγεται **αναδρομική** (recursive).

Πρώτα δείχνουμε ότι η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα. Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή, έτσι για $n = 1$ έχουμε

$$a_2 = \gamma + a_1^2 = a_1 + \gamma^2 > a_1,$$

επειδή $a_1 = \gamma$ και $\gamma > 0$. Επομένως ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 1$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι εάν $a_{n+1} > a_n$, για $n \geq 1$, τότε $a_{n+2} > a_{n+1}$. Από την υπόθεση της επαγωγής υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε $a_{n+1}^2 > a_n^2$, οπότε

$$\gamma + a_{n+1}^2 > \gamma + a_n^2 \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$$

που είναι ό,τι θέλαμε να αποδείξουμε. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $a_n < a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άμμεση απόρροια αυτού του αποτελέσματος και του ορισμού της ακολουθίας είναι το

$$a_{n+1} - a_n = \gamma + a_n^2 - a_n > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

Το τριώνυμο $x^2 - x + \gamma$ έχει διακρίνουσα $D = 1 - 4\gamma \geq 0$, από την επιλογή του γ, άρα η εξίσωση $x^2 - x + \gamma = 0$ έχει πραγματικές (και θετικές) ρίζες

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\gamma}}{2}, \qquad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\gamma}}{2}.$$

Από τη σχέση (1.3) βλέπουμε ότι οι όροι της ακολουθίας είναι εκτός των ριζών, δηλαδή $a_n < x_1$ ή $a_n > x_2$. Μπορεί να δειχθεί ότι $a_n < x_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (αφήνεται ως άσκηση). Αντ΄ αυτού αποδεικνύουμε, με μαθηματική επαγωγή, το ασθενέστερο αποτέλεσμα $a_n < 1/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ το αποτέλεσμα είναι αληθές μιάς και

$$a_1 = \gamma \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι εάν $a_n < 1/2$, για $n \geq 1$, τότε $a_{n+1} < 1/2$. Πράγματι

$$a_{n+1} = \gamma + a_n^2 < \gamma + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$$

από την υπόθεση και την επιλογή του γ, άρα $a_n < 1/2$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $a_n < 1/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από τον ορισμό της ακολουθίας έπεται άμμεσα η ύπαρξη κάτω φράγματος γιατί $\gamma \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε συνδυάζοντας τα δύο αποτελέσματα τελικά θα έχουμε $\gamma \leq a_n < 1/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.5 Όριο ακολουθίας

Παράδειγμα 1.10. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με $a_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Ισχυριζόμαστε ότι εάν ϵ είναι ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < a_n < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$.

Για την ακολουθία αυτή γνωρίζουμε ότι $0 < \cdots < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_2 < a_1$. Δείχνουμε ότι για $\epsilon > 0$ δοσμένο, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 < a_N < \epsilon$, ισοδύναμα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ με $1/N < \epsilon$ ή ισοδύναμα $1/\epsilon < N$. Πράγματι αν $[1/\epsilon]$ είναι το ακέραιο μέρος του $1/\epsilon$ επιλέγοντας $N = [1/\epsilon] + 1$ έχουμε $N > 1/\epsilon$, ή $a_N < \epsilon$. Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $0 < a_N < \epsilon$. Στη πραγματικότητα δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N έτσι ώστε $0 < a_n < \epsilon$, για όλα τα $n \geq N$ (γιατί;). Βλέπουμε λοιπόν ότι όλοι τελικά, δηλαδή από ένα N και έπειτα, οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν αυθαίρετα κοντά στο 0.

Παράδειγμα 1.11. Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $a_n = \ell + (-1)^n/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, όπου $\ell \in \mathbb{R}$. Ισχυριζόμαστε ότι εάν ϵ είναι ένας αυθαίρετα μικρός θετικός αριθμός τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a_n - \ell| < \epsilon$, για κάθε $n \geq N$.

Παρατηρούμε ότι
$$a_n - \ell = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow |a_n - \ell| = \frac{1}{n},$$
κατά συνέπεια σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, για παράδειγμα $N \geq [1/\epsilon] + 1$, τέτοιο ώστε $1/n < \epsilon$ για όλα τα $n \geq N$, επομένως $|a_n - \ell| < \epsilon$, για κάθε $n \geq N$.

Ας αναλύσουμε το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 1.11. Δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - \ell| < \epsilon$, για όλα τα $n \geq N$, ή ισοδύναμα
$$\ell - \epsilon < a_n < \ell + \epsilon, \quad \forall n \geq N.$$
Δηλαδή όλοι οι όροι της ακολουθίας από τον a_N και μετά βρίσκονται σε ένα ανοικτό διάστημα κέντρου ℓ και αυθαίρετα μικρής ακτίνας ϵ, κατά συνέπεια όλοι τελικά οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται αυθαίρετα κοντά στο ℓ.

Ορισμός 1.5. Θα λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **συγκλίνει** στον πραγματικό αριθμό L εάν η απόσταση $|a_n - L|$ γίνεται τελικά αυθαίρετα μικρή, δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - L| < \epsilon$, για όλα τα $n \geq N$. Εάν αυτό ισχύει θα λέμε ότι ο L είναι το **όριο** (limit) της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ και θα γράφουμε
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$
Γράφουμε επίσης $a_n \to L$, καθώς $n \to \infty$.

Σύμφωνα με τον ορισμό βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

μιας και από το Παράδειγμα 1.10 έχουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - 0| = a_n < \epsilon$, για όλα τα $n \geq N$. Από δε το Παράδειγμα 1.11 έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ell + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \ell.$$

Παρατήρηση 1.2. Ας θεωρήσουμε την σταθερή ακολουθία $a_n = a$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|a_n - a| = 0 < \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a = a.$$

Πρόταση 1.2 (Μοναδικότητα του ορίου). *Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, τότε το όριό της είναι μοναδικό.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a'.$$

Δείχνουμε ότι $a = a'$. Έστω $\epsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό. Από την σύγκλιση της ακολουθίας έπεται ότι υπάρχουν φυσικοί αριθμοί N και N', ώστε

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{για } n \geq N \text{ και} \qquad |a_n - a'| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{για } n \geq N'.$$

Τότε για $N_0 = \max\{N, N'\}$, από την τριγωνική ανισότητα, έπεται ότι

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \epsilon, \qquad \text{για } n \geq N_0.$$

Επειδή το ϵ είναι αυθαίρετο έπεται ότι $a = a'$. □

Πρόταση 1.3. *Έστω ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει και έστω ότι*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,$$

τότε η ακολουθία είναι φραγμένη. Επιπλέον αν $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $M > 0$, τότε $|\alpha| \leq M$.

Απόδειξη. Για δοσμένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, ώστε $|a_n - \alpha| < \epsilon$, $\forall n \geq N$. Επειδή $|a_n| \leq |a_n - \alpha| + |\alpha|$, για κάθε n, έπεται ότι $|a_n| < \epsilon + |\alpha|$, για όλα τα $n \geq N_a$. Εάν ορίσουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n-1}|, \epsilon + |\alpha|\}$, τότε $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία είναι φραγμένη.

Ας υποθέσουμε ότι $\alpha > M$, τότε υπάρχει $\epsilon > 0$, ώστε $\alpha - \epsilon > M$. Γι' αυτό το ϵ θα υπήρχε $N \in \mathbb{N}$, ώστε $M < \alpha - \epsilon < a_n < \alpha + \epsilon$, για $n \geq N$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $\alpha > M$. Παρόμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\alpha < -M$, κατά συνέπεια $|\alpha| \leq M$. □

Πρόταση 1.4 (Ιδιότητες συγκλινουσών ακολουθιών). *Έστω ότι για τις ακολουθίες* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *και* $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ *γνωρίζουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \beta.$$

Να δειχθεί ότι ισχύουν οι ιδιότητες:

(1) $|a_n| \to |\alpha|$.

(2) $\lambda a_n \to \lambda\alpha$, *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda\alpha + \mu\beta$, *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(4) $a_n b_n \to \alpha\beta$.

(5) *Εάν* $b_n \neq 0$, *για* $n \geq N$ *και* $\beta \neq 0$, *τότε* $a_n/b_n \to \alpha/\beta$.

(6) *Εάν* $a_n \leq b_n$, *τότε* $\alpha \leq \beta$.

Απόδειξη. Έστω ότι μας δίνεται τυχαίο $\epsilon > 0$. Από την υπόθεση έχουμε ότι υπάρχουν $N_a \in \mathbb{N}$ και $N_b \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$|a_n - \alpha| < \epsilon, \quad \forall n \geq N_a \tag{1.4}$$

$$|b_n - \beta| < \epsilon, \quad \forall n \geq N_b. \tag{1.5}$$

(1) Επειδή $||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha|$, από την (1.4) έπεται ότι $||a_n| - |\alpha|| < \epsilon$, για $n \geq N_a$, άρα $|a_n| \to |\alpha|$.

(2) Είναι $|\lambda a_n - \lambda\alpha| = |\lambda||a_n - \alpha|$. Εάν $\lambda = 0$, τότε το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα. Έστω $\lambda \neq 0$. Τότε υπάρχει N_a' τέτοιο ώστε $|a_n - \alpha| < \epsilon/|\lambda|$, για $n \geq N_b'$, οπότε $|\lambda a_n - \lambda\alpha| < |\lambda|\epsilon/|\lambda| = \epsilon$, για όλα τα $n \geq N_a'$.

(3) Εάν $\lambda = 0$ ή $\mu = 0$, το αποτέλεσμα έπεται από το (2). Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $\lambda \neq 0$ και $\mu \neq 0$. Τότε υπάρχουν N_a' και N_b' τέτοια ώστε

$$|a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2|\lambda|}, \quad \forall n \geq N_a'$$

$$|b_n - \beta| < \frac{\epsilon}{2|\mu|}, \quad \forall n \geq N_b'.$$

Επιλέγοντας $N = \max\{N_a', N_b'\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |\lambda a_n + \mu b_n - \lambda\alpha - \mu\beta| &\leq |\lambda a_n - \lambda\alpha| + |\mu b_n - \mu\beta| \\ &= |\lambda||a_n - \alpha| + |\mu||b_n - \beta| \\ &\leq |\lambda|\frac{\epsilon}{2|\lambda|} + |\mu|\frac{\epsilon}{2|\mu|} \\ &= \epsilon, \end{aligned}$$

για όλα τα $n \geq N$, οπότε $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda\alpha + \mu\beta$.

(4) Από την Πρόταση 1.3 έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|a_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Έτσι

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \\ &\leq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\ &\leq M|b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|. \end{aligned}$$

Η απόδειξη έπεται από αυτή τη σχέση και αφήνεται ως άσκηση.

(5) Αρκεί να δείξουμε ότι $1/b_n \to 1/b$ γιατί τότε το αποτέλεσμα θα είναι συνέπεια της (4). Από την (1) έπεται ότι $|b_n| \to |\beta|$, οπότε εάν $\delta > 0$ είναι τέτοιο ώστε $|\beta| - \delta > 0$, τότε υπάρχει $N_1 \in \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει $|\beta| - \delta < |b_n| < |\beta| + \delta$, για κάθε $n \geq N_1$. Τότε για $n \geq N_1$ θα έχουμε

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| = \frac{|b_n - \beta|}{|\beta||b_n|} \leq \frac{|b_n - \beta|}{|\beta|(|\beta| - \delta)}. \tag{1.6}$$

Για $\epsilon > 0$ επιλέγοντας $N_2 \in \mathbb{N}$, ώστε $|b_n - \beta| < |\beta|(|\beta| - \delta)\epsilon$, για $n \geq N_2$, από την (1.6) έπεται ότι

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta}\right| < \frac{|\beta|(|\beta| - \delta)\epsilon}{|\beta|(|\beta| - \delta)} = \epsilon$$

οποτεδήποτε $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι $1/b_n \to 1/b$.

(6) Με την εις άτοπο απαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι $\alpha > \beta$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ (για παράδειγμα $\delta = (\alpha - \beta)/4$) ώστε $\beta < \beta + \delta < \alpha - \delta < \alpha$, κατά συνέπεια υπάρχει N ώστε για $n \geq N$ είναι

$$b_n < \beta + \delta < \alpha - \delta < a_n.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $a_n \leq b_n$, $\forall n$, επομένως $\alpha \leq \beta$.

□

Πρόταση 1.5 (Κριτήριο της παρεμβολής). *Εάν για τις ακολουθίες $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, ισχύει:*

(1) $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\forall n \geq N$, *και*

(2) $a_n \to \gamma$, *και* $c_n \to \gamma$,

τότε $b_n \to \gamma$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. □

Παράδειγμα 1.12. Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$a_n = \frac{2n + 3}{n^2 + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Διαιρώντας με το μεγιστοβάθμιο όρο n^2 αριθμητή και παρονομαστή ο γενικός όρος της ακολουθίας γράφεται

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+1} = \frac{\frac{2n}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Ο αριθμητής συγκλίνει στο 0, ενώ ο παρονομαστής συγκλίνει στο 1, άρα από την ιδιότητα του ορίου πηλίκου ακολουθιών έπεται ότι η ακολουθία a_n, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Παράδειγμα 1.13. Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία

$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} 0 < a_n &= \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n}, \qquad n > 1 \\ &= \frac{1}{n}\frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \\ &< \frac{1}{n} \end{aligned}$$

κατά συνέπεια από την κριτήριο της παρεμβολής έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Παράδειγμα 1.14. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{a}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $a > 0$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Θεωρούμε τις περιπτώσεις $a = 1$, $a > 1$, και $a < 1$.

(i) $a = 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{1} = 1$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

(ii) $a > 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \sqrt[n]{a} = 1 + r_n, \quad r_n > 0.$$

Υψώνοντας αρχικά στη n–οστη δύναμη και κάνοντας χρήση της ανισότητας του Bernoulli (Παράδειγμα 4.1) υπολογίζουμε

$$a = (1 + r_n)^n \geq 1 + nr_n > nr_n \Rightarrow 0 < r_n < \frac{a}{n}$$

απ΄ όπου έπεται ότι $r_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Έτσι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}(1 + r_n) = 1.$$

(iii) $a < 1$. Τότε $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{1} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \sqrt[n]{a} = \frac{1}{1 + s_n}, \quad s_n > 0.$$

Όπως στη προηγούμενη περίπτωση υπολογίζουμε

$$a = \frac{1}{(1 + s_n)^n} \leq \frac{1}{1 + ns_n} < \frac{1}{ns_n} \Rightarrow 0 < s_n < \frac{1}{a}\frac{1}{n}$$

απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι $s_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + s_n} = 1.$$

Παράδειγμα 1.15. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Παρατηρούμε ότι $a_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\sqrt[n]{n} = (1 + \delta_n)^2, \qquad \delta_n \geq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Υψώνοντας αρχικά στη n–οστη δύναμη έχουμε διαδοχικά

$$n = (1 + \delta_n)^{2n} \Rightarrow \sqrt{n} = (1 + \delta_n)^n \Rightarrow \sqrt{n} \geq 1 + n\delta_n$$

όπου στη τελευταία συνεπαγωγή έγινε χρήση της ανισότητας Bernoulli (Παράδειγμα 4.1). Έτσι υπολογίζουμε

$$\sqrt{n} \geq n\delta_n \Rightarrow \delta_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

απ΄ όπου έπεται ότι $\delta_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Τελικά

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}(1 + 2\delta_n + \delta_n^2) = 1.$$

Το ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα της Ανάλυσης είναι μία εφαρμογή της Πρότασης 1.5.

Παράδειγμα 1.16. Να δειχθεί ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι το όριο μιας ακολουθίας ρητών αριθμών.

Έστω $r \in \mathbb{R}$. Εάν ο r είναι ρητός τότε η ακολουθία $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ με $r_n = r$, $\forall n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει προφανώς στον r. Έστω ότι ο r είναι άρρητος, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n θα είναι $nr - 1 < [nr] \leq nr$, όπου με $[nr]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του nr, απ΄ όπου έπεται ότι

$$r - \frac{1}{n} < \frac{[nr]}{n} \leq r, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Μέσω της Πρότασης 1.5 βλέπουμε ότι η ακολουθία $([nr]/n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στον r.

Πρόταση 1.6 (Μονότονη σύγκλιση). *Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μια μονότονη ακολουθία. Η ακολουθία αυτή συγκλίνει αν και μόνον αν είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ακολουθία συγκλίνει, τότε από την Πρόταση 1.3 έπεται ότι είναι φραγμένη.

Υποθέτουμε τώρα ότι η ακολουθία είναι φραγμένη. Έστω λοιπόν ότι η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και έστω $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ είναι ένα άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, κατά συνέπεια υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου, έστω ℓ, δηλαδή $\ell = \sup\{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$. Δείχνουμε ότι $a_n \to \ell$. Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει όρος της ακολουθίας a_N που ικανοποιεί τη σχέση

$$\ell - \epsilon < a_N < \ell,$$

διαφορετικά το $\ell - \epsilon$ θα ήταν ένα άνω φράγμα της ακολουθίας, πράγμα άτοπο αφού το ℓ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της ακολουθίας. Επειδή η ακολουθία είναι αύξουσα θα έχουμε ότι $\ell - \epsilon < a_n < \ell$, $\forall n \geq N$, οπότε από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι $a_n \to \ell$. Η απόδειξη για φθίνουσα και κάτω φραγμένη ακολουθία είναι ανάλογη. □

Παράδειγμα 1.17. Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει.

Στο Παράδειγμα 1.8 δείχθηκε ότι η δοσμένη ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη με $2 \leq a_n < 2.75$, για κάθε φυσικό αριθμό n, έτσι σύμφωνα με την Πρόταση 1.6 συγκλίνει σε κάποιο αριθμό στο διάστημα $[2, 2.75)$. Τον αριθμό αυτό συμβολίζουμε με e, τιμώντας έτσι τον Euler (1707–1783) ο οποίος χρησιμοποίησε τον αριθμό αυτό. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο e είναι άρρητος και με ακρίβεια 15 δεκαδικών ψηφίων η τιμή του είναι $e = 2.718\,281\,828\,459\,045\dots$. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Παράδειγμα 1.18. Να δειχθεί ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$$

Για $n > 1$ έχουμε

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\frac{n-1}{n}$$

έτσι

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e}$$

που είναι το ζητούμενο.

Παράδειγμα 1.19. Θεωρούμε την αναδρομική ακολουθία

$$a_{n+1} = \frac{2a_n+\delta}{3}, \quad a_1 = 0, \qquad n \in \mathbb{N},$$

όπου $\delta > 0$. Να δειχθεί ότι η ακολουθία είναι συγκλίνουσα και να υπολογισθεί το όριό της.

1. Η ακολουθία είναι άνω φραγμένη. Υπολογίζουμε μερικούς όρους της

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{\delta}{3}, \quad a_3 = \frac{5\delta}{3^2}, \quad a_4 = \frac{19\delta}{3^3}, \quad \ldots.$$

Παρατηρούμε ότι $a_n < \delta$, για $n = 1, 2, 3, 4$. Ισχυριζόμαστε ότι η ανισότητα ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός είναι σωστός. Δείχνουμε ότι εάν $a_k < \delta$, τότε $a_{k+1} < \delta$. Πράγματι

$$a_{k+1} = \frac{2a_k+\delta}{3} < \frac{2\delta+\delta}{3} = \delta.$$

Άρα $a_n < \delta$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Η ακολουθία είναι αύξουσα.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n+\delta}{3} - a_n = \frac{\delta - a_n}{3} \geq 0,$$

επειδή $a_n < \delta$, για κάθε n.

3. Σαν αύξουσα και φραγμένη η ακολουθία συγκλίνει. Εάν a είναι το όριο της ακολουθίας τότε

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+\delta}{3} \Rightarrow a = \frac{2a+\delta}{3},$$

οπότε επιλύοντας την εξίσωση βρίσκουμε $a = \delta$, κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \delta.$$

Σημείωση: Μπορεί να δειχθεί (βλέπε Ασκήσεις) ότι

$$a_n = \left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right)\frac{\delta}{3} = \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]\delta, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Παράδειγμα 1.20. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, με

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}, \quad \text{και } a_1 = a > 1.$$

Να δειχθεί ότι η ακολουθία συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

Δείχνουμε ότι $a_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η ανισότητα ισχύει για $n = 1$, από την υπόθεση. Έστω $a_n \geq 1$, τότε

$$a_{n+1} - 1 = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} - 1 = \frac{a_n^2 + 1 - 2a_n}{2a_n} = \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} \geq 0$$

από την υπόθεση της επαγωγής, γεγονός που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Δείξαμε ότι η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη. Στη συνέχεια εξετάζουμε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία. Υπολογίζουμε

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n} - a_n = \frac{a_n^2 + 1 - 2a_n^2}{2a_n} = \frac{1 - a_n^2}{2a_n},$$

απ΄ όπου έπεται ότι $a_{n+1} - a_n \leq 0$, επειδή $a_n \geq 1$. Άρα η ακολουθία είναι φθίνουσα και ως κάτω φραγμένη συγκλίνει. Εάν ℓ είναι το όριο της ακολουθίας θα έχουμε,

$$\ell = \frac{\ell^2 + 1}{2\ell} \Leftrightarrow 2\ell^2 = \ell^2 + 1$$

οπότε επειδή $\ell \geq 1$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το όριο είναι $\ell = 1$.

Παράδειγμα 1.21. Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει, και να υπολογισθεί το όριό της.

Παρατηρούμε ότι $a_n = b_n^2$ όπου

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

και $b_n \to e$, καθώς $n \to \infty$, οπότε από τις ιδιότητες των συγκλινουσών ακολουθιών, Πρόταση 1.4, θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 = e^2.$$

Παρατήρηση 1.3 (Η έννοια της υπακολουθίας). Ας θεωρήσουμε την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Οι ακολουθίες $a_2, a_4, a_6, \ldots, a_{2n}, \ldots$ και $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2n-1}, \ldots$ λέγονται **υπακολουθίες** της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Γενικότερα εάν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ είναι μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών τότε η ακολουθία $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ λέγεται **υπακολουθία** της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Σημειώνουμε ότι η k μπορεί να ειδωθεί ως μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ με τιμές $k(n) = k_n$.

Πρόταση 1.7. *Έστω ότι η ακολουθία* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *συγκλίνει στον αριθμό* ℓ. *Τότε για κάθε υπακολουθία* $(a_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ *ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \ell.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Από τον ορισμό του ορίου υπάρχει N τέτοιο ώστε $|a_n - \ell| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$. Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $k_n \geq n$, έπεται ότι για $n \geq N$ θα είναι $k_n \geq k_N \geq N$, οπότε $|a_{k_n} - \ell| < \epsilon$, ισοδύναμα $a_{k_n} \to \ell$. □

Παράδειγμα 1.22. Να δειχθεί ότι η ακολουθία

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει, και να υπολογισθεί το όριό της.

Παρατηρούμε ότι

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{1/2},$$

οπότε σύμφωνα με την Πρόταση 1.7, θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{e}.$$

Παράδειγμα 1.23. Εάν $b > 1$, $r > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί, και $k \in \mathbb{N}$ να δειχθεί ότι

(α΄) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n} = 0$ (β΄) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^r} = 0$ (γ΄) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b^k n}{n^r} = 0.$

Παρατηρούμε ότι η (α΄) έπεται από την (β΄) για $r = 1$. Δείχνουμε λοιπόν ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^r} = 0. \tag{1.7}$$

Η συνάρτηση $\log_b$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ υπάρχει μοναδικός $k_n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$k_n \leq \log_b n < k_n + 1 \Leftrightarrow b^{k_n} \leq n < b^{k_n+1}.$$

Τότε υπολογίζουμε

$$0 \leq \frac{\log_b n}{n^r} \leq \frac{k_n + 1}{b^{rk_n}} = b^r \frac{k_n + 1}{(b^r)^{k_n+1}}. \tag{1.8}$$

Επειδή $b^r > 1$ γράφοντας $b^r = 1 + \delta$, με $\delta > 0$, και κάνοντας χρήση του διωνυμικού θεωρήματος

$$(1+\delta)^{k_n+1} = 1 + (k_n+1)\delta + \frac{(k_n+1)k_n}{2}\delta^2 + \cdots + \delta^{k_n+1}$$

έχουμε

$$(b^r)^{k_n+1} = (1+\delta)^{k_n+1} > \frac{(k_n+1)k_n}{2}\delta^2 = \frac{(k_n+1)k_n}{2}(b^r-1)^2.$$

Έτσι από την σχέση (1.8) προκύπτει

$$0 \leq \frac{\log_b n}{n^r} < \frac{b^r}{(b^r-1)^2}\frac{2(k_n+1)}{(k_n+1)k_n} = \frac{b^r}{(b^r-1)^2}\frac{2}{k_n}.$$

Παρατηρώντας ότι $1/k_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, ως υπακολουθία της ακολουθίας $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ (γιατί;), η (1.7) έπεται από την τελευταία σχέση.

Γράφοντας την (γ΄) στη μορφή

$$\frac{\log_b^k n}{n^r} = \left(\frac{\log_b n}{n^{r/k}}\right)^k$$

παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα έπεται από την (α΄) και την Πρόταση 1.4.

1.6 Όριο ακολουθίας στο άπειρο

Ορισμός 1.6. Θα λέμε ότι η ακολουθία των πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **αποκλίνει στο $+\infty$**, και θα γράφουμε $a_n \to +\infty$ εάν για κάθε πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \geq M$ για $n \geq N$.
Θα λέμε ότι η ακολουθία των πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **αποκλίνει στο $-\infty$**, και θα γράφουμε $a_n \to -\infty$ εάν για κάθε πραγματικό αριθμό M, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \leq M$ για $n \geq N$.

Ας θεωρήσουμε μια μη άνω φραγμένη ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_n \in \mathbb{N}$ με $k_n \geq n$, ώστε

$$a_{k_n} \geq n,$$

κατά συνέπεια $a_{k_n} \to +\infty$. Όμοια αν μια ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη τότε υπάρχει υπακολουθία της που αποκλίνει στο $-\infty$. Μπορούμε επομένως να θεωρούμε τα $+\infty$ και $-\infty$ ως γενικευμένα όρια υπακολουθιών μιας μη φραγμένης ακολουθίας. Αργότερα θα αποδείξουμε ότι αν μια ακολουθία είναι φραγμένη τότε υπάρχει υπακολουθία της η οποία συγκλίνει, σε πραγματικό αριθμό (Πρόταση ;;).

Ασκήσεις

1. Να εξετασθούν ως προς τη σύγκλιση οι ακολουθίες και στην περίπτωση σύγκλισης να βρεθεί το όριο

(α΄) $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

(β΄) $a_n = \dfrac{n+1}{n+\sqrt{n}}$

(γ΄) $a_n = \dfrac{n^{\sqrt{2}}}{\sqrt{n}}$

(δ΄) $a_n = \dfrac{n^e}{e^n}$

(ε΄) $a_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$

(ϛ΄) $a_n = \dfrac{2^n+1}{3^n-1}$

2. Θυμίζουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$s_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}.$$

Να δειχθεί ότι η ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριό της.

3. Για την ακολουθία του Παραδείγματος 1.9 να δειχθεί ότι

$$a_n < \frac{1-\sqrt{1-4\gamma}}{2},$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Να βρεθεί επίσης το όριο της ακολουθίας.

4. Θυμίζουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n

$$1+a+a^2+\cdots+a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \qquad a \neq 1.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1+a+a^2+\cdots+a^n, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία $(s_n)_{n=1}^{\infty}$. **Υπόδειξη**: Θεωρήστε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $|a|<1$, $|a|=1$, $|a|>1$.

5. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $0 < a \le b$. Δείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = b$.

6. Να προσδιοριστεί η τιμή του πραγματικού αριθμού r έτσι ώστε η ακολουθία

$$a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{(n+1)^r}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

(i) Να συγκλίνει στο μηδέν. (ii) Να συγκλίνει σε αριθμό διάφορο του μηδενός. (iii) Να αποκλίνει.

7. Έστω ότι η ακολουθια a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ είναι φραγμένη. Να δειχθεί ότι

(α΄) Η ακολουθία a_n/n συγκλίνει στο μηδέν.

(β΄) Εάν η ακολουθία b_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ συγκλίνει στο μηδέν, τότε η $a_n b_n$ συγκλίνει στο μηδέν.

8. Με χρήση της ανισότητας
$$\frac{n^2}{2} < 1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{(n+1)^2}{2},$$
όπου $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

9. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, με $0 < a < 1$ συγκλίνει και να βρεθεί το όριο. **Υπόδειξη**: $a = 1/(1+\delta)$, όπου $\delta > 0$.

10. Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η ακολουθία με όρους $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

11. Αν p και r είναι πραγματικοί αριθμοί με $r > 1$, δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{r^n} = 0.$$

12. Να δειχθεί ότι κάθε μία από τις ακολουθίες που ορίζονται με τις σχέσεις

(α΄) $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, \quad a_1 = 1$

(β΄) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad a_1 = 1$

είναι αύξουσα και φραγμένη. Να υπολογισθεί το όριο κάθε μίας ακολουθίας.

13. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_{n+1} = \sqrt{4a_n + 3}, \quad a_1 = 5$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

14. Δείξτε ότι
$$\log n \le n - 1$$
για κάθε θετικό ακέραιο n. Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία με όρους $a_n = \sqrt{\log n}$.

15. Να βρεθεί, εφόσον υπάρχει, το όριο κάθε μιας από τις ακολουθίες

(α΄) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$

(β΄) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/\sqrt{n}}$

(γ΄) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(δ΄) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n^2}$

(ε΄) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$

(ϛ΄) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

16. Εάν p είναι πραγματικός αριθμός να υπολογισθεί το όριο
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^p}$$
για τις διάφορες τιμές του p.

Κεφάλαιο 2

Σειρές

2.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι ο $\sqrt{2}$ είναι το όριο μιας, άπειρης, ακολουθίας ρητών αριθμών κάθε όρος της οποίας προκύπτει αν στον προηγούμενο όρο προσθέσουμε ένα δεκαδικό ψηφίο από το δεκαδικό ανάπτυγμα $\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$. Έτσι είδαμε ότι οι μερικοί πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι

$$s_1 = 1.4, \qquad s_2 = 1.41, \qquad s_3 = 1.414, \qquad \ldots, \qquad s_9 = 1.414213562, \qquad \ldots,$$

ή

$$s_1 = 1 + \frac{4}{10}, \qquad s_2 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}, \qquad s_3 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}, \qquad \ldots$$

$$s_9 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \frac{6}{10^8} + \frac{2}{10^9} = \sum_{k=0}^{9} \frac{d_k}{10^k}$$

με

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 4, \quad d_2 = 1, \quad d_3 = 4, \quad d_4 = 2, \quad d_5 = 1, \quad d_6 = 3, \quad d_7 = 5, \quad d_8 = 6, \quad d_9 = 2.$$

Έτσι ο n-οστός όρος της ακολουθίας είναι

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}, \qquad d_k \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\},$$

και επειδή $s_n \to \sqrt{2}$, καθώς $n \to \infty$, είναι λογικό να γράψουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} = \sqrt{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

Δηλαδή το σύμβολο $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{10^k}$ παριστάνει το όριο της ακολουθίας $(s_n)_{n=1}^{\infty}$.

Ορισμός 2.1. Εάν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών ορίζουμε μια νέα ακολουθία $(S_n)_{n=1}^{\infty}$, όπου

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_1 + a_2, \qquad \ldots, \qquad S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad \ldots$$

Την έκφραση

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

λέμε **σειρά** και την σκεφτόμαστε ως το άθροισμα όλων των, άπειρων το πλήθος, όρων της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

Το a_n λέμε ***n*-οστό όρο της σειράς**. Την $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ την λέμε **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς** με S_n να είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς. Θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Στην περίπτωση αυτή αν $S_n \to s$ θα λέμε το s **όριο της σειράς** και θα γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Εάν η σειρά δεν συγκλίνει θα λέμε ότι **αποκλίνει**.

Πρέπει ίσως να τονίσουμε τη διττή σημασία του συμβόλου $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Με αυτό εννοούμε και δηλώνουμε, αφενός, το "άθροισμα" όλων των όρων της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, και αφετέρου το όριο της ακολουθίας $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ των μερικών αθροισμάτων εφόσον αυτό υπάρχει ως πραγματικός αριθμός. Επίσης έχουμε την ισοδυναμία

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = a \tag{2.1}$$

2.2 Χαρακτηριστικές σειρές

Παράδειγμα 2.1. Για την ακολουθία των φυσικών αριθμών $(n)_{n=1}^{\infty}$, έχουμε

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Η ακολουθία $(S_n)_{n=1}\infty$ είναι γνησίως αύξουσα και μη φραγμένη, επομένως δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, κατ·α συνέπεια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n$ αποκλίνει. Όμοια η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$$

αποκλίνει. Εδώ $S_n = n$.

Παράδειγμα 2.2 (Η γεωμετρική σειρά). Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$, όπου a είναι ένας πραγματικός αριθμός, λέγεται **γεωμετρική σειρά**. Θυμίζουμε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $a \neq 1$ και για κάθε φυσικό αριθμό n είναι

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Έτσι ορίζοντας

$$S_0 = a^0 = 1, \quad \text{και } S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

έχουμε

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Εάν $|a| < 1$, τότε $|a|^n \to 0$, καθώς $n \to \infty$, οπότε $a^n \to 0$, καθώς $n \to \infty$ $(-|a|^n \leq a^n \leq |a|^n)$, έτσι

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - a}. \tag{2.2}$$

Εάν $|a| > 1$, τότε η $(a^n)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη κατά συνέπεια δεν συγκλίνει, οπότε το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ δεν υπάρχει. Εάν $a = 1$, τότε

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = n + 1,$$

ενώ αν $a = -1$, τότε

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = 1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{εάν ο } n \text{ είναι άρτιος} \\ 0 & \text{εάν ο } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Επομένως για $|a| = 1$ το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ δεν υπάρχει. Κατά συνέπεια η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ συγκλίνει αν και μόνο αν $|a| < 1$, και στη περίπτωση αυτή, μέσω της (2.2), είναι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1 - a}, \qquad |a| < 1. \tag{2.3}$$

Το a στη σειρά (2.3) λέγεται **λόγος** της σειράς.

Παράδειγμα 2.3 (Τηλεσκοπική σειρά). Εξετάζουμε ως προς την σύγκλιση τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \cdots \tag{2.4}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε n είναι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

έτσι για το μερικό άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε αμέσως ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Η σειρά (2.4) είναι τυπικό παράδειγμα **τηλεσκοπικής σειράς**.

Ορισμός 2.2. Μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

όπου ο n-οστός όρος της μπορεί να γραφεί στη μορφή $a_n = b_n - b_{n+1}$ λέγεται **τηλεσκοπική σειρά**.

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι τηλεσκοπική και $a_n = b_n - b_{n+1}$, τότε

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) \\ &= b_1 - b_{n+1} \end{aligned}$$

οπότε για το όριο της σειράς ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

Παράδειγμα 2.4. Ας θεωρήσουμε την **αρμονική σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= S_1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\
&\geq S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&\geq S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2} \\
&\vdots \\
S_{2^n} &= S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \\
&\geq S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n} = S_{2^{n-1}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι γνησίως αύξουσα και μή φραγμένη αφού για οποιοδήποτε $M > 0$ υπάρχει N ώστε $S_{2^N} = 1 + N/2 > M$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 2.5 (Η εκθετική σειρά). Δείχνουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = e \tag{2.5}$$

όπου δεχόμαστε να γράφουμε $0! = 1$. Θυμίζουμε ότι e είναι το όριο της αύξουσας και φραγμένης ακολουθίας

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Στο Παράδειγμα 1.8 δείξαμε ότι

$$a_n = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \tag{2.6}$$

$$\leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \tag{2.7}$$

Για k τυχαίο αλλά σταθερό και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
a_{n+k} &= 1 + \sum_{j=1}^{n+k} \frac{1}{j!}\Big(1 - \frac{1}{n+k}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n+k}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{j-1}{n+k}\Big) \\
&\geq 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\Big(1 - \frac{1}{n+k}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n+k}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{j-1}{n+k}\Big) \\
&\geq 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\Big(1 - \frac{k}{n+k}\Big)^{j-1} \\
&\geq 1 + \Big(1 - \frac{k}{n+k}\Big)^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!},
\end{aligned}$$

απ΄ όπου, επειδή $e = \sup a_n$, έπεται ότι

$$e \geq 1 + \Big(1 - \frac{k}{n+k}\Big)^{k-1} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!},$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας το όριο του $n \to \infty$ στην ακολουθία στο δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας έχουμε από την (2.7)

$$e \geq 1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} \geq a_k.$$

Έτσι αν S_k είναι το μερικό άθροισμα της σειράς στην (2.5) έχουμε $a_k \leq S_k \leq e$, οπότε από την Πρόταση 1.5 έπεται ότι $S_n \to e$, καθώς $n \to \infty$, γεγονός που αποδεικνύει το περιεχόμενο της (2.5). Τη σειρά στην (2.5) τη λέμε **εκθετική σειρά**.

2.3 Παρατηρήσεις

Πράξεις μεταξύ σειρών.

Πρόταση 2.1. *Εάν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a, \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$$

είναι δυο συγκλίνουσες σειρές και λ, μ είναι πραγματικές σταθερές, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \lambda a + \mu b.$$

Απόδειξη. Αν με S_n συμβολίσουμε το n-τάξης μερικό άθροισμα της $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ έχουμε

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k) + \sum_{k=1}^{n}(\mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

από τις γνωστές ιδιότητες πραγματικών αριθμών. Το όριο του δεξιού μέλους του n τείνοντος στο άπειρο υπάρχει, από την υπόθεση και τις ιδιότητες των ορίων ακολουθιών, κατά συνέπεια και αυτό του αριστερού μέλους. Παίρνοντας λοιπόν το όριο στα δύο μέλη προκύπτει το ζητούμενο. □

Για κατάλληλες επιλογές των λ και μ στην Πρόταση 2.1 μπορούμε να ορίσουμε τις βασικές πράξεις για σειρές.

Ορισμός 2.3. Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι δύο σειρές, ορίζουμε το άθροισμα και τη διαφορά των σειρών, και τον πολλαπλασιασμό της σειράς με σταθερά με τις σχέσεις

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

οποτεδήποτε οι εκφράσεις στο δεξιό μέλος κάθε σχέσης έχουν έννοια.

Μια αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση μιας σειράς

Πρόταση 2.2. *Αν μια σειρά συγκλίνει ο n-οστός όρος της τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο.*

Απόδειξη. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ μια συγκλίνουσα σειρά. Τότε

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1}.$$

Επειδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο s, το όριο του δεξιού μέλους υπάρχει, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = s - s = 0$$

που είναι το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.1. Ισοδύναμη διατύπωση της Πρότασης 2.2 είναι η ακόλουθη: *Εάν ο ο n-οστός όρος μιας σειράς δεν τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο, τότε η σειρά αποκλίνει.* Έτσι συμπεραίνουμε ότι κάθε μία από τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \cos n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

αποκλίνει αφού το όριο του n-οστού όρου καθώς το n τείνει στο άπειρο είτε είναι διάφορο του μηδενός είτε δεν υπάρχει. Σημειώνουμε επίσης ότι το αντίστροφο της Πρότασης 2.2 δεν ισχύει, όπως είδαμε με την αρμονική σειρά, δηλαδή το γεγονός ότι ο n-οστός όρος τείνει στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο δεν εξασφαλίζει ότι η σειρά συγκλίνει.

Πρόταση 2.3. *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ μια συγκλίνουσα σειρά. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε*

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n\right| < \epsilon.$$

Απόδειξη. Για κάθε N έχουμε

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_{N-1}\right| = |a - S_{N-1}|.$$

Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο a. □

2.4 Απόλυτη σύγκλιση

Ας ξεκινήσουμε με μια απλή και χρήσιμη παρατήρηση.

Πρόταση 2.4. *Έστω $a_n \geq 0$ για όλα τα n, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την υπόθεση η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων S_n της σειράς είναι αύξουσα. Κατά συνέπεια αν η $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη, τότε συγκλίνει, ισοδύναμα η σειρά συγκλίνει. Αν τώρα η σειρά συγκλίνει, έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, τότε $S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_n \leq \cdots \leq s$, δηλαδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι φραγμένη. □

Ορισμός 2.4. Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει απολύτως** εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Πρόταση 2.5 (Κριτήριο απόλυτης σύγκλισης). *Εάν μια σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και έστω $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = s$ για κάποιο $s \in \mathbb{R}$. Από τη σχέση $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, έπεται ότι

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \Rightarrow 0 \leq \sum_{n=1}^{N}(a_n + |a_n|) \leq \sum_{n=1}^{N} 2|a_n| = 2\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq 2s, \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Έτσι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ είναι φραγμένη, επομένως από την Πρόταση 2.4 έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ συγκλίνει. Τότε όμως και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ως διαφορά δύο συγκλινουσών σειρών,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

□

Πρόταση 2.6. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως και $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αναδιάταξη της $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, δηλαδή $b_n = a_{\sigma(n)}$, όπου $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια ένα προς ένα και επί συνάρτηση, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει απολύτως και*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Απόδειξη. Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει έπεται ότι για κάποιο $C > 0$, θα είναι

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq C$$

για όλα τα n. Επειδή για κάθε m υπάρχει n ώστε

$$|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_m| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq C$$

έπεται ότι η αύξουσα ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ είναι φραγμένη, άρα συγκλίνει, ισοδύναμα η $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ συγκλίνει. Συμβολίζουμε με S_n και T_n τα μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντίστοιχα. Από την σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ και την Πρόταση 2.3 έπεται ότι για δοσμένο $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_N\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Επιλέγοντας M $(> N)$ τόσο μεγάλο[1] ώστε $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\} \subset \{b_1, b_2, \ldots, B_M\}$ βλέπουμε ότι για $m \geq M$ η διαφορά $T_m - S_N$ είναι το άθροισμα πεπερασμένου πλήθους a_k με $k > N$, αφού $a_k \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$, έτσι θα είναι

$$|T_m - S_N| \leq |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \cdots .$$

Έτσι για $m \geq M$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - T_m\right| &\leq \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - S_N\right| + |S_N - T_m| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

κατά συνέπεια $T_m \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ή ισοδύναμα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. □

[1] Μπορούμε να πάρουμε $M > \max\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$.

2.5 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.5 ενθαρρύνει το να θεωρούμε και να εξετάζουμε ως προς τη σύγκλιση σειρές με μη αρνητικούς όρους. Το αποτέλεσμα που ακολουθεί αποδείχθηκε κατά την διαδικασία της απόδειξης της Πρότασης 2.5.

Πρόταση 2.7 (Βασικό κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ με $0 \leq a_n \leq b_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εάν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$, τότε από την υπόθεση έπεται ότι οι ακολουθίες $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντίστοιχα, είναι αύξουσες και ικανοποιούν τη σχέση

$$0 \leq S_n \leq T_n \leq b, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Έτσι η ακολουθία των S_n είναι αύξουσα και φραγμένη, κατά συνέπεια συγκλίνει, δηλαδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 2.6. Κάθε πραγματικός αριθμός x γράφεται σε δεκαδική μορφή ως $x = a_0.a_1a_2a_3\dots$ όπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και είδαμε ότι τυπικά μπορούμε να γράψουμε

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots \tag{2.8}$$

Ας θεωρήσουμε λοιπόν μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}, \qquad \text{όπου } a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

Επειδή $0 \leq a_n \leq 9$ από την Πρόταση 2.7 έχουμε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9\Big(\frac{1}{1-1/10} - 1\Big) = 1,$$

από το άθροισμα γεωμετρικής σειράς. Κατά συνέπεια η σειρά (2.8) όντως συγκλίνει και παριστάνει τον πραγματικό αριθμό x. Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω ανισότητες είναι αυστηρές εκτός αν $a_n = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $x = a_0$, ή $a_n = 9$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $x = a_0 + 1$. Έτσι στη γενική περίπτωση είναι

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} < 1.$$

Πρόταση 2.8 (Κριτήριο συμπύκνωσης). *Έστω $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} + \cdots$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με S_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και με T_n τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Παρατηρούμε ότι για μεγάλο n

$$S_n = a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{2^2} + \underbrace{(a_8 + a_9 + \cdots + a_{15})}_{2^3} + \cdots$$

Επειδή $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ (γιατί;) έχουμε

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}-1} &= a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3)}_{2} + \underbrace{(a_4 + a_5 + a_6 + a_7)}_{2^2} + \cdots + \underbrace{(a_{2^n} + a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^n+2^n-1})}_{2^n} \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

επομένως

$$0 \leq S_{2^{n+1}-1} \leq a_1 + T_n. \tag{2.9}$$

Όμοια

$$\begin{aligned} T_n &= 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\ &= 2(a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^n}) \\ &= 2[a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + a_8 + a_8 + a_8) + \cdots + \underbrace{(a_{2^n} + a_{2^n} + \cdots + a_{2^n})}_{2^{n-1}}] \\ &\leq 2[a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \cdots + a_{2^n})], \end{aligned}$$

οπότε

$$0 \leq T_n \leq 2S_{2^n} - 2a_1. \tag{2.10}$$

Οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσες. Έτσι αν μια υπακολουθία της $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει, τότε και η ακολουθία συγκλίνει. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, ισοδύναμα $S_n \to s$, για κάποιο $s \in \mathbb{R}$, από την (2.10) έπεται ότι $T_n \leq 2s - 2a_1$, για όλα τα n, κατά συνέπεια η $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = t$, για κάποιο $t \in \mathbb{R}$, από την (2.9) έπεται ότι $S_n \leq a_1 + t$, για κάθε n (γιατί;), κατά συνέπεια η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 2.7 (p-σειρά). Η p-σειρά με $p > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$. Η περίπτωση $p = 1$ είναι η αρμονική σειρά.

Θεωρούμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$$

η οποία είναι γεωμετρική με λόγο $1/2^{p-1}$. Κατά συνέπεια συγκλίνει αν $p-1>0$, ισοδύναμα αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p-1\leq 0$, ισοδύναμα αν $p\leq 1$. Έτσι από το κριτήριο συμπύκνωσης έπεται ότι η p-σειρά συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p\leq 1$.

Σημειώνουμε ότι για $p\leq 0$ η παραπάνω σειρά αποκλίνει αφού για $p=0$ ο n-οστός όρος της σειράς είναι ίσος με 1, ενώ για $p<0$ ο n-οστός όρος της σειράς $n^{-p}=n^{|p|}$ τείνει στο άπειρο καθώς $n\to\infty$.

2.6 Το κριτήριο του λόγου και το κριτήριο της ρίζας

Πρόταση 2.9 (Κριτήριο του λόγου). *Θεωρούμε τη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με* $a_n\neq 0$, *και έστω*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L.$$

Τότε

(1) *Αν* $L<1$ *η σειρά συγκλίνει απολύτως.*

(2) *Αν* $L>1$ *η σειρά αποκλίνει.*

(3) *Αν* $L=1$ *το κριτήριο δεν παρέχει κάποια πληροφορία για τη σύγκλιση της σειράς.*

Απόδειξη. (1) Αν $L<1$ επιλέγοντας r ώστε $L<r<1$, από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι υπάρχει N ώστε

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<r,\qquad n\geq N.$$

Έτσι παίρνουμε ότι

$$|a_{N+1}|<r|a_N|,\qquad |a_{N+2}|<r|a_{N+1}|<r^2|a_N|,\qquad \ldots,\qquad |a_{N+k}|<r^k|a_N|,\quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Επειδή $0<r<1$ η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ συγκλίνει κατά συνέπεια από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|$ συγκλίνει άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$.
(2) Εάν $L>1$, τότε υπάρχει N ώστε

$$1<\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\qquad \forall n\geq N,$$

επομένως $|a_N|<|a_{N+1}|<\cdots<|a_{N+k}|<\cdots$ κατά συνέπεια $a_n\nrightarrow 0$, οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.
(3) Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θεωρώντας την p-σειρά παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1,$$

κατά συνέπεια $L=1$ και γνωρίζουμε ότι η σειρά συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει αν $p\leq 1$. □

Πόρισμα 2.1. *Αν για την ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

τότε $a_n \to 0$.

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του κριτηρίου του λόγου υπάρχει $r < 1$ και N ώστε

$$0 \le |a_n| < r^{n-N}|a_N|, \qquad \forall n > N.$$

Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι $r^n \to 0$. □

Πρόταση 2.10 (Κριτήριο της ρίζας). *Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L.$$

Τότε

(1) *Αν $L < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως.*

(2) *Αν $L > 1$ η σειρά αποκλίνει.*

(3) *Αν $L = 1$ το κριτήριο δεν παρέχει κάποια πληροφορία για τη σύγκλιση της σειράς.*

Απόδειξη. (1) Αν $L < 1$ επιλέγοντας r ώστε $L < r < 1$, από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι υπάρχει N ώστε $\sqrt[n]{|a_n|} < r$ για κάθε $n \ge N$, ισοδύναμα

$$|a_n| < r^n, \qquad n \ge N.$$

Επειδή $0 < r < 1$ η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} r^n$ συγκλίνει κατά συνέπεια από το κριτήριο σύγκρισης και η $\sum_{n=N}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει άρα και η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
(2) Επειδή

$$|a_n|^{1/n} \to L > 1,$$

έπεται ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν συγκλίνει στο μηδέν γεγονός που συνεπάγεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει.
(3) Ας δούμε ένα παράδειγμα. Για την p-σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad p > 0$$

έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^p = 1,$$

και γνωρίζουμε ότι αν $p \le 1$ η σειρά αποκλίνει ενώ, αν $p > 1$ ότι συγκλίνει. □

Πόρισμα 2.2. *Αν για την ακολουθία* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *ισχύει*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

τότε $a_n \to 0$.

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του κριτηρίου της ρίζας υπάρχει $r < 1$ και N ώστε

$$0 \leq |a_n| < r^n, \qquad \forall n \geq N.$$

Το ζητούμενο έπεται από το γεγονός ότι $r^n \to 0$. □

2.7 Εναλλασσόμενες σειρές και σύγκλιση υπό συνθήκη

Στη συνέχεια θεωρούμε σειρές οι όροι των οποίων είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί αριθμοί. Για παράδειγμα

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}}$$

Ορισμός 2.5. Μια σειρά που γράφεται στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \qquad \text{ή} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n, \qquad \text{με } a_n \geq 0$$

λέγεται εναλλασσόμενη σειρά.

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)(-1)^n a_n = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

κατά συνέπεια αν η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ συγκλίνει έστω στον πραγματικό αριθμό s, ισοδύναμα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στον s, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ συγκλίνει στο $-s$.

Όσον αφορά τη σύγκλιση των σειρών στην εισαγωγή της παραγράφου παρατηρούμε ότι η μεν πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά των απολύτων τιμών είναι η αρμονική σειρά, αλλά δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει, η δε δεύτερη σειρά συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με πρώτο όρο το -1 και λόγο $r = -1/2$, και μάλιστα συγκλίνει και απολύτως. Σχετικά με την σύγκλιση μιας εναλλασσόμενης σειράς έχουμε το

Πρόταση 2.11 (Κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς του Leibniz). *Έστω ότι για την εναλλασσόμενη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *ισχύει ότι*

(1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

τότε η σειρά συγκλίνει.

Απόδειξη. Αν $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων παρατηρούμε ότι

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1}a_n \tag{2.11}$$

επομένως

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \tag{2.12}$$
$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \tag{2.13}$$
$$S_{2n+1} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n} - a_{2n+1}) \tag{2.14}$$
$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \tag{2.15}$$

Από την υπόθεση έπεται ότι η κάθε παρένθεση στις (2.12), (2.13) και (2.14) είναι μη αρνητική ποσότητα, και από την (2.15) ότι $S_{2n+1} \geq S_{2n}$ κατά συνέπεια έχουμε

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1 = a_1.$$

Η υπακολουθία $(S_{2n})_{n=1}^{\infty}$ ως αύξουσα και φραγμένη συγκλίνει. Έστω $S_{2n} \to s$, τότε από την (2.15) βλέπουμε ότι αφού $a_{2n+1} \to 0$, έπεται ότι και η $(S_{2n+1})_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει και μάλιστα $S_{2n+1} \to s$. Έτσι για $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε $|S_n - s| < \epsilon$ είτε για $n = 2k \geq N$ ή για $n = 2l + 1 \geq N$, κατά συνέπεια η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει, ισοδύναμα η σειρά συγκλίνει.[2] □

Παράδειγμα 2.8. Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$$

συγκλίνει.

Στη σειρά αυτή έχουμε $a_n = 1/n$, επομένως

$$1 \geq \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3} \geq \cdots \geq \frac{1}{n} \geq \cdots \to 0.$$

Έτσι από το κριτήριο εναλλασσόμενης σειράς έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

[2] Παρατηρούμε ότι για τα μερικά αθροίσματα S_{2k} και S_{2l+1}, για τυχαία k και l, επιλέγοντας $n > \max\{k, l\}$ έχουμε $S_{2k} \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_{2l+1}$, κατά συνέπεια $S_{2k} \leq S_{2l+1}$. Έτσι η πλήρης εικόνα για τα μερικά αθροίσματα είναι η

$$S_2 \leq S_4 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq s \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S_3 \leq S_1.$$

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και s είναι το όριο ή άθροισμα της σειράς, το μερικό άθροισμα S_n της σειράς είναι μια προσέγγιση του s, αφού $S_n \to s$. Η διαφορά $s - S_n$ εκφράζει το **σφάλμα** της προσέγγισης του s με το S_n. Το σφάλμα $s - S_n$ λέγεται και **σφάλμα αποκοπής**.

Θεώρημα 2.1 (Εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής εναλλασσόμενης σειράς). *Έστω ότι για την εναλλασσσόμενη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *ισχύει ότι*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0 \qquad \textit{και} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

και έστω $s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$. *Αν* S_n *είναι το μερικό άθροισμα της σειράς, τότε*

$$|s - S_n| \leq a_{n+1}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} s - S_n &= \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1}a_{n+2} + (-1)^{n+2}a_{n+3} + \cdots \\ &= (-1)^n[a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+3} + \cdots]. \end{aligned}$$

Επειδή $a_{k+1} - a_{k+2} \geq 0$, για κάθε k, έπεται ότι

$$\begin{aligned} |s - S_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \cdots \\ &\leq a_{n+1} \end{aligned}$$

αφού κάθε παρένθεση είναι μη αρνητική ποσότητα. □

Παράδειγμα 2.9. Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

συγκλίνει (γιατί;).

(α΄) Να εκτιμηθεί το μέγιστο σφάλμα όταν το άθροισμα της σειράς προσεγγίζεται από το άθροισμα των 8 όρων της σειράς.

(β΄) Πόσοι όροι απαιτούνται να αθροιστούν ώστε το σφάλμα να μην υπερβαίνει το 0.001;

(α΄) Αν s είναι το όριο της σειράς τότε

$$|s - S_8| \leq \frac{1}{2\cdot 9 - 1} = \frac{1}{17}$$

κατά συνέπεια το σφάλμα δεν υπερβαίνει το 1/17.

(β΄) Αν ορίσουμε το σφάλμα $E_n := s - S_n$, θέλουμε

$$|E_n| \leq \frac{1}{2(n+1)-1} \leq 0.001 \Leftrightarrow 499.5 \leq n$$

κατά συνέπεια απαιτείται να αθροιστούν τουλάχιστον 500 όροι.

Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά είναι τυπικό παράδειγμα σειράς η οποία συγκλίνει μεν αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Ορισμός 2.6. Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ αποκλίνει, θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

2.8 Μια ειδική κατηγορία σειρών

Στο Παράδειγμα 2.2 είδαμε ότι αν $-1 < x < 1$ τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

κατά συνέπεια η γεωμετρική σειρά ορίζει, εκεί που συγκλίνει, μια συνάρτηση την $f(x) = 1/(1-x)$. Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε τη σειρά

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

και ας εξετάσουμε, όπως στην περίπτωση της γεωμετρικής σειράς, για ποιές τιμές του x η σειρά συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι αν $x = 0$ η σειρά συγκλίνει στο 1. Για $x \neq 0$ χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου παίρνουμε

$$\frac{\frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|x^n|}{n!}} = \frac{|x|n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή το όριο του σχετικού λόγου είναι μικρότερο του 1 η σειρά συγκλίνει ανεξάρτητα από το ποιό είναι το x, δηλαδή η σειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, αφού για $x \in \mathbb{R}$ το όριο ή άθροισμα της σειράς προφανώς εξαρτάται από το x, έχουμε ότι η σειρά ορίζει μια συνάρτηση. Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση $\exp x$ με τη σχέση

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad -\infty < x < +\infty. \tag{2.16}$$

Παρατηρούμε ότι $\exp 0 = 1$, και από το Παράδειγμα 2.5, βλέπε 2.5, ότι $\exp 1 = e$. Θα αποδείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο ότι $\exp x = e^x$.

Η γεωμετική σειρά όπως και η σειρά (2.16) είναι τυπικά παραδείγματα σειρών των οποίων οι όροι περιέχουν δυνάμεις του x. Οι σειρές αυτές λέγονται δυναμοσειρές και θα τις μελετήσουμε στο σχετικό κεφάλαιο.

Ασκήσεις

1. Η ακολουθία **Fibonacci** $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ορίζεται αναδρομικά από τις σχέσεις

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Δείξτε ότι

(α΄) $\dfrac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \dfrac{1}{f_{n-1}f_n} - \dfrac{1}{f_n f_{n+1}}$

(β΄) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = 1$

(γ΄) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = 2$

2. Δίνεται η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$

(α΄) Υπολογίστε τα μερικά αθροίσματα S_1, S_2, S_3, και S_4 προκειμένου να δείτε πως μπορεί να εκφραστεί το κάθε άθροισμα.

(β΄) Από το (α΄) μαντέψτε τον τύπο για το n-οστό μερικό άθροισμα S_n της σειράς και αποδείξτε με επαγωγή τον ισχυρισμό σας.

(γ΄) Δείξτε ότι η σειρά συγκλίνει στο 1.

3. Σε κάθε μια από τις σειρές να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η σειρά συγκλίνει και στη συνέχεια να βρεθεί το άθροισμα της σειράς

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$ (β΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n+1}}$ (γ΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin^n x$

4. Δείξτε ότι αν $a_n \geq 0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

5. Έστω ότι $a_n > 0$ για κάθε n, δείξτε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ συγκλίνει.

6. Εάν $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για όλα τα n και οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν είναι αλήθεια ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει;

7. Δείξτε ότι

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}, \qquad a > 0.$

(β′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

8. Εξετάστε κατά πόσο η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

συγκλίνει. **Υπόδειξη:** Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\sqrt[n]{n} \to 1$ και συγκρίνετε με γνωστή σειρά.

9. Δείξτε ότι

(α′) Η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ αποκλίνει.

(β′) Η $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$, με $p > 1$ συγκλίνει.

10. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n^p + 1} - \sqrt{n^p} \right)$$

συγκλίνει αν $p > 2$ και αποκλίνει για $p = 2$.

11. Εξετάστε κατά πόσο κάθε μια από τις σειρές συγκλίνει, ή αποκλίνει

(α′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 10}$

(β′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 10}}$

(γ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$

(δ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 3}$

(ε′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2 + n^4}$

(ϛ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + n^4}$

(ζ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$

(η′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 2^n}$

(θ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n - n^e}$

12. Εξετάστε κατά πόσο κάθε μια από τις σειρές συγκλίνει απολύτως, συγκλίνει υπό συνθήκη, ή αποκλίνει

(α′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt{n}}$

(β′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$

(γ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$

(δ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

(ε′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-10)^n}$

(ϛ′) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(ζ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(ι′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n^2}{(n+2)!}$

(ιγ′) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\log n)^n}$

(η′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n$

(ια′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!10^n}$

(ιδ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n+1}{n}$

(ϑ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-2n}{3+4n}\right)^n$

(ιβ′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\tan^{-1} n)^n}$

(ιε′) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-1}$

Μέρος III

Πραγματικές συναρτήσεις, όρια, συνέχεια, παράγωγοι

5

Κεφάλαιο 1

Πραγματικές Συναρτήσεις

1.1 Εισαγωγικά

Οι συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν είναι αυτές στις οποίες οι ποσότητες που εμφανίζονται είναι πραγματικές, και συνήθως δίνονται ή μπορούν να εκφραστούν με κάποιο τύπο. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η $f(x) = x^2$, δηλαδή η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε πραγματικό αριθμό στο τετράγωνό του. Αυτή είναι μια συνάρτηση από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και γράφουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν που περικλείει κύκλος ακτίνας r είναι ίσο με πr^2, κατά συνέπεια το εμβαδόν A, ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, είναι συνάρτηση της μεταβλητής r, δηλαδή $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$A(r) = \pi r^2.$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h είναι ίσος με $\pi r^2 h$, έτσι ο όγκος V είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών r και h, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και

$$V(r, h) = \pi r^2 h.$$

Αν ένα σώμα κινήται στο χώρο $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε σε κάθε χρονική στιγμή t η θέση του είναι γνωστή, έστω $Q(t) \in \mathbb{R}^3$, τότε η κίνηση περιγράφεται από μια συνάρτηση $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, ώστε

$$w(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

όπου οι x, y, z είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει σε κάθε σημείο P στην ατμόσφαιρα της γης να γνωρίζουμε την ατμοσφαιρική πίεση $p(P)$, την θερμοκρασία $q(P)$ και την υγρασία $h(P)$. Υποθέτοντας ότι το κέντρο της γης βρίσκεται στην αρχή ενός τρισορθογωνίου συστήματος αξόνων τότε κάθε σημείο P περιγράφεται μοναδικά από μια τριάδα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, οπότε $p(P) = p(x, y, z)$, $q(P) = q(x, y, z)$, και $h(P) = h(x, y, z)$, κατά συνέπεια η πληροφορία που μας ενδιαφέρει κωδικοποιείται με μια συνάρτηση $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, όπου

$$M(x, y, z) = (p(x, y, z), q(x, y, z), h(x, y, z)).$$

Έτσι, γενικά, μπορούμε να έχουμε συναρτήσεις $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, με $m, n \in \mathbb{N}$.

1.2 Πραγματικές Συναρτήσεις

Ορισμός 1.1. Εάν $A \neq \emptyset$, κάθε συνάρτηση ορισμένη στο A με τιμές στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $f : A \to \mathbb{R}$, λέγεται **πραγματική** συνάρτηση. Συνήθως το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που θα μας απασχολήσουν είναι το $\mathbb{R}$ ή κάποιο υποσύνολο αυτού.

Οι πραγματικές συναρτήσεις συνήθως δίνονται με κάποιο τύπο, για παράδειγμα $f(x) = \sqrt{3x+1}$, και στην περίπτωση αυτή απαιτείται η εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα πρέπει να είναι $3x + 1 \geq 0$, κατά συνέπεια $D(f) = [-1/3, +\infty)$. Παρατηρούμε ότι $f(-1/3) = 0$, και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x > -1/3$ ώστε $\sqrt{3x+1} = y$. Πράγματι "επιλύοντας" την τελευταία εξίσωση, ισοδύναμα, παίρνουμε $3x + 1 = y^2$, απ΄ όπου έπεται ότι $x = y^2/3 - 1/3$, κατά συνέπεια $R(f) = [0, +\infty)$.

Με τα παραδείγματα που ακολουθούν εξετάζουμε κάποια χαρακτηριστικά που ορίσαμε για γενικές συναρτήσεις.

Παράδειγμα 1.1. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x}/(x-1)$. Να βρεθούν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f.

Η τετραγωνική ρίζα ορίζεται για $x \geq 0$, ή για $x \in [0, \infty)$. Ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός εάν $x \neq 1$, δηλαδή $x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Άρα το κλάσμα έχει έννοια εκεί που και οι δύο συνθήκες συμβαίνουν, οπότε

$$D(f) = [0, \infty) \cap ((-\infty, 1) \cup (1, \infty)) = [0, 1) \cup (1, \infty).$$

Το πρόσημο του $f(x)$ καθορίζεται από τον παρονομαστή, έτσι $f(x) < 0$, εάν $0 < x < 1$, και $f(x) > 0$, εάν $x > 1$, ενώ $f(0) = 0$. Ισχυριζόμαστε ότι $R(f) = \mathbb{R}$, δηλαδή αν r είναι ένας τυχαίος πραγματικός αριθμός τότε $r \in R(f)$, ισοδύναμα υπάρχει $x \in D(f)$ τέτοιο ώστε $r = f(x)$, δηλαδή η εξίσωση

$$\frac{\sqrt{x}}{x-1} = r$$

έχει λύση στο $[0, 1) \cup (1, \infty)$. Εάν $r = 0$ τότε για $x = 0$ η εξίσωση ικανοποιείται. Άρα αρκεί να υποθέσουμε ότι $r \neq 0$. Υψώνοντας στο τετράγωνο και κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$x^2 - \left(2 + \frac{1}{r^2}\right)x + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\Delta = (1+4r^2)/r^4$ είναι θετική, άρα υπάρχουν ρίζες $x_1 \neq x_2$ με $x_1 + x_2 = 2 + 1/r^2$ και $x_1 x_2 = 1$. Οπότε οι ρίζες x_1 και x_2 είναι θετικές και διάφορες του 1 (γιατί;). Συγκεκριμένα

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{4r^2+1}+1}{2r^2}, \qquad x_2 = 1 - \frac{\sqrt{4r^2+1}-1}{2r^2}.$$

Παρατηρούμε ότι $x_1 > 1$ και $0 < x_2 < 1$, έτσι η λύση της εξίσωσης $\sqrt{x}/(x-1) = r$ είναι η x_1 εάν $r > 0$, ή x_2 εάν $r < 0$. Επιπλέον συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι ένα προς ένα (γιατί;).

Παράδειγμα 1.2. Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $f(x) = x^2 + 1$, και $g(x) = 3x$. Να βρεθούν οι $g \circ f$ και $f \circ g$ εάν αυτές υπάρχουν.

Έχουμε $D(f) = \mathbb{R}$, $R(f) = [1, \infty)$, $D(g) = \mathbb{R}$, $R(g) = \mathbb{R}$. Έτσι $R(f) \subset D(g)$ οπότε η $g \circ f$ ορίζεται

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1).$$

Όμοια, επειδή $R(g) \subset D(f)$ η $f \circ g$ επίσης ορίζεται και

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = (3x)^2 + 1.$$

Παράδειγμα 1.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Τότε $D(f) = \mathbb{R}$ και επειδή $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι $R(f) = [1, +\infty)$.

Η f δεν είναι ένα προς ένα, αλλά για κάθε $S \subseteq R(f)$ η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(S)$ ορίζεται. Για παράδειγμα έχουμε

$$f^{-1}(f([0,1])) = f^{-1}([1,2]) = \{x : 1 \leq f(x) \leq 2\} = \{x : 1 \leq x^2 + 1 \leq 2\} = \{x : 0 \leq x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$$
$$f(f^{-1}([0,2])) = f(\{x : 0 \leq f(x) \leq 2\}) = f(\{x : 0 \leq x^2 + 1 \leq 2\}) = f(\{x : -1 \leq x^2 \leq 1\}) = f([-1,1]) = [1,2].$$

Ορισμός 1.2. Μια πραγματική συνάρτηση f λέγεται

(1) **Άνω φραγμένη** (bounded above) αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M ώστε $f(x) \leq M$ για κάθε $x \in D(f)$.

(2) **Κάτω φραγμένη** (bounded below) αν υπάρχει πραγματικός αριθμός m ώστε $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in D(f)$.

(3) **Φραγμένη** (bounded) αν είναι άνω και κάτω φραγμένη, υπάρχουν δηλαδή πραγματικοί αριθμοί M και m ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in D(f)$.

Άσκηση 1.1. Δείξτε ότι μια πραγματική συνάρτηση f είναι φραγμένη αν και μόνο αν υπάρχει θετικός αριθμός M ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in D(f)$.

Ορισμός 1.3 (Μονοτονία). Μια πραγματική συνάρτηση f η οποία διατηρεί ή αντιστρέφει τη διάταξη των πραγματικών αριθμών λέγεται **μονότονη**. Ειδικότερα η f λέγεται

(1) **Αύξουσα** (increasing) αν $f(s) \leq f(t)$, οποτεδήποτε $s < t$, και αυστηρά ή γνησίως αύξουσα (strictly increasing) αν $f(s) < f(t)$.

(2) **Φθίνουσα** (decreasing) αν $f(s) \leq f(t)$, οποτεδήποτε $s > t$ και αυστηρά ή γνησίως φθίνουσα (strictly dencreasing)αν $f(s) > f(t)$.

Ορισμός 1.4. Μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ΄ ένα κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ λέγεται

(1) **Άρτια** (even) αν $f(-x) = f(x)$.

(2) **Περιττή** (odd) αν $f(-x) = -f(x)$.

Παράδειγμα 1.4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3$ είναι ένα-προς-ένα και βρήτε την αντίστροφή της.

Το πεδίο ορισμού της f είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Έστω $x_1 < x_2$, τότε

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3 &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0 && \text{αν} \quad x_1x_2 > 0 \\ &= (x_2 - x_1)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] > 0 && \text{αν} \quad x_1x_2 < 0 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1^2) > 0 && \text{αν} \quad x_1x_2 = 0, \end{aligned}$$

έτσι σε όλες τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) < f(x_2)$, κατά συνέπεια η $f(x) = x^3$ είναι αυστηρά αύξουσα, άρα ένα-προς-ένα, επομένως υπάρχει η αντίστροφη. Για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$x^3 = y \in \mathbb{R} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y}$$

άρα $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$f(-x) = (-x)^3 = (-x)(-x)^2 = -x^3 = -f(x)$$

άρα η f είναι περιττή συνάρτηση. Επίσης

$$y = \sqrt[3]{-x} \Rightarrow y^3 = -x \Rightarrow -y^3 = x \Rightarrow (-y)^3 = x \Rightarrow -y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow y = -\sqrt[3]{x},$$

ισοδύναμα $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$, δηλαδή και η f^{-1} είναι περιττή.

Παράδειγμα 1.5. Η συνάρτηση $f : [0,\infty) \to [-1,\infty)$ με $f(x) = \sqrt{x} - 1$ είναι ένα-προς-ένα και επί. Άρα υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : [-1,\infty) \to [0,\infty)$. Εάν y είναι η εικόνα του x μέσω της f τότε $y = \sqrt{x} - 1$, οπότε $\sqrt{x} = y + 1$ ή $x = (y+1)^2$. Έτσι το $(y+1)^2$ είναι η εικόνα του y μέσω της f^{-1}, συνεπώς $f^{-1}(x) = (x+1)^2$. Αν και η ποσότητα $(x+1)^2$ ορίζεται για καθε $x \in \mathbb{R}$ το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $[-1,\infty)$. Παρατηρούμε επίσης

$$x \in [0,\infty) \quad (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x} - 1 + 1)^2 = x$$
$$x \in [-1,\infty) \quad (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f((x+1)^2) = \sqrt{(x+1)^2} - 1 = (x+1) - 1 = x.$$

Σημειώνουμε ότι στη δεύτερη σχέση $x + 1 \geq 0$, άρα $\sqrt{(x+1)^2} = |x+1| = x+1$.

Ορισμός 1.5 (Πράξεις συναρτήσεων). Εάν f και g είναι πραγματικές συναρτήσεις, για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$, ορίζουμε το **άθροισμα** $f+g$, τη **διαφορά** $f-g$, το **γινόμενο** $f \cdot g$, και το **πηλίκο** f/g, των f και g, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

(1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

(3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, για $g(x) \neq 0$.

Οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων όπως και η σύνθεση επιτρέπουν τη δημιουργία νέων συναρτήσεων από τις σχετικά απλές υπάρχουσες συναρτήσεις. Επιπλέον οι αντίστροφες συναρτήσεις, γνωστών συναρτήσεων, εφόσον αυτές υπάρχουν, εμπλουτίζουν τη συλλογή των πραγματικών συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν και εμφανίζονται στις διάφορες εφαρμογές.

1.2.1 Το γράφημα της αντίστροφης συνάρτησης

Ένα απλό γεωμετρικό αποτέλεσμα επιτρέπει να παίρνουμε πληροφορία για μια συνάρτηση αν γνωρίζουμε την αντίστροφή της. Θυμίζουμε ότι αν η f είναι ένα προς ένα, τότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ορίζεται με τη σχέση

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Έτσι αν $G(f)$ είναι το γράφημα της f και $G(f^{-1})$ είναι το γράφημα της f^{-1} τότε

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in D(f)\} \qquad \text{και} \qquad G(f^{-1}) = \{(f(x), x) : x \in D(f)\}$$

όπου $D(f)$ είναι το πεδίο ορισμού της f. Επειδή τα σημεία (a,b) και (b,a) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ (γιατί;) έπεται ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικά ως προς την $y = x$.

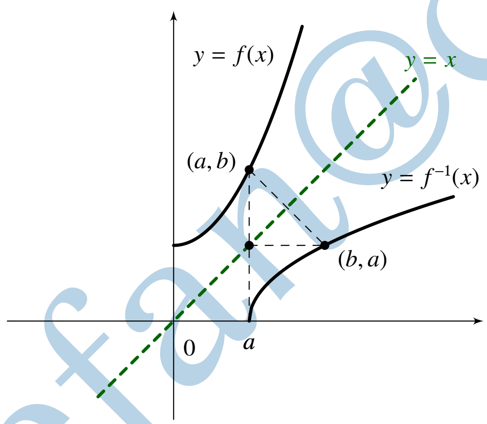
Θεώρημα 1.1. *Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι ένα προς ένα και έστω f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της f, τότε*

(1) *Το γράφημα $G(f^{-1})$ της f^{-1} είναι συμμετρικό του γραφήματος $G(f)$ της f ως προς την ευθεία $y = x$.*

(2) *Αν η f είναι αύξουσα, ή γνησίως αύξουσα, ή φθίνουσα, ή γνησίως φθίνουσα, τότε και η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία, είναι δηλαδή, αντίστοιχα, αύξουσα, ή γνησίως αύξουσα, ή φθίνουσα, ή γνησίως φθίνουσα.*

(3) *Αν η f είναι περιττή, τότε και η f^{-1} είναι περιττή.*

(4) $(f^{-1})^{-1} = f$.



Σχήμα 1.1: Οι συναρτήσεις $y = f(x)$ και $y = f^{-1}(x)$

Απόδειξη. Η απόδειξη της (1) είναι συνέπεια του αποτελέσματος ότι τα σημεία (a, b) και (b, a) είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$, γεγονός που αποδεικνύεται παίρνοντας κατάλληλα τρίγωνα. Οι (2), (3) και (4) είναι συνέπειες του ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. Η πλήρης απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. □

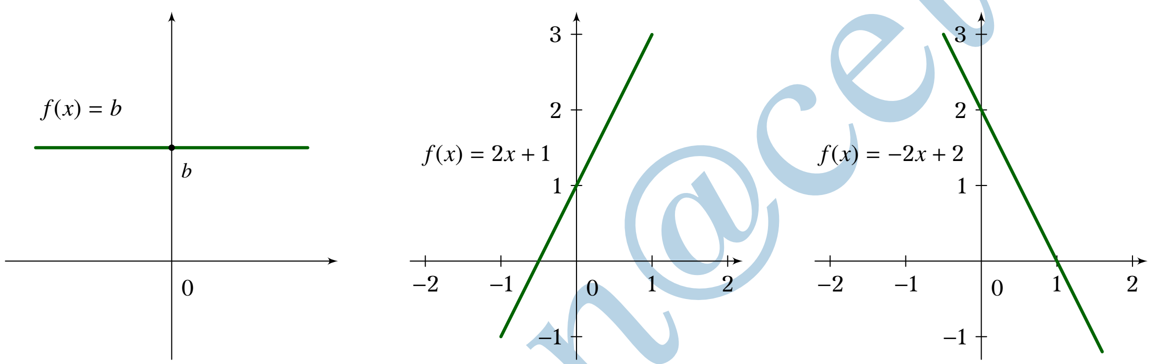
1.3 Βασικές συναρτήσεις

Λέγοντας βασικές συναρτήσεις εννοούμε εκείνες οι οποίες αποτελούν τα βασικά δομικά στοιχεία από τα οποία αποτελούνται οι συναρτήσεις που συναντάμε συνήθως. Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ είναι άθροισμα συναρτήσεων της μορφής ax^n με $n \in \mathbb{N}$, ενώ η $g(x) = (x^2 + 1)/(x^3 - 2)$ είναι πηλίκο συναρτήσεων καθεμιά από τις οποίες είναι μορφής ανάλογης της f.

1.3.1 Γραμμικές συναρτήσεις

Αυτές είναι της μορφής $f(x) = ax + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Μια τέτοια συνάρτηση ορίζεται σ΄ ολόκληρο και $\mathbb{R}$ και είναι ένα-προς-ένα, αν $a \neq 0$, αύξουσα αν $a > 0$ και φθίνουσα αν $a < 0$. Το γράφημα κάθε γραμμικής συνάρτησης είναι ευθεία, κατά συνέπεια για τον προσδιορισμό της γραφικής παράστασης κάθε τέτοιας συνάρτησης αρκεί να βρεθούν δύο σημεία. Για παράδειγμα για την ευθεία $f(x) = ax+b$ έχουμε $f(0) = b$, άρα ένα σημείο της ευθείας είναι το $(0, b)$, ενώ για $x = -b/a$, εφόσον $a \neq 0$, είναι $f(-b/a) = 0$, έτσι ένα άλλο σημείο είναι το $(-b/a, 0)$.

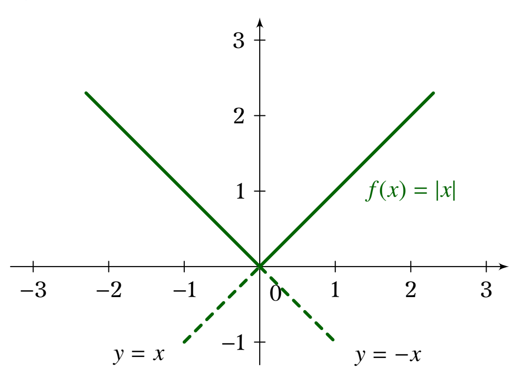
Παράδειγμα 1.6. Στο Σχήμα 1.2 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = b$, με $b > 0$, $f(x) = 2x + 1$ και $f(x) = -2x + 2$.



Σχήμα 1.2: Χαρακτηριστικές γραμμικές συναρτήσεις

Παράδειγμα 1.7. Να βρεθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = |x|$.

Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού έχουμε ότι $f(x) = x$ αν $x \geq 0$, και $f(x) = -x$ αν $x \leq 0$. Κατά συνέπεια η ζητούμενη γραφική παράσταση συμφωνεί με αυτή της $y = x$ στο πρώτο τεταρτημόριο, και με την γραφική παράσταση της $y = -x$ στο δεύτερο τεταρτημόριο.



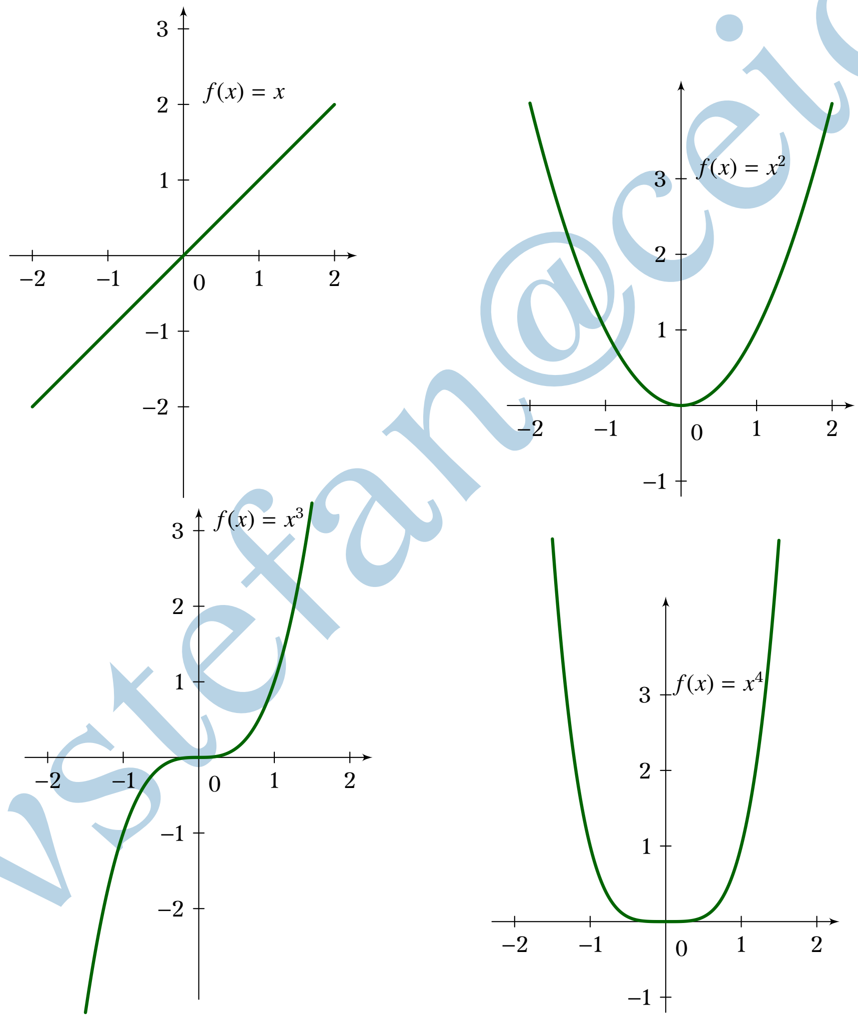
Σχήμα 1.3: Η συνάρτηση $f(x) = |x|$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση δεν είναι γραμμική αφού δεν είναι της μορφής $ax+b$. Σημειώνουμε επίσης ότι είναι άρτια αφού $|-x| = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επίσης είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

1.3.2 Δυνάμεις

Αυτές είναι οι $f(x) = x^p$, με $p \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(i) $p = n \in \mathbb{N}$.



Σχήμα 1.4: Οι συναρτήσεις $f(x) = x^n$, για $n = 1, 2, 3, 4$

Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^n$ είναι η πραγματική ευθεία και η f είναι άρτια αν ο n είναι άρτιος και περιττή αν ο n είναι περιττός. Αν $n = 1$ η συνάρτηση είναι γραμμική. Επίσης αν ο

n είναι περιττός, η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι έστω $x_1 < x_2$ και έστω $n = 2k - 1$ με $k \in \mathbb{N}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις

(1) $x_1 x_2 > 0$. Τότε θα είναι $x_1 < x_2 < 0$, ή $0 < x_1 < x_2$, οπότε αντίστοιχα θα έχουμε

$$0 < \frac{x_2}{x_1} < 1 \Rightarrow 0 < \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{2k-1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x_2^{2k-1}}{x_1^{2k-1}} < 1 \qquad \text{ή}$$
$$0 < \frac{x_1}{x_2} < 1 \Rightarrow 0 < \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{2k-1} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{x_1^{2k-1}}{x_2^{2k-1}} < 1$$

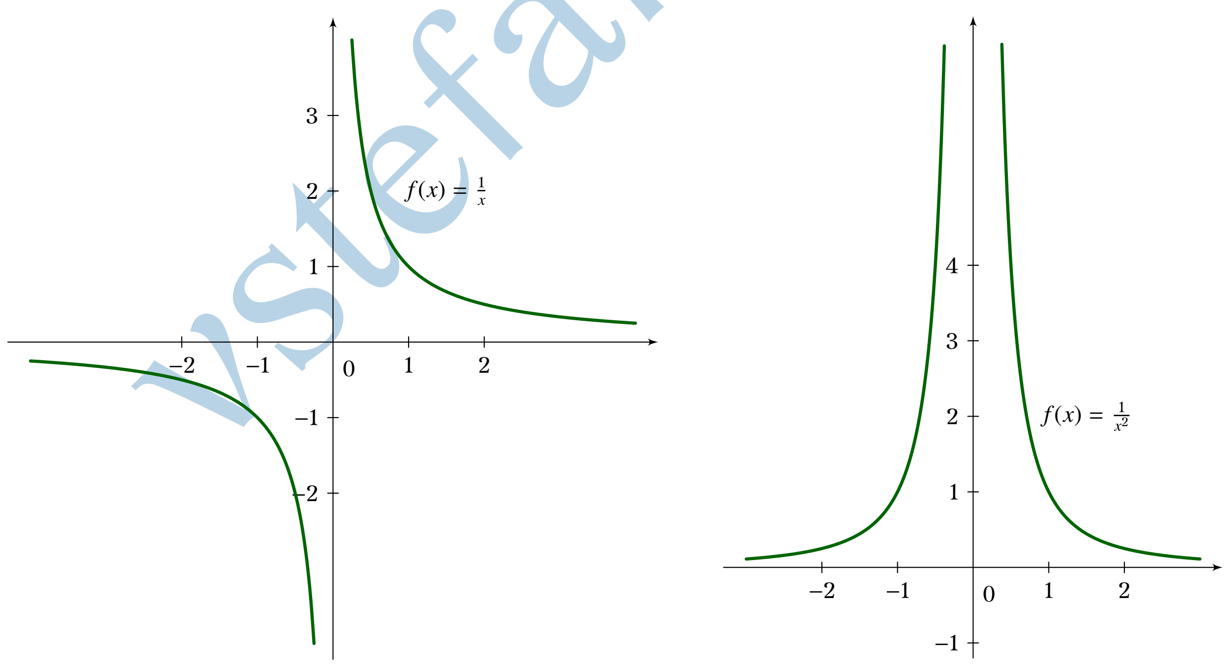
και, στη περίπτωση αυτή, το ζητούμενο έπεται πολλαπλασιάζοντας αντίστοιχα τη μεν πρώτη ανισότητα με x_1^{2k-1} (< 0) και την δεύτερη με x_2^{2k-1} (> 0).

(2) $x_1 x_2 \leq 0$. Τότε θα είναι $x_1 \leq 0 < x_2$, ή $x_1 < 0 \leq x_2$, και επειδή η ύψωση σε περιττή δύναμη διατηρεί το πρόσημο έπεται το ζητούμενο.

Στο Σχήμα 1.4 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ και $y = x^4$.

(ii) $p = -n$, με $n \in \mathbb{N}$.

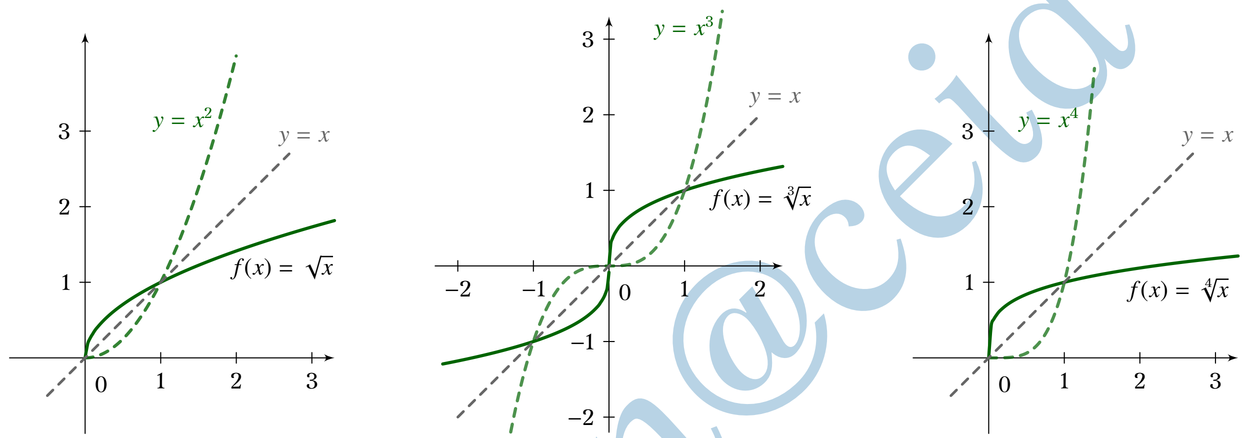
Το πεδίο ορισμού της $f(x) = x^{-n}$ είναι το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ και η f είναι άρτια αν ο n είναι άρτιος και περιττή αν ο n είναι περιττός.



Σχήμα 1.5: Οι συναρτήσεις $f(x) = 1/x$ και $f(x) = 1/x^2$

(iii) $p = 1/n$, με $n \in \mathbb{N}$.

Αν $y = g(x) = x^n$, τότε η $f(x) = x^{1/n}$ είναι η αντίστροφη της $g(x)$ εκεί που η g είναι ένα-προς-ένα και η $f(x) = x^{1/n}$ ορίζεται. Έτσι η συμπεριφορά της $x^{1/n}$ καθορίζεται από αυτή της x^n. Βλέπε Παράδειγμα 1.4. Στο Σχήμα 1.6 δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και $f(x) = \sqrt[4]{x}$ ως αντίστροφες, αντίστοιχα, των $y = x^2$, με $x \geq 0$, $y = x^3$ και $y = x^4$, με $x \geq 0$.



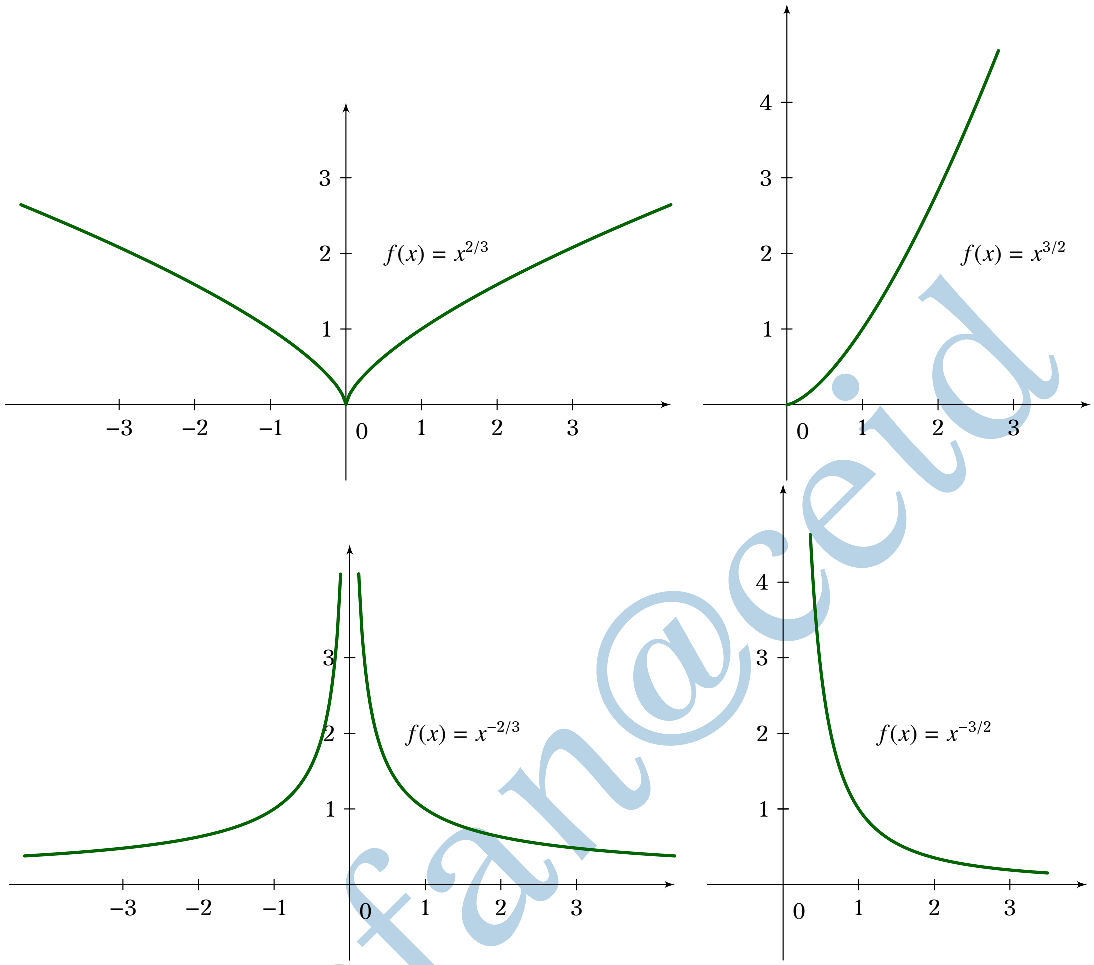
Σχήμα 1.6: Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και $f(x) = \sqrt[4]{x}$

(iv) $p = m/n$, με $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$.

Αν $f(x) = x^{m/n}$ με $n \in \mathbb{N}$ και $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε $x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, οπότε $f = g \circ h$, όπου $h(x) = x^{1/n}$ και $g(x) = x^m$. Έτσι

$$\begin{aligned}
D(f) &= (-\infty, +\infty), && \text{αν } m > 0 \text{ και } n \text{ περιττός} \\
D(f) &= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), && \text{αν } m < 0 \text{ και } n \text{ περιττός} \\
D(f) &= [0, +\infty), && \text{αν } m > 0 \text{ και } n \text{ άρτιος} \\
D(f) &= (0, +\infty), && \text{αν } m < 0 \text{ και } n \text{ άρτιος.}
\end{aligned}$$

Στο Σχήμα 1.7 βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = x^{2/3}$, $y = x^{3/2}$, $y = x^{-2/3}$ και $y = x^{-3/2}$. Παρατηρούμε ότι η $x^{3/2}$ είναι η αντίστροφη του περιορισμού της $x^{2/3}$ στο $x \geq 0$, εκεί δηλαδή που η $x^{2/3}$ είναι ένα-προς-ένα και η $x^{3/2}$ ορίζεται. Η ανάλογη παρατήρηση ισχύει και για το ζευγάρι $x^{-2/3}$, $x^{-3/2}$.



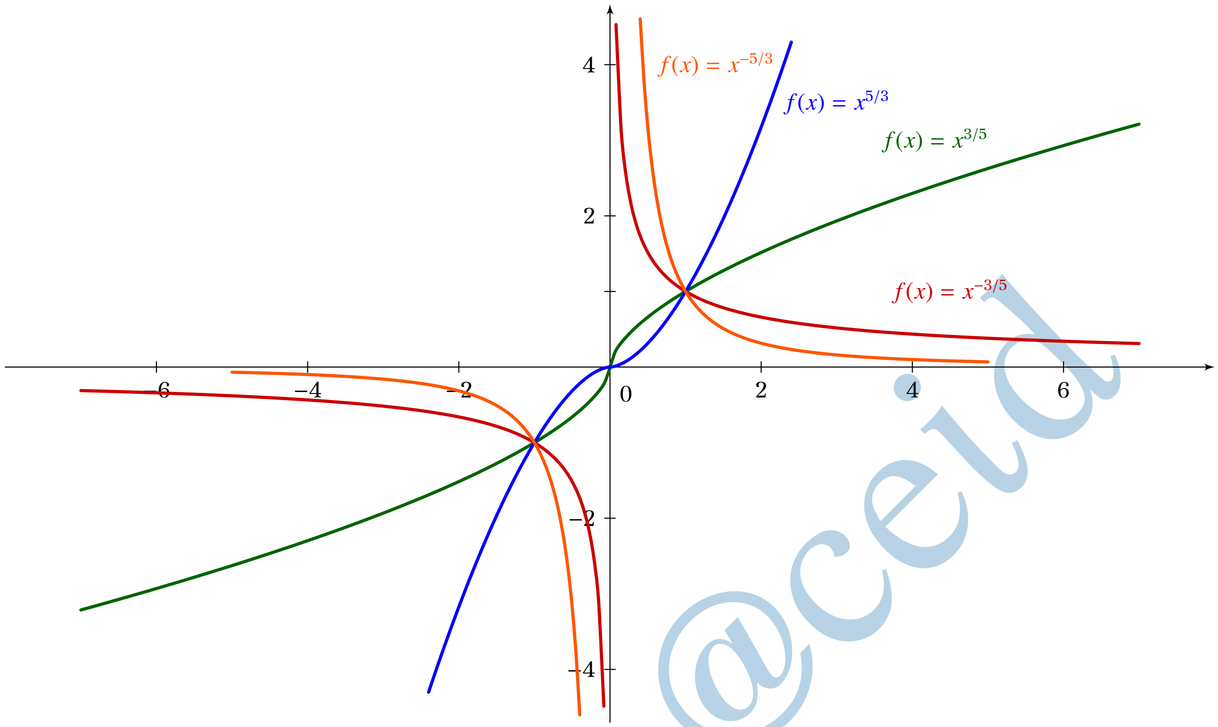
Σχήμα 1.7: Οι συναρτήσεις $f(x) = x^{2/3}$, $f(x) = x^{3/2}$, $f(x) = x^{-2/3}$ και $f(x) = x^{-3/2}$

(v) $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Εδώ χρειάζεται να ορίσουμε τις μη ρητές δυνάμεις. Για παράδειγμα τι σημαίνει $3^{\sqrt{2}}$ και για ποιά x έχει έννοια η έκφραση $x^{\sqrt{2}}$; Επειδή ο $\sqrt{2}$ είναι όριο ακολουθίας ρητών αριθμών, έστω (r_n) και ο 3^{r_n} ορίζεται για κάθε n φαίνεται λογικό να ορίσουμε

$$3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{r_n}$$

αρκεί το όριο στο δεξί μέλος να υπάρχει, αφενός, και αφετέρου να είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας (r_n), αφού υπάρχουν περισσότερες της μιας ακολουθίες ρητών αριθμών οι οποίες συγκλίνουν στο $\sqrt{2}$. Θα δείξουμε ότι αυτό όντως ισχύει. Σε σχέση με το δεύτερο ερώτημα για να έχει έννοια το $x^{\sqrt{2}}$, θα πρέπει το x^r να ορίζεται για κάθε ρητό αριθμό r, κατά συνέπεια θα πρέπει να είναι $x \geq 0$, βλέπε (iv).



Σχήμα 1.8: Οι συναρτήσεις $f(x) = x^{3/5}$, $f(x) = x^{5/3}$, $f(x) = x^{-3/5}$ και $f(x) = x^{-5/3}$

Πρόταση 1.1. *Αν $a > 0$ και (r_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών με $r_n \to 0$, τότε $a^{r_n} \to 1$.*

Απόδειξη. Αν $a = 1$ το συμπέρασμα ισχύει. Έστω $a > 1$. Αν $r < s$ είναι ρητοί αριθμοί τότε

$$\frac{a^s}{a^r} = a^{s-r} > 1 \Rightarrow a^s > a^r$$

κατά συνέπεια η a^q είναι αύξουσα συνάρτηση στους ρητούς. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $\sqrt[n]{a} \to 1$ και $1/\sqrt[n]{a} \to 1$, καθώς $n \to \infty$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$1 - \epsilon < \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < \sqrt[k]{a} < 1 + \epsilon.$$

Επειδή $r_n \to 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$-\frac{1}{k} < r_n < \frac{1}{k}$$

για κάθε $n \geq N$, έτσι από τη μονοτονία της a^q για $q \in \mathbb{Q}$ έπεται ότι

$$1 - \epsilon < a^{-1/k} < a^{r_n} < a^{1/k} < 1 + \epsilon$$

για κάθε $n \geq N$, ισοδύναμα $|a^{r_n} - 1| < \epsilon$, για κάθε $n \geq N$ που είναι το συμπέρασμα για $a > 1$. Αν $0 < a < 1$ εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στο $1/a > 1$, έτσι από τις ιδιότητες των ρητών δυνάμεων παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} = \frac{1}{a^{r_n}} \to 1$$

απ΄ όπου έπεται ότι το όριο του παρονομαστή υπάρχει και είναι ίσο με 1. □

Λήμμα 1.1. *Έστω $a > 0$ και έστω $p \in \mathbb{R}$. Αν (r_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία ρητών αριθμών και (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} p_n = p,$$

τότε τα όρια των ακολουθιών (a^{r_n}) και (a^{p_n}) υπάρχουν και είναι ίσα.

Απόδειξη. Έστω $d_n = p_n - r_n$, τότε $d_n \in \mathbb{Q}$ και $d_n \to 0$, κατά συνέπεια από την Πρόταση 1.1 έπεται ότι

$$\frac{a^{p_n}}{a^{r_n}} = a^{d_n} \to 1.$$

Αν $q \in \mathbb{Q}$ και $q > p$, τότε από τη μονοτονία είναι $a^{r_n} \leq a^{r_{n+1}} < a^q$ για κάθε n, επομένως η ακολουθία (a^{r_n}) είναι αύξουσα και φραγμένη άρα συγκλίνει. Επειδή

$$a^{p_n} = a^{r_n}\frac{a^{p_n}}{a^{r_n}}$$

και οι δύο ακολουθίες στο δεξί μέλος συγκλίνουν έπεται ότι και η ακολουθία στο αριστερό μέλος συγκλίνει και

$$\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} \frac{a^{p_n}}{a^{r_n}} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}\, 1 = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε. □

Θεώρημα 1.2. *Έστω $a > 0$ και έστω $p \in \mathbb{R}$. Αν (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p,$$

τότε η ακολουθία (a^{p_n}) συγκλίνει και το όριό της είναι ανεξάρτητο της (p_n).

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε έναν ρητό αριθμό r_n ώστε

$$p - \frac{1}{n} < r_n < p - \frac{1}{n+1}.$$

Η ακολουθία (r_n) που προκύπτει είναι αύξουσα και συγκλίνει στο p. Από το Λήμμα 1.1 έπεται ότι το όριο της (a^{p_n}) υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} a^{p_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n},$$

κατά συνέπεια το όριο αυτό είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας (p_n). □

Ορισμός 1.6. Αν $a > 0$ και $p \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a^p = \lim_{n\to\infty} a^{p_n}$$

όπου (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών με $p_n \to p$.

Πρόταση 1.2. *Αν $a > 0$ και $b > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και x και y είναι πραγματικοί αριθμοί τότε*

(1) $a^{x+y} = a^x a^y$ (2) $(a^x)^y = a^{xy}$ (3) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ (4) $(ab)^x = a^x b^y$

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. □

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = x^p$ με $p \notin \mathbb{Q}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} D(f) &= [0, +\infty), &&\text{αν } p > 0\\ D(f) &= (0, +\infty), &&\text{αν } p < 0. \end{aligned}$$

Άσκηση 1.2. Δείξτε ότι η $f(x) = x^p$ με $p \in \mathbb{R}$ είναι αύξουσα αν $p > 0$ και φθίνουσα αν $p < 0$.

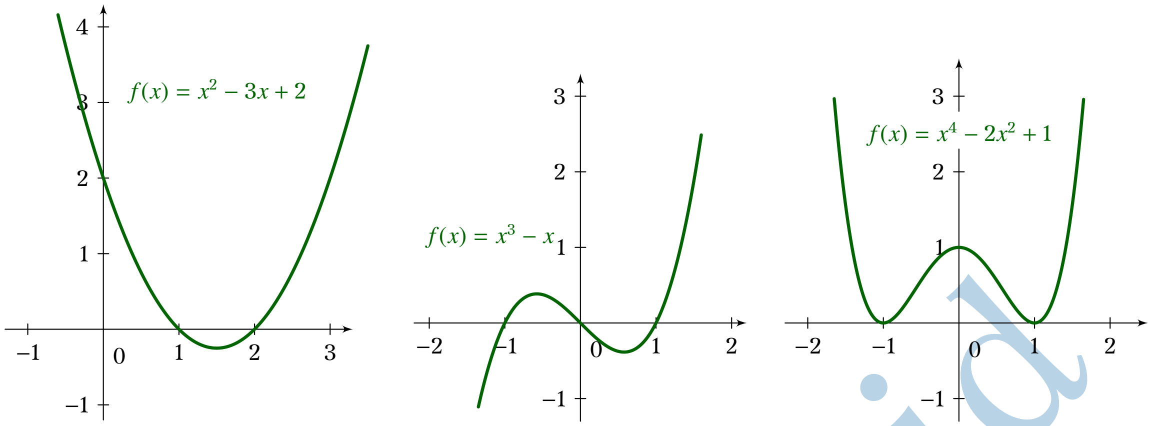
1.3.3 Πολυωνυμικές συναρτήσεις

Αυτές είναι οι $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, με $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Για $n = 1$ η πολυωνυμική συνάρτηση είναι γραμμική. Το πεδίο ορισμού μιας πολυωνυμικής συνάρτησης είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Οι πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου είναι τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x-άξονα.

Στο Σχήμα 1.9 δίνουμε τρία παραδείγματα πολυωνυμικών συναρτήσεων. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)\\ f(x) &= x^3 - x = x(x+1)(x-1)\\ f(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x+1)^2(x-1)^2 \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.1. Η γραφική παράσταση της $y = x^2$ είναι το τυπικό δείγμα του σχήματος που λέγεται **παραβολή**. Για $a \neq 0$ η $y = ax^2$ είναι επίσης παραβολή, η οποία εκτείνεται στο άνω ημιεπίπεδο $\{(x,y) : y \geq 0\}$ αν $a > 0$ και στο κάτω ημιεπίπεδο $\{(x,y) : y \leq 0\}$ αν $a > 0$. Όμοια η $y = ax^2 + b$ είναι παραβολή με γραφική παράσταση ίδια με αυτήν της $y = ax^2$ αλλά παράλληλα μετατοπισμένη στον y-άξονα κατά b, δηλαδή το σημείο $(0,0)$ μετατοπίζεται στο $(0,b)$. Όμοια η $y = a(x-c)^2 + b$ είναι η παραβολή $y = ax^2$ παράλληλα μετατοπισμένη ώστε το σημείο $(0,0)$ να



Σχήμα 1.9: Χαρακτηριστικές πολυωνυμικές συναρτήσεις

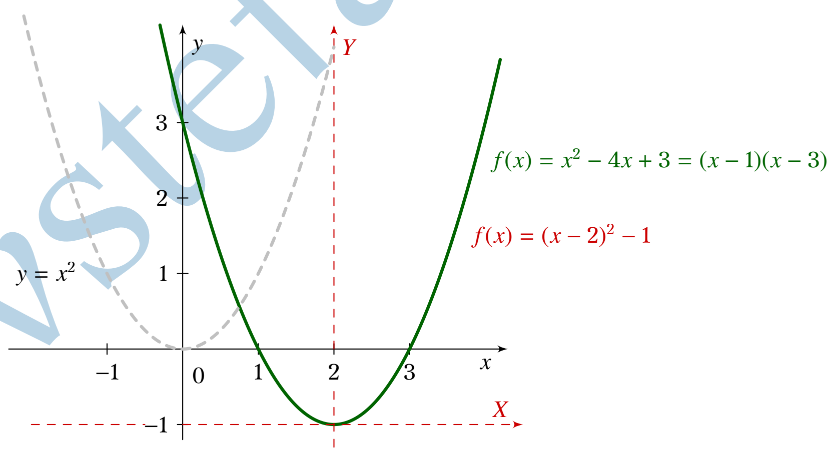
μεταφέρεται στο (c, b). Ισοδύναμα η $y = a(x-c)^2 + b$ είναι η παραβολή $Y = aX^2$ στο ορθογώνιο σύστημα αξόνων $X = c$ και $Y = b$. Έτσι η $f(x) = x^2 - 4x + 3$, αφού

$$y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

γράφεται

$$y + 1 = (x-2)^2$$

είναι δηλαδή η τυπική παραβολή $Y = X^2$, με $Y = y+1$ και $X = x-2$. Έτσι το $(0,0)$ στους X, Y-άξονες είναι το $(2, -1)$ στους x, y-άξονες, βλέπε Σχήμα 1.10

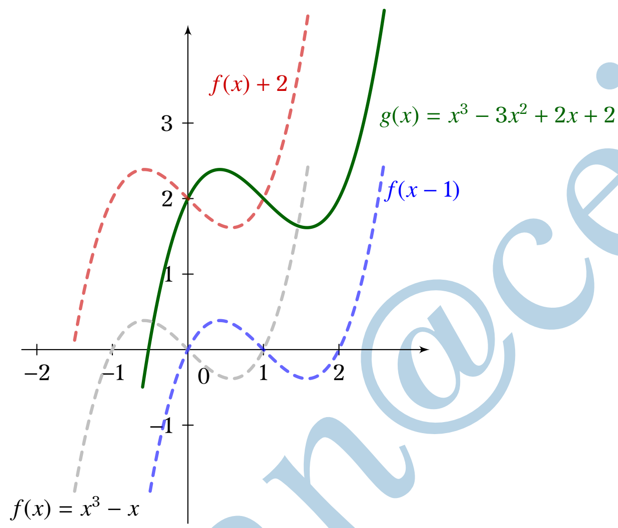


Σχήμα 1.10: Η παραβολή $y = x^2 - 4x + 3$

Παρατήρηση 1.2. Γενικεύοντας την Παρατήρηση 1.1 έχουμε ότι αν $y = f(x)$, η πράξη $y = f(x-c)$ αντιστοιχεί στη μεταφορά της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά c μονάδες προς τα δεξιά αν

$c > 0$ ή προς τα αριστερά αν $c < 0$. Η πράξη $y = f(x) + b$ αντιστοιχεί στη μεταφορά της γραφικής παράστασης της $f(x)$ κατά b μονάδες προς τα πάνω αν $b > 0$ ή προς τα κάτω αν $b < 0$. Η δε $y = f(x - c) + b$ είναι συνδυασμός μεταφοράς κατά μήκος του x-άξονα και του y-άξονα. Για παράδειγμα η γραφική παράσταση της $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ προκύπτει εύκολα από αυτήν της $f(x) = x^3 - x$, βλέπε Σχήμα 1.11, αφού

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = (x-1)^3 - (x-1) + 2 = f(x-1) + 2.$$



Σχήμα 1.11: Η $g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$ ως μεταφορά της $f(x) = x^3 - x$

1.3.4 Ρητές συναρτήσεις

Αυτές είναι οι $f(x) = p(x)/q(x)$ όπου οι p και q είναι πολυώνυμα. Το πεδίο ορισμού μιας ρητής συνάρτησης είναι το $\mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$. Η χαρακτηριστική ιδιότητα των ρητών συναρτήσεων είναι ότι έχουν κατακόρυφες, και όχι μόνο, ασύμπτωτες ευθείες.

Παράδειγμα 1.8. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

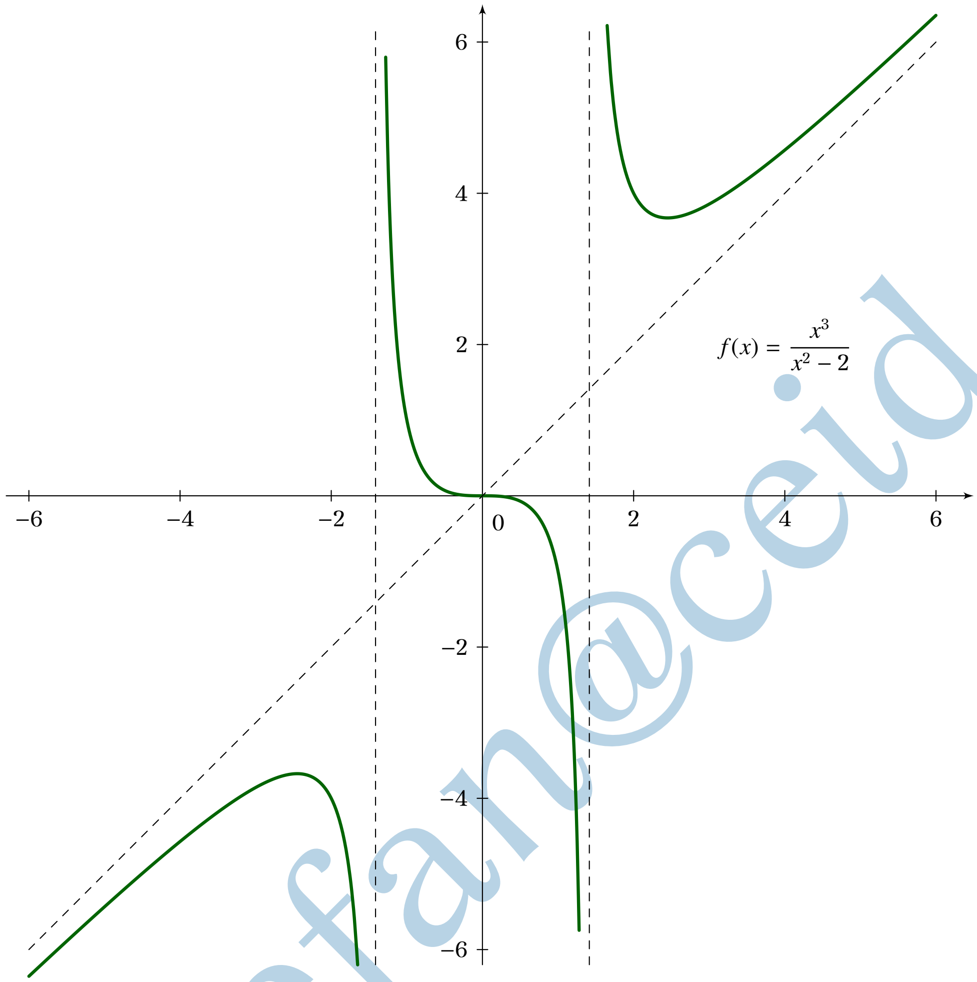
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

Η συνάρτηση ορίζεται για x στο σύνολο

$$D(f) = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

Καθώς το x προσεγγίζει το $\pm\sqrt{2}$ οι αντίστοιχες τιμές της f, κατ΄ απόλυτη τιμή, αυξάνονται απεριόριστα. Γράφοντας

$$x^3 = x(x^2 - 2 + 2) = x(x^2 - 2) + 2x$$



Σχήμα 1.12: Η συνάρτηση $f(x) = x^3/(x^2-2)$

η συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = x + \frac{2x}{x^2-2} = x + \frac{2}{x - 2/x}, \qquad x \neq 0.$$

Έτσι για $|x|$ μεγάλο είναι $f(x) \approx x$ αφού το κλάσμα στην νέα έκφραση της f μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό (γιατί;). Παρατηρούμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, και το πρόσημο της f καθορίζεται από τον τρόπο γραφής

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 1.12.

Άσκηση 1.3. Για την συνάρτηση f του Παραδείγματος 1.8 δείξτε ότι

(α΄) Για κάθε $M > 0$ (μεγάλο) υπάρχει $\epsilon > 0$ (μικρό) ώστε $f(x) > M$ για κάθε $x \in (\sqrt{2}, \sqrt{2}+\epsilon)$.

(β΄) Για κάθε $N > 0$ (μεγάλο) υπάρχει $\delta > 0$ (μικρό) ώστε

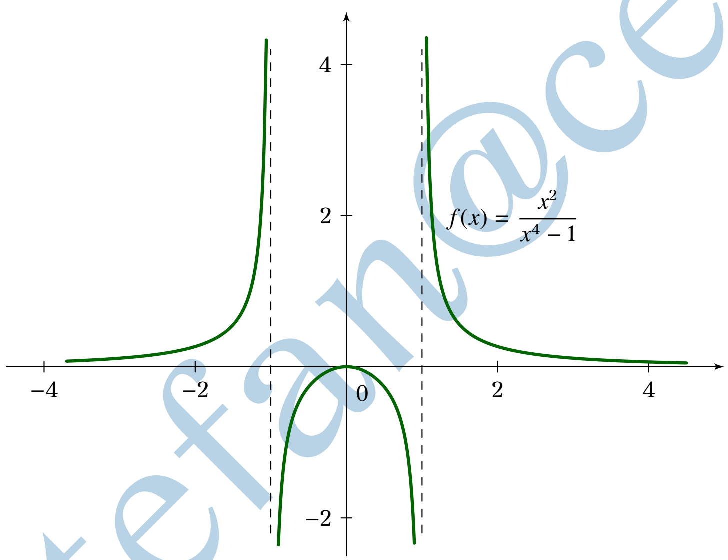
$$0 < \frac{2}{x - 2/x} < \delta,$$

για κάθε $x > N$.

Παράδειγμα 1.9. Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 1}.$$

Η συνάρτηση ορίζεται για $x \neq \pm 1$. Καθώς το x προσεγγίζει κάθε μια από τις τιμές ± 1, οι αντίστοιχες



Σχήμα 1.13: Η συνάρτηση $f(x) = x^2/(x^4 - 1)$

τιμές $f(x)$, κατ΄ απόλυτη τιμή, αυξάνονται απεριόριστα. Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως

$$f(x) = \frac{x^2 - 1 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^4 - 1}$$

απ΄ όπου παρατηρούμε ότι η $f(x)$ προσεγγίζει το μηδέν καθώς το $|x|$ αυξάνει, αφού το κάθε κλάσμα για μεγάλα $|x|$ γίνεται αυθαίρετα μικρό. Η f μηδενίζεται μόνο στο $x = 0$ και αφού

$$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$$

είναι $f(x) > 0$ αν $|x| > 1$ και $f(x) < 0$ αν $|x| < 1$. Η γραφική παράσταση της δίνεται στο Σχήμα 1.13.

1.3.5 • Αλγεβρικές συναρτήσεις

Αυτές είναι λύσεις εξισώσεων της μορφής

$$p_n(x)y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + p_1(x)y + p_0(x) = 0,$$

όπου $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1, p_0$ είναι πολυώνυμα. Οι ρητές συναρτήσεις είναι αλγεβρικές αφού είναι λύσεις εξισώσεων της μορφής $q(x)y - p(x) = 0$ όπου p και q είναι πολυώνυμα. Έτσι οι

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{1+\sqrt{x}} \qquad f(x) = x + 3\sqrt{x^2+2x+2}$$

είναι αλγεβρικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα η τελευταία είναι λύση της εξίσωσης $y^2 - 2xy - 8x^2 - 18x - 18 = 0$.

1.3.6 • Υπερβατικές συναρτήσεις

Αυτές είναι οι συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι αλγεβρικές. Υπερβατικές (transcendental) συναρτήσεις είναι οι τριγωνομετρικές οι αντίστροφες τριγωνομετρικές, οι εκθετικές $f(x) = a^x$, όπου a είναι θετικός πραγματικός αριθμός, οι λογάριθμοι $f(x) = \log_a x$, όπου a είναι πάλι θετικός πραγματικός αριθμός, οι υπερβολικές και πολλές άλλες συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα οι $f(x) = x^p$, με p άρρητο, $f(x) = x^x$, $f(x) = x^{1/x}$, ή οι ειδικές συναρτήσεις. Για τον αυστηρό ορισμό αυτών των συναρτήσεων απαιτείται γνώση από τη θεωρία η οποία δεν έχει ακόμα παρουσιαστεί.

1.3.7 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις τις ορίσαμε με γεωμετρικό τρόπο. Είπαμε ότι αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός και αν ξεκινώντας από το σημείο $(1, 0)$ του τριγωνομετρικού κύκλου διαγράψουμε τόξο μήκους $|x|$ κατά την θετική κατεύθυνση αν $x > 0$ και κατά την αρνητική αν $x < 0$ και εάν P είναι το πέρας αυτού του τόξου, τότε $\cos x$ = "προβολή του P στον οριζόντιο άξονα" και $\sin x$ = "προβολή του P στον κατακόρυφο άξονα". Έτσι αμεσες συνέπειες του ορισμού είναι ότι

$$\begin{aligned} -1 \le \cos x \le 1, &\qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x, \qquad k \in \mathbb{Z} \\ -1 \le \sin x \le 1, &\qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \qquad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οι συναρτήσεις $\cos x$ και $\sin x$ είναι τυπικά παραδείγματα **περιοδικών** συναρτήσεων.

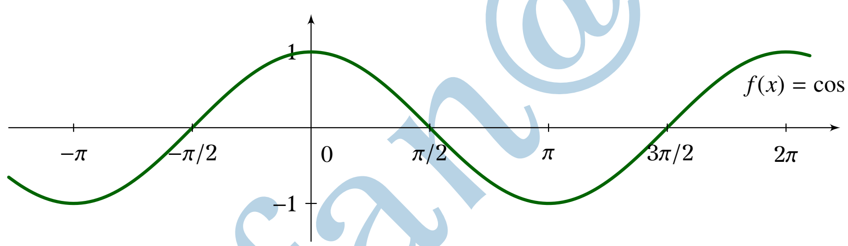
Ορισμός 1.7. Μια συνάρτηση f λέγεται **περιοδική** αν υπάρχει πραγματικός αριθμός L έτσι ώστε

$$f(x + L) = f(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Ο μικρότερος θετικός πραγματικός αριθμός L για τον οποίο ισχύει η (1.1) λέγεται **περίοδος** της f.

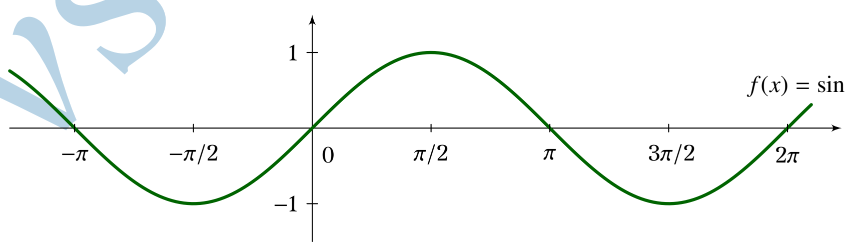
Αν η f είναι περιοδική με περίοδο L, τότε $f(x + kL) = f(x)$, για κάθε ακέραιο k. Για τις $\cos x$ και $\sin x$ η περίοδος είναι 2π (γιατί;).

sin και **cos**. Στο Σχήμα 1.14 δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \cos x$. Εκεί βλέπουμε για παράδειγμα ότι οι τιμές της συνάρτησης περιέχονται στο διάστημα $[-1, 1]$, για την ακρίβεια $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$. Η cos είναι θετική και αυστηρά φθίνουσα στο $[0, \pi/2)$, αρνητική και αυστηρά φθίνουσα στο $(\pi/2, \pi]$, αρνητική και αυστηρά αύξουσα στο $[\pi, 3\pi/2)$, θετική και αυστηρά αύξουσα στο $(3\pi/2, 2\pi]$, με $\cos\pi/2 = \cos 3\pi/2 = 0$, γεγονός που βλέπουμε παρακολουθώντας την προβολή ενός σημείου P στον οριζόντιο άξονα, καθώς αυτό διαράφει μια πλήρη περιστροφή στον τριγωνομετρικό κύκλο. Κάθε διάστημα μήκους 2π περιέχει το πλήρες προφίλ της συνάρτησης, μια "θετική και μια αρνητική καμπούρα" δηλαδή το τμήμα της γραφικής παράστασης της $\cos x$ το οποίο περιέχεται στο διάστημα $[-\pi/2, 3\pi/2]$, ή στο $[0, 2\pi]$. Από την (3.12) έπεται ότι η $\cos x$ είναι άρτια συνάρτηση.



Σχήμα 1.14: Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$

Για την $f(x) = \sin x$ ισχύουν οι ανάλογες παρατηρήσεις σχετικά με το πεδίο τιμών, το πρόσημο, τη μονοτονία. Οι πληροφορίες αυτές συν το γεγονός ότι η sin είναι περιττή συνάρτηση αποτυπώνονται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο Σχήμα 1.15.

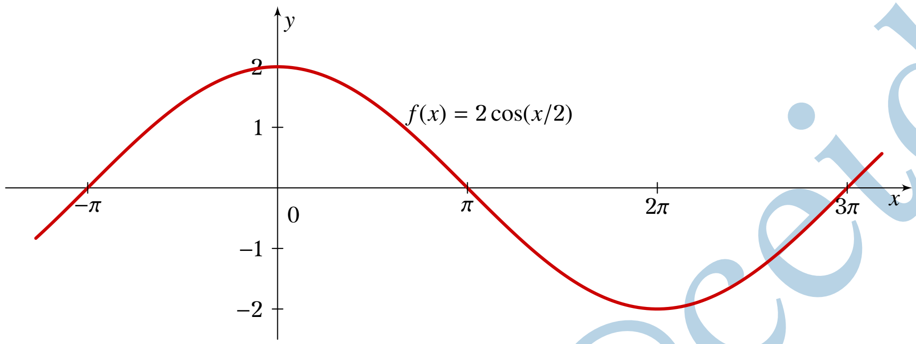


Σχήμα 1.15: Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$

Άσκηση 1.4. Από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων cos και sin φαίνεται ότι $\sin x = \cos(x + \pi/2)$, ή $\cos x = \sin(x - \pi/2)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα φαινόμενα δεν απατούν, τουλάχιστον στην συγκεκριμένη περίπτωση, δηλαδή οι δύο ισότητες ισχύουν για όλα τα x, είναι δηλαδή ταυτότητες.

Παράδειγμα 1.10. Να δοθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 2\cos\frac{x}{2}.$$



Σχήμα 1.16: Η συνάρτηση $f(x) = 2\cos(x/2)$

Η γραφική παράσταση της f είναι ένα συνημιτονοειδές κύμα. Η μέγιστη τιμή της είναι 2 και συμβαίνει όταν

$$\frac{x}{2} = 2k\pi \Rightarrow x = 4k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

ενώ η ελάχιστη τιμή είναι -2 και συμβαίνει όταν

$$\frac{x}{2} = (2k+1)\pi \Rightarrow x = 2(2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Τα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης είναι εκεί όπου

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = (2k+1)\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

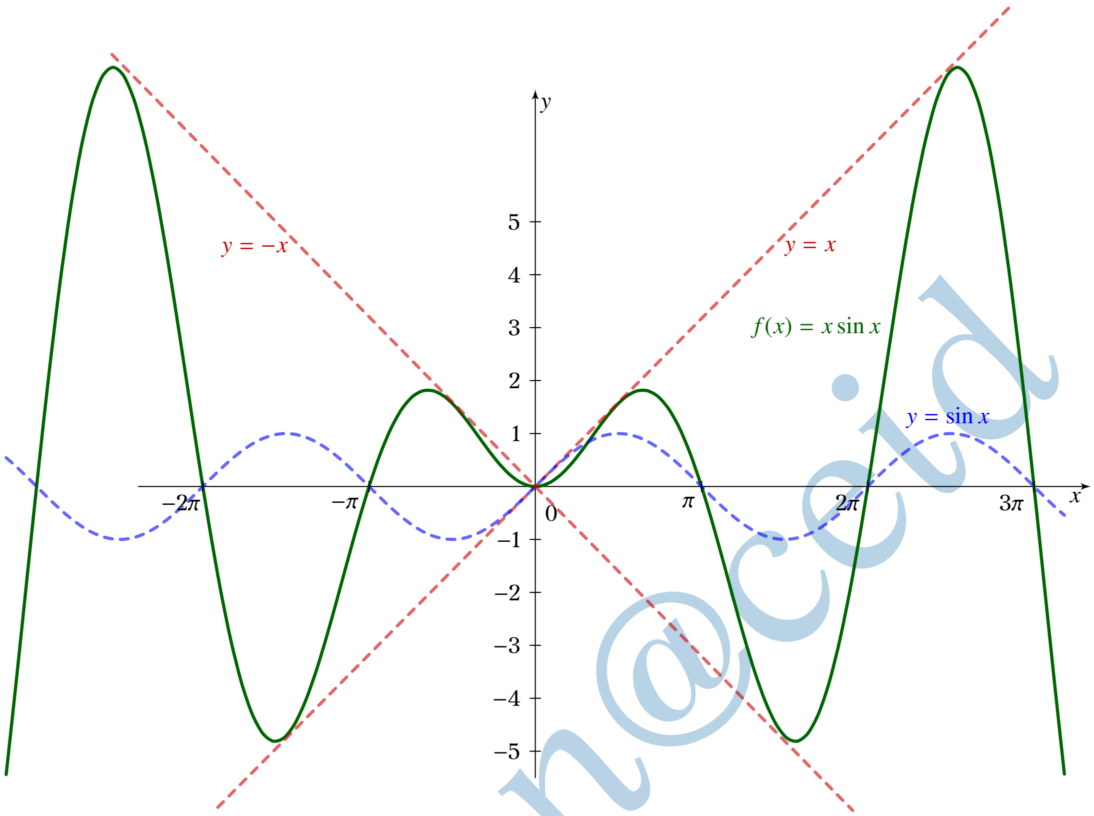
Η f είναι περιοδική και η περίοδός της σχετίζεται με αυτήν της $\cos x$, έτσι για το τυπικό διάστημα μιας περιόδου έχουμε

$$a \leq \frac{x}{2} \leq a + 2\pi \Rightarrow 2a \leq x \leq 2a + 4\pi, \qquad \text{με } a \in \mathbb{R},$$

άρα η περίοδος είναι 4π. Διαφορετικά, ένα διάστημα μιας περιόδου είναι ένα με άκρα δύο διαδοχικά σημεία στα οποία η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της (ώστε να περιέχει ένα πλήρες προφίλ της συνάρτησης), δηλαδή ένα διάστημα $[4k\pi, 4(k+1)\pi]$, τό μήκος του οποίου είναι 4π. Έτσι η γραφική παράσταση είναι αυτή του Σχήματος 1.16.

Παράδειγμα 1.11. Να δοθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x\sin x.$$



Σχήμα 1.17: Η συνάρτηση $f(x) = x \sin x$

Η συνάρτηση είναι άρτια, πράγματι

$$f(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x \sin x = f(x),$$

και $f(0) = 0$. Στα σημεία $k\pi + \pi/2$, με $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\sin(k\pi + \pi/2) = \pm 1$, είναι $f(k\pi + \pi/2) = \pm(k\pi + \pi/2)$, κατά συνέπεια στο $[0, +\infty)$ η γραφική παράσταση είναι ένα ημιτονοειδές κύμα "εγκλωβισμένο" μεταξύ των ευθειών $y = x$ και $y = -x$. Έτσι η γραφική παράσταση είναι αυτή του Σχήματος 1.17.

tan και **cot**. Για $x \neq k\pi + \pi/2$, από τον ορισμό της $f(x) = \tan x$ και την περιοδικότητα των sin και cos έχουμε ότι $\tan(x + 2\pi) = \tan x$, κατά συνέπεια η συνάρτηση tan είναι περιοδική. Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες υπολογίζουμε

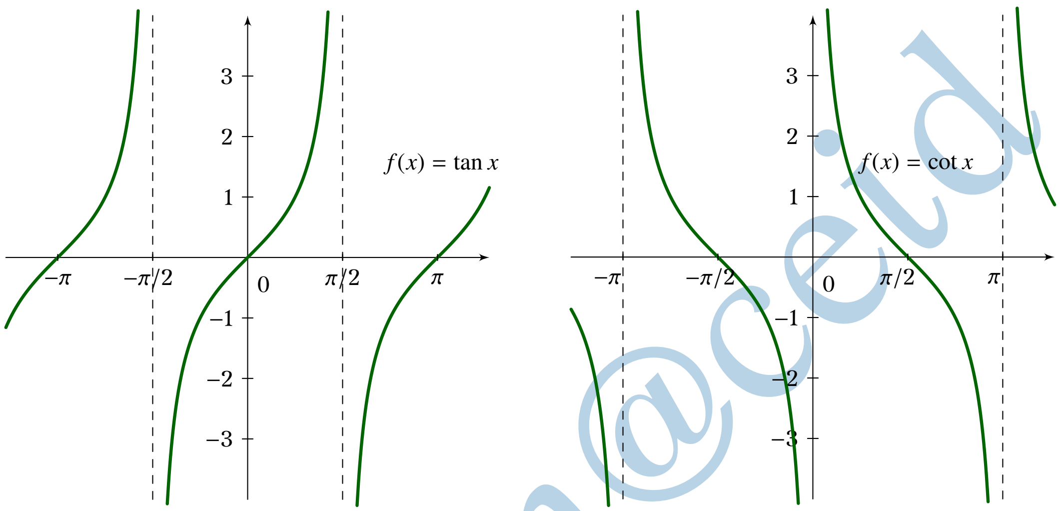
$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin x \, \cos \pi + \cos x \, \sin \pi}{\cos x \, \cos \pi - \sin x \, \sin \pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x,$$

κατά συνέπεια η περίοδος δεν είναι 2π, αλλά πιθανόν π. Από τον τριγωνομετρικό κύκλο και την γεωμετρική υλοποίηση του αριθμού $\tan x$ παρατηρούμε ότι η $\tan x$ είναι θετική και αυστηρά αύξουσα στο $[0, \pi/2)$ και αρνητική και αυστηρά αύξουσα στο $(\pi/2, \pi]$, ή αυστηρά αύξουσα στο $(-\pi/2, \pi/2)$.

Έτσι σε διάστημα μήκους π, η $f(x) = \tan x$ είναι ένα-προς-ένα, επομένως η περίοδος της συνάρτησης είναι π. Επίσης

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

δηλαδή η tan είναι περιττή συνάρτηση. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \tan x$ δίνεται στο Σχήμα 1.18.



Σχήμα 1.18: Οι συναρτήσεις $f(x) = \tan x$ και $f(x) = \cot x$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης γύρω από τα σημεία $k\pi + \pi/2$ εξηγείται από το γεγονός ότι για x κοντά στα σημεία αυτά το $\cos x$ είναι κοντά στο 0 ενώ το $\sin x$ είναι κοντά στο ± 1. Έτσι για x κοντά στα σημεία αυτά η ποσότητα $|\tan x|$ γίνεται αυθαίρετα μεγάλη.

Η συνάρτηση $f(x) = \cot x$ ορίζεται για $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Θυμίζουμε ότι

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x},$$

κατά συνέπεια η cot είναι περιττή και περιοδική με περίοδο π. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται στο Σχήμα 1.18.

sec και **csc**. Από τη συμπεριφορά των $\sin x$ και $\cos x$ συνάγονται άμεσα πληροφορίες για τη συμπεριφορά των $\sec x$ και $\csc x$ αφού

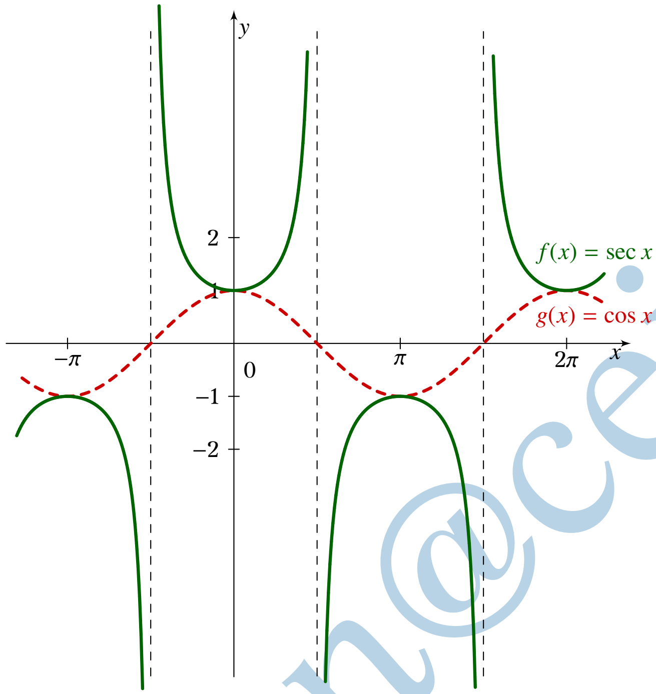
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \text{και} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Έτσι οι sec και csc είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$D(\sec) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\Big), \qquad \text{και} \qquad |\sec x| \geq 1$$

$$D(\csc) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi), \qquad \text{και} \qquad |\sec x| \geq 1.$$

Επιπλέον η sec είναι άρτια συνάρτηση, ενώ η csc είναι περιττή. Οι γραφικές παραστάσεις της τέμνουσας και συντέμνουσας δίνονται αντίστοιχα στα Σχήματα 1.19 και 1.20.



Σχήμα 1.19: Η συνάρτηση $f(x) = \sec x$

1.3.8 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

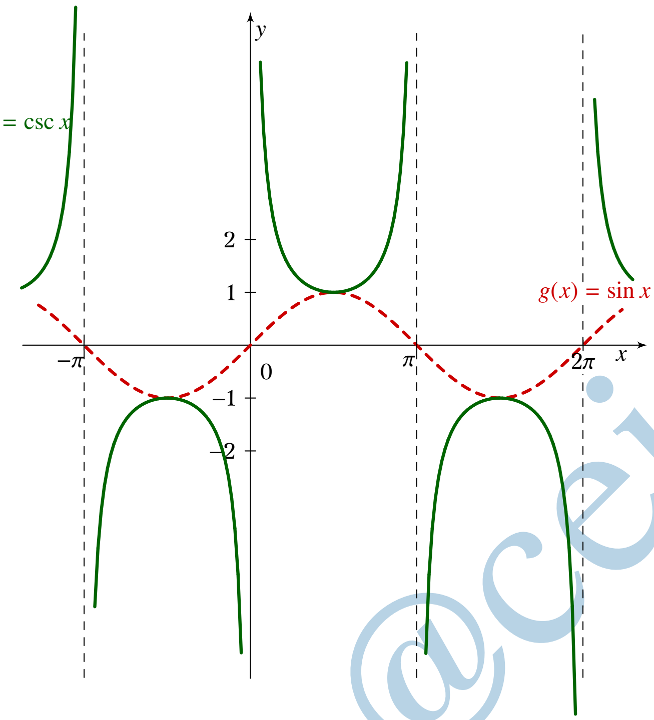
Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι περιοδικές, κατά συνέπεια δεν είναι ένα-προς-ένα επομένως δεν έχει έννοια να μιλάμε για τις αντίστροφες συναρτήσεις αυτών. Αν όμως περιορίσουμε κάθε τέτοια συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα ώστε να είναι ένα-προς-ένα σε αυτό τότε μπορούμε να ορίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση της περιορισμένης τριγωνομετρικής συνάρτησης.

$\cos^{-1}$. Στο διάστημα $[0, \pi]$ η $y = \cos x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα μπορούμε να ορίσουμε την $\cos^{-1}$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το $[0, \pi]$ με τη σχέση

$$\cos^{-1} x = y \Leftrightarrow \cos y = x, \qquad 0 \le y \le \pi. \tag{1.2}$$

Την $\cos^{-1}$ συμβολίζουμε και με arccos και τη διαβάζουμε τόξο συνημιτόνου. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι

$$\begin{aligned} \cos^{-1}(\cos x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [0, \pi] \\ \cos(\cos^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in [-1, 1] \end{aligned}$$



Σχήμα 1.20: Η συνάρτηση $f(x) = \csc x$

Από τη συμμετρία των γραφημάτων των cos και $\cos^{-1}$ ως προς την ευθεία $y = x$, βρίσκουμε τη γραφική παράσταση της $\cos^{-1}$.

$\sin^{-1}$. Στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2]$ η $y = \sin x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την την $\sin^{-1}$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και πεδίο τιμών το $[-\pi/2, \pi/2]$ με τη σχέση

$$\sin^{-1} x = y \Leftrightarrow \sin y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \tag{1.3}$$

Την $\sin^{-1}$ συμβολίζουμε και με arcsin και τη διαβάζουμε τόξο συνημιτόνου. Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης συνάγεται ότι

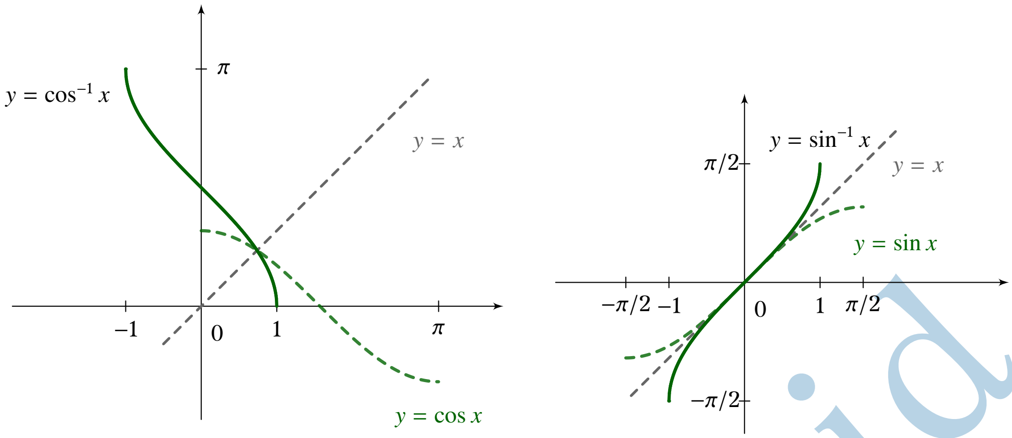
$$\sin^{-1}(\sin x) = x, \qquad \text{για} \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$\sin(\sin^{-1} x) = x, \qquad \text{για} \quad x \in [-1, 1]$$

Η γραφική παράσταση της $\sin^{-1}$ προκύπτει ως συμμετρική του γραφήματος της sin ως προς την ευθεία $y = x$.

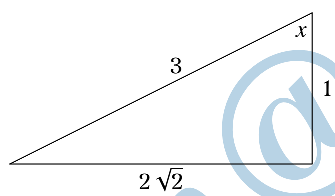
Παράδειγμα 1.12. Να υπολογισθούν οι ποσότητες $\cos^{-1}(1/2)$ και $\tan(\arccos(1/3))$.

Το $\cos^{-1}(1/2)$ είναι το τόξο στο $[0, \pi]$ του οποίου το συνημίτονο είναι $1/2$, άρα

$$\cos^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \qquad \text{αφού} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$



Σχήμα 1.21: Οι συναρτήσεις $\cos^{-1}$ και $\sin^{-1}$



Σχήμα 1.22:

Όμοια το $\arccos(1/3)$ είναι το τόξο x στο διάστημα $[0, \pi]$ του οποίου το συνημίτονο είναι $1/3$, άρα $0 < x < \pi/2$. Έτσι κατασκευάζοντας το ορθογώνιο τρίγωνο με μία κάθετη πλευρά 1 και υποτείνουσα 3 (πώς;), βλέπε Σχήμα 1.22, υπολογίζουμε

$$\tan\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = \tan x = 2\sqrt{2}.$$

$\tan^{-1}$. Στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$ η $y = \tan x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την την $\tan^{-1}$, ή arctan με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(-\pi/2, \pi/2)$ με τη σχέση

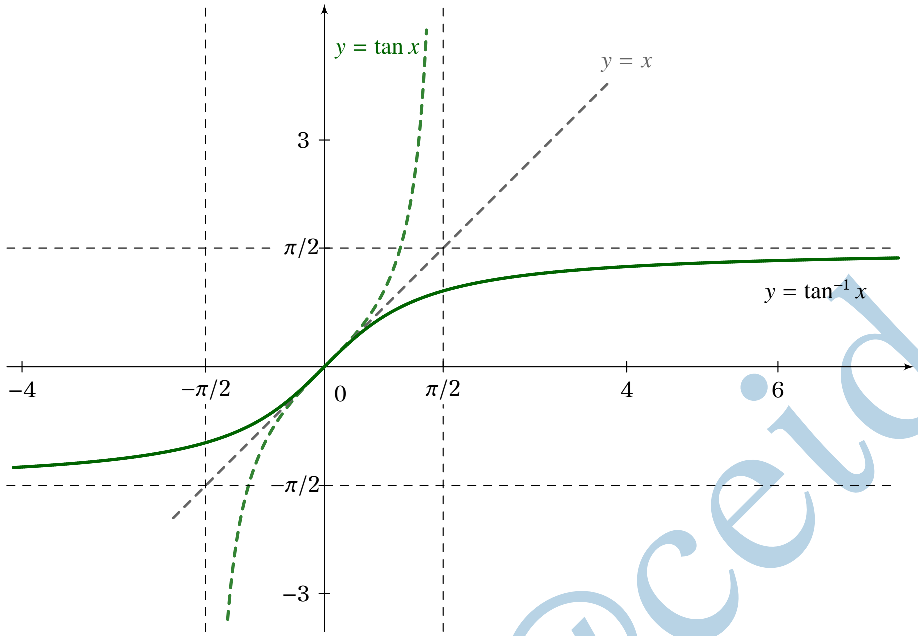
$$\tan^{-1} x = y \Leftrightarrow \tan y = x, \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \tag{1.4}$$

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(\tan x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan(\tan^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\tan^{-1}$ προκύπτει ως συμμετρική του γραφήματος της tan ως προς την ευθεία $y = x$, βλέπε Σχήμα 1.23. Επειδή η συνάρτηση tan είναι περιττή, έπεται ότι και η $\tan^{-1}$ είναι περιττή (γιατί;), έτσι

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$



Σχήμα 1.23: Η συνάρτηση $\tan^{-1}$

Παράδειγμα 1.13. Να απλοποιηθούν οι εκφράσεις $\cos(\tan^{-1} x)$ και $\tan(\cos^{-1} x)$.

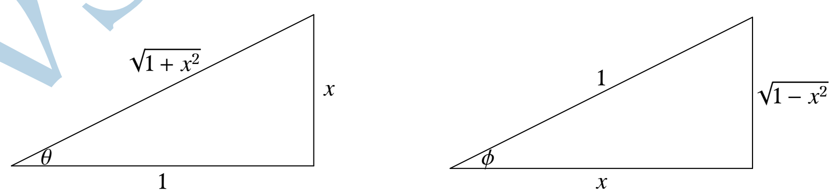
1. Η $\cos(\tan^{-1} x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ υπολογίζουμε

$$\cos(\tan^{-1} 0) = \cos 0 = 1.$$

Έστω $x > 0$ και έστω $\tan^{-1} x = \theta$, με $0 < \theta < \pi/2$, τότε $\tan\theta = x$, οπότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο, Σχήμα 1.24, βρίσκουμε

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Αν $x < 0$, τότε επειδή η $\tan^{-1}$ είναι περιττή συνάρτηση, έχουμε



Σχήμα 1.24: Βοηθητικά τρίγωνα

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos(-\tan^{-1}(-x)) = \cos(\tan^{-1}(-x)) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Κατά συνέπεια για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$\cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Η $\tan(\cos^{-1} x)$ ορίζεται όταν $-1 \leq x < 0$, ή $0 < x \leq 1$, επειδή $\cos^{-1} 0 = \pi/2$.

   (i) Αν $x = 1$, τότε $\tan(\cos^{-1} x) = \tan 0 = 0$, και αν $x = 1$, τότε $\tan(\cos^{-1} x) = \tan \pi = 0$.

   (ii) Έστω $0 < x < 1$ και έστω $\cos^{-1} x = \phi$. Τότε $\cos\phi = x$ με $0 < \phi < \pi/2$ και από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο, Σχήμα 1.24, υπολογίζουμε

$$\tan(\cos^{-1} x) = \tan\phi = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

   (iii) Αν $-1 < x < 0$, τότε $\pi/2 < \cos^{-1} x < \pi$, οπότε από τις σχέσεις

$$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta, \qquad \cos^{-1}(-x) + \cos^{-1} x = \pi,$$

   βλέπε Άσκηση 1.5, έχουμε

$$\tan(\cos^{-1} x) = \tan(\pi - \cos^{-1}(-x)) = -\tan(\cos^{-1}(-x)) = -\frac{\sqrt{1-(-x)^2}}{-x} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

   Κατά συνέπεια

$$\tan(\cos^{-1} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad x \in [-1, 0) \cup (0, 1].$$

$\cot^{-1}$. Στο διάστημα $(0, \pi)$ η $y = \cot x$ είναι ένα-προς-ένα, άρα και σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την την $\cot^{-1}$, με πεδίο ορισμού το $(-\infty, \infty)$ και πεδίο τιμών το $(0, \pi)$ με τη σχέση

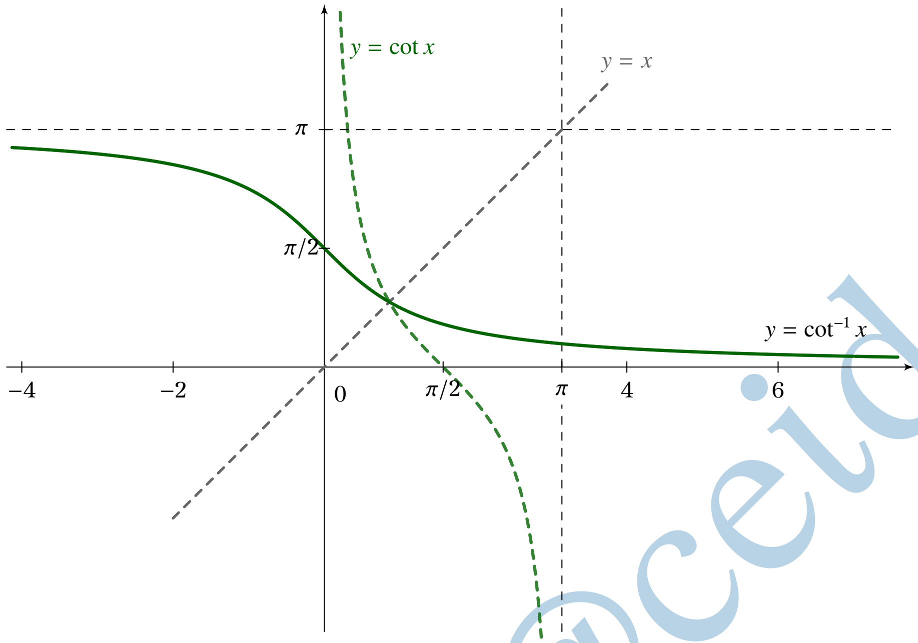
$$\cot^{-1} x = y \Leftrightarrow \cot y = x, \qquad 0 < y < \pi. \tag{1.6}$$

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \cot^{-1}(\cot x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in (0, \pi) \\ \cot(\cot^{-1} x) &= x, \qquad \text{για} \quad x \in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση της $\cot^{-1}$ προκύπτει ως συμμετρική του γραφήματος της $\cot$ ως προς την ευθεία $y = x$, βλέπε Σχήμα 1.25.

Άσκηση 1.5. Δείξτε ότι



Σχήμα 1.25: Η συνάρτηση $\cot^{-1}$

(α΄) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

(β΄) $\cos^{-1}(-x) + \cos^{-1} x = \pi$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

(γ΄) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$, για κάθε $x \in (-\infty,\infty)$.

(δ΄) $\cot^{-1}(-x) + \cot^{-1} x = \pi$, για κάθε $x \in (-\infty,\infty)$.

Άσκηση 1.6. Αποδείξτε τις ταυτότητες

(α΄) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

(β΄) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 1.7. Δείξτε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

1.3.9 Εκθετικές συναρτήσεις

Θυμίζουμε ότι αν a είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός και $p \in \mathbb{R}$, τότε

$$a^p = \lim_{n\to\infty} a^{p_n}$$

όπου (p_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία ρητών αριθμών με $p_n \to p$. Θυμίζουμε επίσης ότι εάν $a > 0$ και $b > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί και $x, y \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν οι ιδιότητες (α΄) $a^{x+y} = a^x a^y$ (β΄) $(a^x)^y = a^{xy}$ (γ΄) $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ (δ΄) $(ab)^x = a^x b^x$

Πρόταση 1.3. *Αν $a > 0$ και $b > 0$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $a \neq 1$, τότε $a^b > 1$ αν $a > 1$ και $a^b < 1$ αν $0 < a < 1$.*

Απόδειξη. Έστω $a > 1$ και $b = m/n$ με $m, n \in \mathbb{N}$. Γράφοντας $a = 1 + \delta$, με $\delta > 0$, από την ανισότητα του Bernoulli, βλέπε Παράδειγμα 4.1, έχουμε

$$a^m = (1+\delta)^m \geq 1 + m\delta > 1 \Rightarrow (a^m)^{1/n} = a^{m/n} > 1^{1/n} = 1.$$

Αν τώρα ο b είναι άρηττος και (p_n) είναι μια ακολουθία ρητών με $p_n \to b$, τότε από το προηγούμενο βήμα έπεται ότι $a_{p_n} > 1$ για τελικά όλα τα n. Από τις ιδιότητες του ορίου έπεται ότι και το όριο της ακολουθίας (a^{p_n}) ικανοποιεί την ίδια ανισότητα, δηλαδή $a^b > 1$. Αν $0 < a < 1$, εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα στο $1/a$ έπεται το ζητούμενο. □

Οι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = a^x, \qquad a > 0 \text{ και } a \neq 1$$

λέγονται **εκθετικές** (exponential). Το πεδίο ορισμού αυτών των συναρτήσεων είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) > 0$. Από τις ιδιότητες των δυνάμεων πραγματικών αριθμών για $x_1 < x_2$ έχουμε

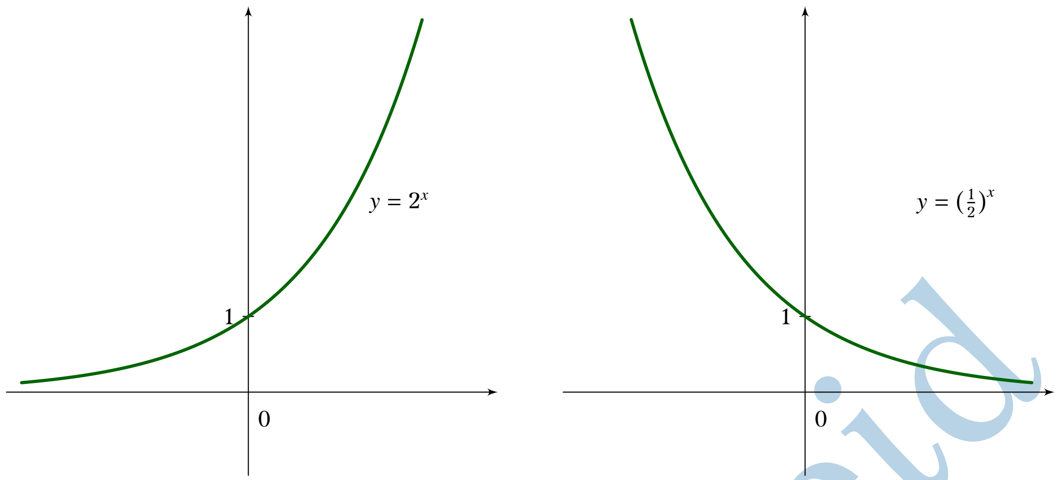
$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1}$$

έτσι αν $0 < a < 1$, τότε $a^{x_2 - x_1} < a < 1$, ισοδύναμα η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ αν $a > 1$, τότε $a^{x_2 - x_1} > a > 1$, ισοδύναμα η $f(x) = a^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Στο Σχήμα 1.26 βλέπουμε τη γραφική παράσταση της a^x για $a = 2$ και $a = 1/2$.

Μεταξύ των εκθετικών συναρτήσεων ξεχωρίζει μία, η οποία είναι και το πρότυπο δείγμα αυτού του τύπου των συναρτήσεων. Είναι αυτή για την οποία $a = e$ και χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στη γραφική της παράσταση στο σημείο $(0, 1)$ είναι ίση με ένα. Το αποτέλεσμα αυτό ισοδυναμεί, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, με το ότι η παράγωγος της συνάρτησης είναι ίση με τη συνάρτηση. Η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει την $f(x) = e^x$ μοναδικά μεταξύ όλων, ουσιαστικά, των συναρτήσεων στα μαθηματικά. Τη συνάρτηση αυτή συμβολίζουμε και με

$$f(x) = \exp x = e^x.$$

Στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε στην εκθετική συνάρτηση θα εννοούμε την $\exp x$.



Σχήμα 1.26: Οι εκθετικές συναρτήσεις $f(x) = 2^x$ και $f(x) = (1/2)^x = 2^{-x}$

1.3.10 Λογαριθμικές συναρτήσεις

Η εκθετική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f(x) = e^x$ είναι αυστηρά αύξουσα, άρα ένα-προς-ένα, κατά συνέπεια υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Ορισμός 1.8. Για $x > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση **λογάριθμο** log με τη σχέση

$$y = \log x \Leftrightarrow e^y = x, \qquad -\infty < y < +\infty.$$

Τη συνάρτηση log τη λέμε και φυσικό λογάριθμο και τη συμβολίζουμε και με $\ln x$.

Έτσι $\log = \exp^{-1}$. Η $f(x) = \log x$ είναι αυστηρά αύξουσα και το γράφημά της δίνεται στο Σχήμα 1.28.

Γενικότερα για $a > 0$, $a \neq 1$ συμβολίζουμε την αντίστροφη της $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, με $\log_a x$, έτσι ώστε

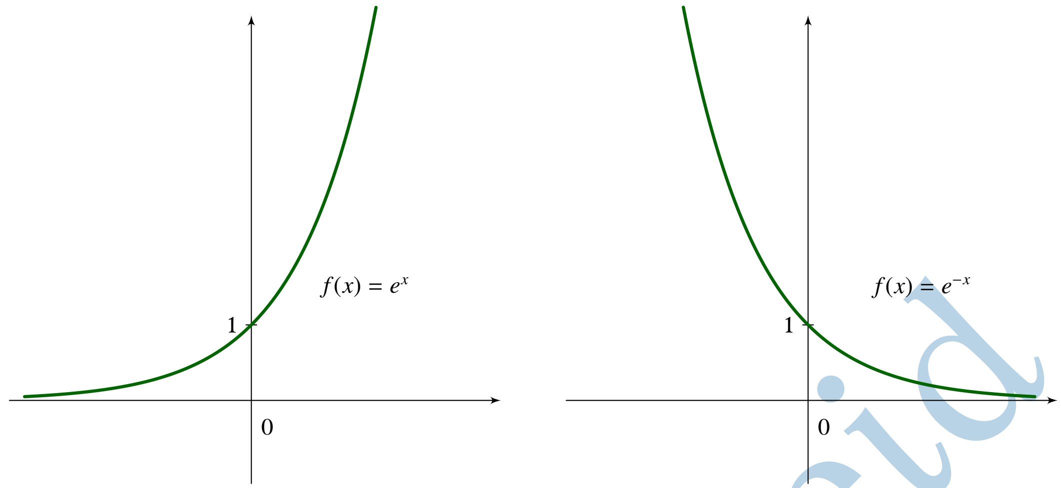
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x, \qquad -\infty < y < +\infty,$$

και τη λέμε συνάρτηση λογάριθμο με βάση a.

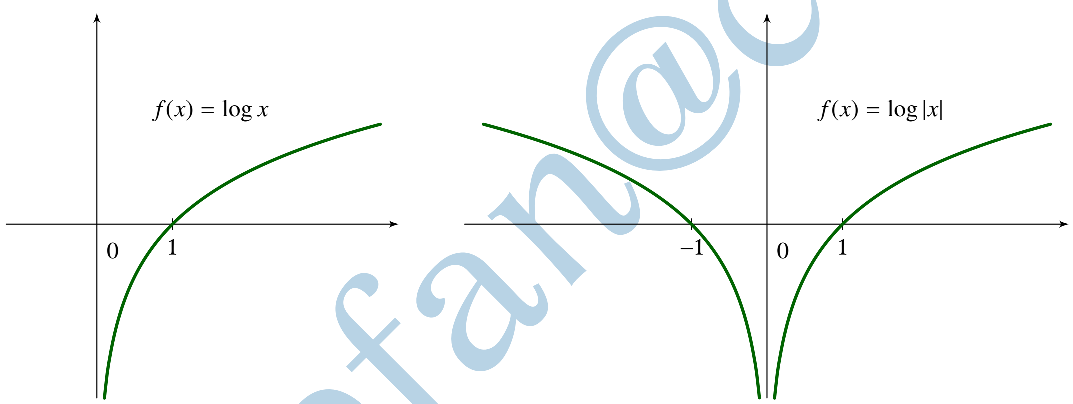
Ιδιότητες λογαρίθμων

Για $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$ και $y > 0$, ισχύουν οι ιδιότητες

1. $\log_a 1 = 0$



Σχήμα 1.27: Οι εκθετικές συναρτήσεις $f(x) = \exp x$ και $f(x) = (1/e)^x = e^{-x} = \exp(-x)$



Σχήμα 1.28: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log x$ και η $f(x) = \log|x|$

2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

3. $\log_a x^r = r \log_a x$, $r \in \mathbb{R}$.

Από τις 2. και 3. έπεται ότι

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(xy^{-1}) = \log_a x + \log_a(y^{-1}) = \log_a x - \log_a y$$

Από τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης και τις ιδιότητες του λογαρίθμου έπεται ότι

$$\log x = \log a^{\log_a x} = (\log_a x)(\log a),$$

κατά συνέπεια

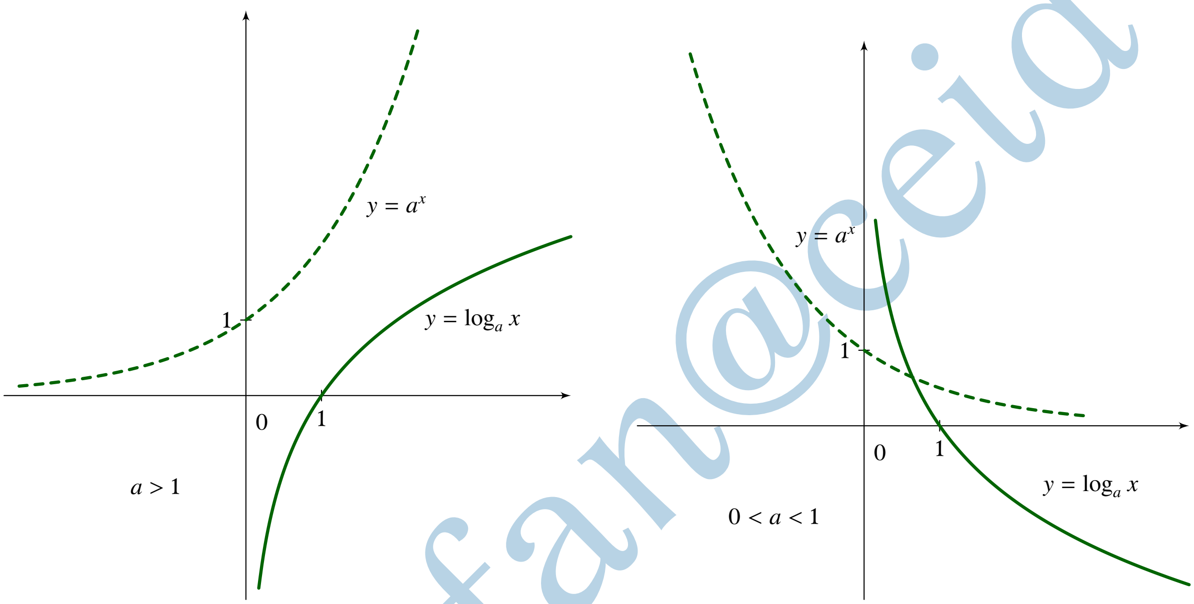
$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x. \tag{1.7}$$

Έτσι κάθε λογαριθμική συνάρτηση εκφράζεται ως πολλαπλάσιο του φυσικού λογαρίθμου. Όμοια

$$a^x = e^{\log a^x} = e^{x \log a} = (e^x)^{\log a} \tag{1.8}$$

δηλαδή κάθε εκθετική συνάρτηση εκφράζεται ως δύναμη της συνάρτησης exp, ή ως σύνθεση της εκθετικής συνάρτησης exp με μια γραμμική συνάρτηση

$$a^x = \exp(l_a(x)), \qquad \text{όπου } l_a(x) = x \log a. \tag{1.9}$$



Σχήμα 1.29: Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_a x$

Ασκήσεις

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να είναι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = x + 1$.

   (α΄) Να βρεθεί η εικόνα του $\mathbb{R}$ μέσω της f και μέσω της g.

   (β΄) Να βρεθεί το $f(g(\mathbb{R}))$.

   (γ΄) Να βρεθεί το $g(f(\mathbb{R}))$.

   (δ΄) Να βρεθεί το $f^{-1}([-1, 0])$.

   (ε΄) Να βρεθεί το $f^{-1}(f([0, 1]))$.

   (ϛ΄) Να βρεθεί το $f(f^{-1}([-1, 0]))$.

   (ζ΄) Να βρεθεί το $f(g^{-1}([-1, 1]))$.

2. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν πραγματικές συναρτήσεις f και g που να ικανοποιούν μία από τις σχέσεις:

   (i) $f(x) + g(y) = xy$

   (ii) $f(x)g(y) = x + y$

   για κάθε x και y. **Υπόδειξη**: Υπολογίστε τις συναρτήσεις σε συγκεκριμένες τιμές.

3. Εάν $f(x) = x + 1$, να εξετασθεί εάν υπάρχουν συναρτήσεις g τέτοιες ώστε $f \circ g = g \circ f$.

4. Δείξτε ότι

$$\arctan x = \begin{cases} \operatorname{arccot}(1/x) & x > 0, \\ \operatorname{arccot}(1/x) - \pi & x < 0. \end{cases}$$

5. Εάν a και b είναι πραγματικές σταθερές, όχι και οι δύο ίσες με μηδέν, δείξτε ότι

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \omega)$$

για κατάλληλη σταθερά ω (τη φάση). Να βρεθεί η τιμή του ω.

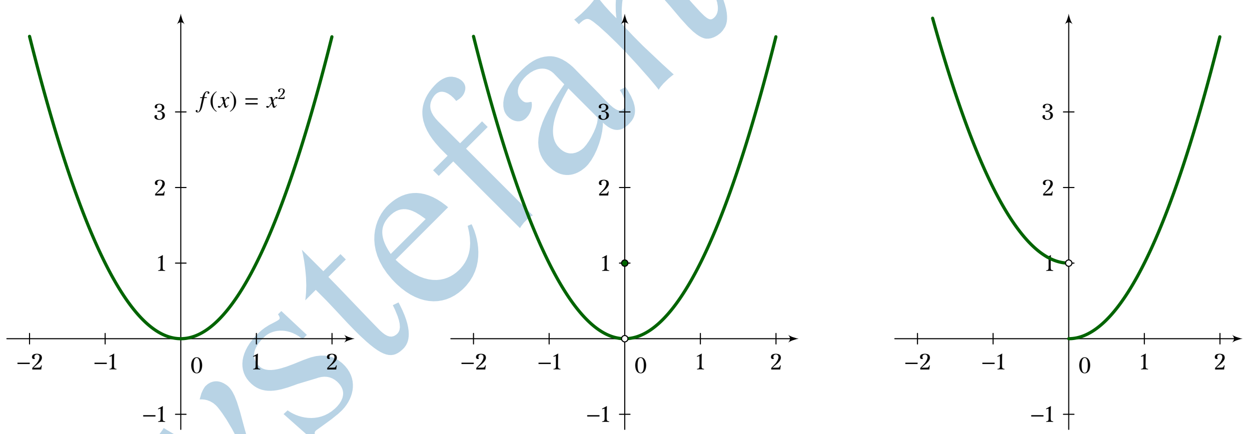
Κεφάλαιο 2

Όρια και Συνέχεια

2.1 Όρια συναρτήσεων

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0, \\ x^2 & x \geq 0. \end{cases}$$



Σχήμα 2.1: Οι συναρτήσεις $f_1(x) = x^2$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$

Παρατηρούμε ότι καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν οι τιμές των f_1 και f_2 προσεγγίζουν επίσης το μηδέν. Δεν μπορούμε να πούμε όμως το ίδιο για την f_3, γιατί αν το x προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά, δηλαδή για $x < 0$ οι αντίστοιχες τιμές $f_3(x)$ προσεγγίζουν το ένα, ενώ αν το x προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά, δηλαδή για $x > 0$ οι αντίστοιχες τιμές $f_3(x)$ προσεγγίζουν το μηδέν. Λέμε λοιπόν ότι οι f_1 και f_2 συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το x τείνει στο μηδέν και γράφουμε

$$\lim_{x \to 0} f_1(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 0} f_2(x) = 0.$$

Το μηδέν το λέμε **όριο** των f_1 και f_2 καθώς το x τείνει στο μηδέν. Για την f_3 θέλοντας να δηλώσουμε τις διαφορετικές οριακές τιμές που προκύπτουν ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζει το x το μηδέν γράφουμε

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f_3(x) := \lim_{x\to 0-} f_3(x) = 1, \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f_3(x) := \lim_{x\to 0+} f_3(x) = 0.$$

Γράφουμε επίσης

$$f_3(0-) := \lim_{x\to 0-} f_3(x) = 1, \qquad f_3(0+) := \lim_{x\to 0+} f_3(x) = 0,$$

και λέμε το $f_3(0-)$ **αριστερό πλευρικό όριο** της f_3, ή απλά **όριο από τα αριστερά** της f_3 καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά, και το $f_3(0+)$ **δεξιό πλευρικό όριο** της f_3, ή απλά **όριο από τα δεξιά** της f_3 καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά.

Ορισμός 2.1. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0. Θα λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός L είναι τό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 και θα γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L,$$

ή $f(x) \to L$ καθώς $x \to x_0$, εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ) ώστε

$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Παρατηρούμε ότι αν για τα πλευρικά όρια της f στο x_0 ισχύει

$$f(x_0-) = \lim_{x\to x_0-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+)$$

τότε το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

Παράδειγμα 2.1. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Το κλάσμα στο ζητούμενο όριο γράφεται

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

κατά συνέπεια για $x \neq 1$ είναι

$$\frac{x^2-1}{x-1} = (x+1),$$

επομένως από τον ορισμό του ορίου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Παράδειγμα 2.2. Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{|1+x|-|1-x|}{x}.$$

Ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά του πηλίκου για x κοντά στο μηδέν, έτσι για $-1 < x < 1$ είναι $1-x > 0$ και $1+x > 0$, οπότε

$$\frac{|1+x|-|1-x|}{x} = \frac{1+x-(1-x)}{x} = \frac{2x}{x} = 2, \qquad 0 < |x| < 1$$

κατά συνέπεια

$$\lim_{x\to 0} \frac{|1+x|-|1-x|}{x} = 2.$$

Θεώρημα 2.1 (Ιδιότητες ορίων). *Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0 και έστω ότι*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = B$$

τότε

(1) $\lim_{x\to x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda \lim_{x\to x_0} f(x) + \mu \lim_{x\to x_0} g(x) = \lambda A + \mu B$, *για* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(2) $\lim_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x)) = AB$.

(3) $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$, *εάν* $B \neq 0$.

Θεώρημα 2.2. *Έστω ότι οι συναρτήσεις f, g και h είναι ορισμένες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0 και έστω ότι $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για κάθε x. Εάν*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$$

τότε $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$.

Πρόταση 2.1.

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

Απόδειξη. Αν $0 < x < \pi/2$, τότε βλέπε (3.18), $0 < \sin x < x$, κατά συνέπεια από το Θεώρημα 2.2 έπεται ότι

$$0 \leq \lim_{x\to 0+} \sin x \leq \lim_{x\to 0+} x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0+} \sin x = 0.$$

Έστω $-\pi/2 < x < 0$, τότε $0 < -x < \pi/2$, οπότε

$$0 < \sin(-x) < -x \Rightarrow 0 < -\sin x < -x \Rightarrow x < \sin x < 0$$

έτσι

$$0 = \lim_{x\to 0-} x \leq \lim_{x\to 0-} \sin x \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0-} \sin x = 0.$$

Από την ισότητα των πλευρικών ορίων έπεται το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 2.1.

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Απόδειξη. Από τη σχέση $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ και για x κοντά στο 0 παίρνουμε, εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του ορίου

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \cos^2 x &= \lim_{x\to 0}(1 - \sin^2 x)\\ &= 1 - \lim_{x\to 0} \sin^2 x\\ &= 1 - (\lim_{x\to 0} \sin x)^2 = 1\end{aligned}$$

από την Πρόταση 2.1. Έτσι $\lim_{x\to 0} \cos x = \pm 1$, και τελικά $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, αφού για $-\pi/2 < x < \pi/2$ είναι $\cos x > 0$. □

Παρατήρηση 2.1. Επειδή $\sin 0 = 0$ και $\cos 0 = 1$, από την Πρόταση 2.1 και το Πόρισμα 2.1, έχουμε

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Παράδειγμα 2.3. Δείχνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ξαναγράφοντας την ανισότητα (3.17)

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2)$$

το Πόρισμα 2.1, εξασφαλίζει ότι το όριο $(\sin x)/x$ καθώς $x \to 0$ υπάρχει και από το Θεώρημα 2.2 έπεται ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 1.

Παρατήρηση 2.2. Το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 2.3 μας λέει ότι για x κοντά στο μηδέν η τιμή $\sin x$ είναι περίπου ίση με x και γράφουμε $\sin x \approx x$ για $|x|$ μικρό. Έτσι για τέτοια x είναι $x \sin x \approx x^2$, γεγονός που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.17 όπου για $\epsilon > 0$ και μικρό η $x \sin x$ συμπεριφέρεται ως την παραβολή $y = x^2$ στο $(-\epsilon, \epsilon)$, και δεν μοιάζει απλά με την $\sin x$ “εγκλωβισμένη” μεταξύ των ευθειών $y = x$ και $y = -x$.

Παράδειγμα 2.4. Δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Για x κοντά στο 0 το $\cos x$ είναι κοντά στο 1, έτσι γράφοντας

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

και αφού τα όρια των δύο κλασμάτων στο δεξί μέλος υπάρχουν, παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + 1} = -1\,\frac{0}{2} = 0.$$

Άσκηση 2.1. Να υπολογισθεί (αν αυτό υπάρχει) το όριο
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)+(x-1)}{x^2-1}.$$

Άπειρα όρια και όρια στο άπειρο

Ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις
$$f_1(x)=\frac{1}{x},\qquad f_2(x)=\frac{1}{(x-1)^2},\qquad f_3(x)=\tan^{-1}x.$$
Παρατηρούμε ότι για τις συναρτήσεις αυτές θα μπορούσαμε να γράψουμε, γενικεύοντας τον ορισμό του ορίου,
$$\lim_{x\to 0+}f_1(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to 0-}f_1(x)=-\infty,$$
αφού η f_1 αυξάνει απεριόριστα καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα δεξιά, με ανάλογη συμπεριφορά για την $|f_1|$ καθώς το x προσεγγίζει το μηδέν από τα αριστερά,
$$\lim_{x\to 1}f_2(x)=+\infty,$$
αφού η f_2 αυξάνει απεριόριστα καθώς το x προσεγγίζει το ένα, και
$$\lim_{x\to +\infty}f_3(x)=\frac{\pi}{2},$$
αφού καθώς το x αυξάνει απεριόριστα η $f_3(x)$ προσεγγίζει την τιμή $\pi/2$. Μπορούμε επίσης να γράψουμε
$$\lim_{x\to \pm\infty}f_1(x)=0,\qquad \lim_{x\to \pm\infty}f_2(x)=0$$
(γιατί;).

Ορισμός 2.2. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0.

(1) Θα λέμε ότι η f **αποκλίνει στο $+\infty$** καθώς το x τείνει στο x_0 και γράφουμε
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=+\infty$$
αν για κάθε $A>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε
$$f(x)>A\qquad \text{οποτεδήποτε}\qquad 0<|x-x_0|<\delta.$$

(2) Θα λέμε ότι η f **αποκλίνει στο $-\infty$** καθώς το x τείνει στο x_0 και γράφουμε
$$\lim_{x\to x_0}f(x)=-\infty$$
αν για κάθε $A>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε
$$f(x)<-A\qquad \text{οποτεδήποτε}\qquad 0<|x-x_0|<\delta.$$

Κοιτάζοντας τη συμπεριφορά μιας συνάρτησης για αυθαίρετα μεγάλες τιμές του $|x|$, δηλαδή για $x \to \pm\infty$, έχουμε

Ορισμός 2.3. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κατάλληλο άπειρο διάστημα.

(1) Γράφουμε
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$
αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A > 0$ ώστε
$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \quad x > A.$$

(2) Γράφουμε
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$
αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A > 0$ ώστε
$$|f(x) - L| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \quad x < -A.$$

Παράδειγμα 2.5. Γνωρίζοντας ότι
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$
με $n \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Εδώ μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της συνάρτησης
$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \qquad x > 0$$
καθώς $x \to +\infty$. Για $x > 0$ αν n_x είναι το ακέραιο μέρος του x, δηλαδή $n_x \in \mathbb{N}$ και $n_x \le x < n_x + 1$, τότε
$$1 + \frac{1}{n_x+1} \le 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n_x}$$
οπότε
$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{n_x} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x+1}.$$
Έτσι παίρνουμε
$$\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n_x+1}\right)^{n_x+1} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{n_x}\right)^{n_x}\left(1+\frac{1}{n_x}\right).$$
Καθώς $n_x \to \infty$ (ισοδύναμα $x \to \infty$) τα δύο άκρα της ανισότητας τείνουν στο e, κατά συνέπεια και η ενδιάμεση ποσότητα συγκλίνει στο ίδιο όριο καθώς $x \to \infty$.

Παράδειγμα 2.6. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}), \qquad a>0.$$

Γράφοντας

$$\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}$$

και παρατηρώντας ότι ο παρονομαστής στην τελευταία έκφραση τείνει στο $+\infty$ καθώς $x\to+\infty$ εκτιμάμε ότι το ζητούμενο όριο πρέπει να είναι ίσο με μηδέν. Πράγματι για $\epsilon>0$ έχουμε

$$0<\sqrt{x+a}-\sqrt{x}=\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\le\frac{a}{2\sqrt{x}}<\epsilon \qquad \text{για } x>\left(\frac{a}{2\epsilon}\right)^2,$$

επομένως

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$$

Άσκηση 2.2. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-x).$$

Άσκηση 2.3. Να υπολογισθεί το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n+a}{x^m+b},$$

όπου n και m είναι φυσικοί αριθμοί και a και b πραγματικοί.

Ασύμτωτες ευθείες

Ορισμός 2.4. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάθε σημείο ενός διαστήματος γύρω από ένα σημείο x_0, εκτός ίσως από το x_0. Θα λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** στη γραφική παράσταση της f εάν ισχύει τουλάχιστον ένα από τα παρακάτω

$$\lim_{x\to x_0+}f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to x_0-}f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to x_0+}f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to x_0-}f(x)=-\infty,$$

Ορισμός 2.5. Θα λέμε ότι η ευθεία $y=L$ είναι **οριζόντια ασύμπωτη** στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f εάν

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to-\infty}f(x)=L.$$

Γενικότερα η ευθεία $\ell(x) = ax + b$ θα λέγεται **ασύμπωτη ευθεία** στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f εάν

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x) - \ell(x)| = 0 \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to-\infty} |f(x) - \ell(x)| = 0.$$

2.2 Συνέχεια συναρτήσεων

Για τις συναρτήσεις

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

είδαμε ότι τα όρια και των δύο καθώς $x \to 0$ υπάρχουν και είναι ίσα με μηδέν αλλά διαφέρουν στο ότι

$$\lim_{x\to0} f_1(x) = f_1(0) \qquad \lim_{x\to0} f_2(x) \neq f_2(0).$$

Ορισμός 2.6. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0. Η f λέγεται **συνεχής** στο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Για να είναι δηλαδή η f συνεχής στο x_0 πρέπει να ισχύουν τα εξής:

(1) $f(x_0)$ υπάρχει

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, και

(3) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Επειδή $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, σχηματικά μπορούμε να γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

Ορισμός 2.7. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα που περιέχει το x_0. Η f λέγεται **συνεχής από αριστερά** στο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0),$$

δηλαδή $f(x_0-) = f(x_0)$. Η f λέγεται **συνεχής από δεξιά** στο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0),$$

δηλαδή $f(x_0+) = f(x_0)$.

Ορισμός 2.8 (Συνέχεια σε διάστημα). Μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα διάστημα αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του διαστήματος. Ειδικά η f είναι συνεχής στο κλειστό και φραγμένο διάστημα $[a, b]$ αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in (a, b)$ και επιπλέον $f(a+) = f(a)$ και $f(b-) = f(b)$.

Παράδειγμα 2.7. Κάθε γραμμική συνάρτηση $f(x) = ax + b$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό του ορίου έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} (ax + b) = a \lim_{x\to x_0} x + b = ax_0 + b = f(x_0)$$

γεγονός που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Παράδειγμα 2.8. Η συνάρτηση $f(x) = x^n$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και η συνάρτηση $f(x) = x^{-n}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το αποτέλεσμα είναι συνέπεια των ιδιοτήτων των ορίων. Για παράδειγμα για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $n = 2$, είναι

$$\lim_{x\to x_0} x^2 = (\lim_{x\to x_0} x)(\lim_{x\to x_0} x) = x_0 x_0 = x_0^2,$$

ενώ για $n = 3$, έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} x^3 = (\lim_{x\to x_0} x)(\lim_{x\to x_0} x^2) = x_0 x_0^2 = x_0^3,$$

και για γενικό n εργαζόμαστε επαγωγικά. Για $x_0 \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε από το πρώτο μέρος

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x^n} = \frac{\lim_{x\to x_0} 1}{\lim_{x\to x_0} x^n} = \frac{1}{x_0^n}$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.

Τα σημεία στα οποία μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής λέγονται **σημεία ασυνέχειας** της συνάρτησης και η συνάρτηση λέγεται **ασυνεχής** στα σημεία αυτά.

Παρατήρηση 2.3. Ας δούμε τι σημαίνει ότι μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε σημείο. Έστω x_0 ένα τέτοιο σημείο, τότε σύμφωνα με τον ορισμό είτε το $f(x_0)$ δεν ορίζεται, είτε ενώ ορίζεται υπάρχει ένας, τουλάχιστον, τρόπος όπου ενώ το x προσεγγίζει το σημείο x_0 η εικόνα $f(x)$ δεν προσεγγίζει το $f(x_0)$. Ισοδύναμα θα υπάρχει μια ακολουθία σημείων $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ με $x_n \to x_0$, αλλά $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$.

Ένας ισοδύναμος ορισμός της συνέχειας είναι

Ορισμός 2.9. Έστω ότι η συνάρτηση f ορίζεται σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0. Η f λέγεται **συνεχής** στο x_0 αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ (το οποίο εξαρτάται από το ϵ και το x_0), ώστε

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad \text{οποτεδήποτε} \qquad |x - x_0| < \delta.$$

Το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.1 και του Πορίσματος 2.1 είναι, ουσιαστικά, ότι οι συναρτήσεις sin και cos είναι συνεχείς στο $x = 0$, βλέπε και Παρατήρηση 2.1. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι παντού συνεχείς.

Παράδειγμα 2.9. Δείχνουμε ότι οι συναρτήσεις sin και cos είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και έστω $\epsilon > 0$. Δείχνουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad |x - y| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |\sin x - \sin y| < \epsilon.$$

Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}$$

παίρνουμε

$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le |x-y|$$

από την (3.19). Έτσι για $\delta = \epsilon$ έχουμε

$$|\sin x - \sin y| \le |x - y| < \delta = \epsilon,$$

που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε. Το αποτέλεσμα για τη συνάρτηση cos προκύπτει με ανάλογο τρόπο από την αντίστοιχη ταυτότητα

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}.$$

Παρατηρούμε ότι η επιλογή του δ, τόσο για την sin όσο και για την cos, είναι ανεξάρτητη του x και εξαρτάται μόνο από το ϵ.

Παράδειγμα 2.10. Εάν $a > 0$ δείχνουμε ότι η συνάρτηση a^x είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
ΒΗΜΑ 1. Δείχνουμε ότι η a^x είναι συνεχής στο 0. Δείχνουμε δηλαδή ότι

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1 \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ ώστε αν } |x| < \delta, \text{ τότε } |a^x - 1| < \epsilon.$$

Αν $a = 1$ το συμπέρασμα ισχύει. Έστω $a > 1$. Έστω $\epsilon > 0$, και έστω $x \to 0$. Επειδή $\sqrt[n]{a} \to 1$ και $1/\sqrt[n]{a} \to 1$, καθώς $n \to \infty$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$1 - \epsilon < \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < \sqrt[k]{a} < 1 + \epsilon.$$

Έτσι αν

$$-\frac{1}{k} < x < \frac{1}{k}$$

από τη μονοτονία της a^x έπεται ότι

$$1 - \epsilon < a^{-1/k} < a^x < a^{1/k} < 1 + \epsilon$$

για κάθε $|x| < 1/k$, ισοδύναμα $|a^x - 1| < \epsilon$, για κάθε $|x| < \delta$, όπου $\delta = 1/k$ που είναι το συμπέρασμα για $a > 1$. Αν $0 < a < 1$ εφαρμόζουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στο $1/a > 1$, έτσι από τις ιδιότητες των δυνάμεων παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} \to 1, \qquad \text{καθώς } x \to 0$$

απ' όπου έπεται ότι το όριο του παρονομαστή υπάρχει και είναι ίσο με 1.
ΒΗΜΑ 2. Δείχνουμε ότι η a^x είναι συνεχής παντού. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $x \to x_0$, τότε από τις ιδιότητες των δυνάμεων και των ορίων παίρνουμε

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0}(a^{x-x_0}a^{x_0}) = (\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0})(\lim_{x\to x_0} a^{x_0}) = 1\,a^{x_0} = a^{x_0}$$

από το πρώτο βήμα, που είναι το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.3. *Εάν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε οι*

$$\lambda f(x) + \mu g(x), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad f(x)g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x_0) \neq 0$$

είναι συνεχείς στο x_0.

Θεώρημα 2.4. *Έστω ότι η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται. Εάν η g είναι συνεχής στο x_0 και η f είναι συνεχής στο $y_0 = g(x_0)$, τότε η $f \circ g$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω $x \to x_0$, και έστω $y = g(x)$, τότε από τη συνέχεια της g στο x_0 έχουμε

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = y_0$$

και από τη συνέχεια της f στο $y_0 = g(x_0)$ έχουμε

$$\lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0)$$

άρα και για $y = g(x) \to y_0 = g(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(x_0).$$

□

Στη συνέχεια χάριν πληρότητας παραθέτουμε ένα θεώρημα στην απόδειξη του οποίου χρησιμοποιείται μια χαρακτηριστική ιδιότητα των συνεχών συναρτήσεων, αυτή της ενδιάμεσης τιμής. Την ιδιότητα αυτή αποδεικνύουμε στην Παράγραφο 2.3 και την απόδειξη του Θεωρήματος 2.5 δίνουμε στην Παράγραφο 2.4.

Θεώρημα 2.5. *Εάν η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$, όπου I είναι διάστημα, είναι ένα-προς-ένα συνεχής συνάρτηση, τότε η f^{-1} είναι επίσης συνεχής συνάρτηση.*

Συγκεντρώνοντας τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 2.7, 2.8, 2.9, 2.10, και ειδικεύοντας τα συμπεράσματα των Θεωρημάτων 2.3 και 2.5, έχουμε το

Θεώρημα 2.6. *Οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς*

(1) *Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$.*

(2) *Οι τριγωνομετρικές* sin *και* cos *στο $\mathbb{R}$.*

(3) *Οι εκθετικές a^x, $a > 0$ στο $\mathbb{R}$.*

(4) *Οι ρητές εκτός από τα σημεία μηδενισμού του παρονομαστή.*

(5) *Οι τριγωνομετρικές* tan *και* sec *σε κάθε διάστημα $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$. Οι* cot *και* csc *σε κάθε διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.*

(6) *Οι ρίζες $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$ αν ο n είναι περιττός, και στο $[0, +\infty)$ αν ο n είναι άρτιος.*

(7) *Οι λογαριθμικές $\log_a x$, $a > 0$ στο $(0, +\infty)$.*

(8) *Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές $\sin^{-1}$ και $\cos^{-1}$ στο διάστημα $[-1, 1]$, και $\tan^{-1}$ στο $\mathbb{R}$.*

Παράδειγμα 2.11. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x - |x|}{x}, \qquad x \neq 0.$$

(α΄) Εξετάστε ως προς τη συνέχεια την f.

(β΄) Εξετάστε αν η f μπορεί να οριστεί στο $x = 0$ ώστε να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(α΄) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
x < 0 &\qquad f(x) = \frac{x-(-x)}{x} = \frac{2x}{2} = 2 \\
x > 0 &\qquad f(x) = \frac{x-x}{x} = 0
\end{aligned}
$$

κατά συνέπεια η f είναι συνεχής ως σταθερή συνάρτηση στο $(-\infty, 0)$ όπως και στο $(0, +\infty)$.

(β΄) Επειδή τα πλευρικά όρια στο $x = 0$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους, δηλαδή

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$$

το όριο της f καθώς $x \to 0$ δεν υπάρχει, κατά συνέπεια η δεν μπορεί να οριστεί στο $x = 0$ ώστε να είναι συνεχής εκεί.

Παράδειγμα 2.12. Να εξεταστεί για ποιά τιμή του r, αν υπάρχει τέτοια, η συνάρτηση

$$f_r(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0, \\ r & x = 0, \end{cases}$$

είναι συνεχής.

Η f_r ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Για $x \neq 0$ η $\sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $\sin x$ και $\frac{1}{x}$, επομένως και η f_r ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Επιπλέον για $x \neq 0$ είναι

$$|f_r(x)| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

αφού $|\sin t| \leq 1 \ \forall t \in \mathbb{R}$. Έτσι για $x \neq 0$ έχουμε

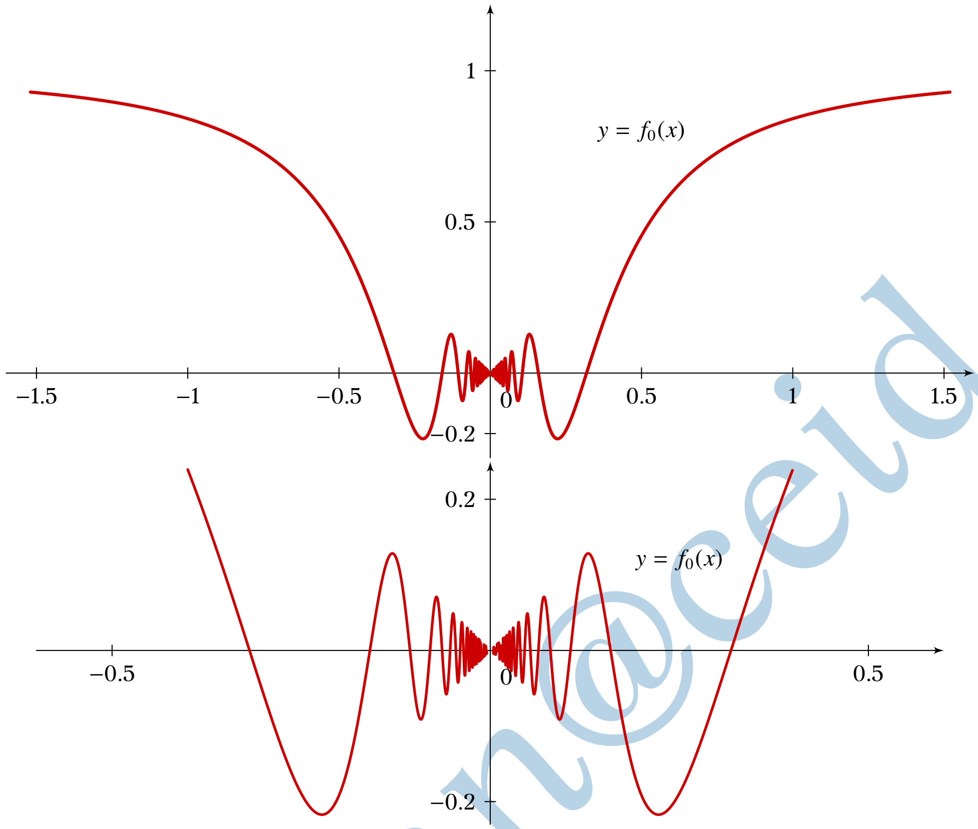
$$-x \leq f_r(x) \leq x \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Έτσι η f_r γίνεται συνεχής στο $\mathbb{R}$ για $r = \lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Το Σχήμα 2.2 περιέχει τη γραφική παράσταση της $f(x)$ για $r = 0$ και φαίνεται ότι $\lim_{x\to\pm\infty} = 1$. Ας εξετάσουμε αν αυτό είναι σωστό. Παίρνουμε

$$\lim_{x\to\pm\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sin t = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1, \qquad \left(\text{όπου } t = \frac{1}{x} \right)$$

από το γνωστό πλέον όριο. Κατά συνέπεια η συμπεριφορά της f_0 καθώς $x \to \pm\infty$ στο σχήμα αποδίδεται σωστά, δηλαδή η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f_0. Παρατηρήστε επίσης τη συμπεριφορά της f_0 γύρω από το $x = 0$ όπου σε κάθε τέτοιο διάστημα η συνάρτηση εμφανίζει άπειρες φορές το πλήρες προφίλ του ημιτόνου εγκλωβισμένου μεταξύ των ευθειών $y = \pm x$.



Σχήμα 2.2: Η συνάρτηση $f_0(x) = x\sin(1/x)$, $x \neq 0$ και $f_0(0) = 0$

Άσκηση 2.4. Αν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση η συνάρτηση απόλυτη τιμή $|f|$ ορίζεται με τη σχέση $|f|(x) = |f(x)|$.

(α΄) Αν η f είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα $[a, b]$, αποδείξτε ότι και η $|f|$ είναι συνεχής στο $[a, b]$.

(β΄) Εξετάστε αν ισχύει το αντίστροφο.

Συνέχεια και ακολουθίες

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα το οποίο περιέχει το x_0 και $x \to x_0$, τότε $f(x) \to f(x_0)$, κατά συνέπεια έχουμε το εξής αποτέλεσμα που αφορά στις ακολουθίες: *Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και (x_n) είναι μια ακολουθία σημείων του $[a, b]$ με $x_n \to x_0$, τότε $f(x_n) \to f(x_0)$, καθώς $n \to \infty$.* Ισχύει όμως και το αντίστροφο.

Πρόταση 2.2. *Η συνάρτηση $f : D(f) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in D(f)$ αν και μόνον αν για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του $D(f)$ με $x_n \to x_0$ έπεται ότι $f(x_n) \to f(x_0)$, δηλαδή η ακολουθία $(f(x_n))$*

συγκλίνει στο $f(x_0)$.

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in D(f)$ και έστω ότι η ακολουθία (x_n) σημείων του $D(f)$ συγκλίνει στο x_0. Δείχνουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$. Αν $\epsilon > 0$ από τη συνέχεια της f στο x_0 έπεται ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Επειδή $x_n \to x_0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x_0| < \delta$ για $n \geq N$, όμως τότε θα είναι και $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ για $n \geq N$, ισοδύναμα $f(x_n) \to f(x_0)$.
(2) Δείχνουμε ότι αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο $D(f)$ με $x_n \to x_0$ έπεται ότι $f(x_n) \to f(x_0)$, τότε η f είναι συνεχής στο x_0. Δίνουμε την απόδειξη με την εις άτοπο απαγωγή. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει x_δ με $|x_\delta - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Έτσι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in D(f)$ με $|x_n - x_0| < 1/n$ αλλά $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \epsilon$. Έτσι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει μεν στο x_0 αλλά η $(f(x_n))$ δεν συγκλίνει στο $f(x_0)$. Το αποτέλεσμα αυτό αντίκειται στην υπόθεση, είναι άτοπο και καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Κατά συνέπεια είναι και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παράδειγμα 2.13. Δείχνουμε ότι για $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Το αποτέλεσμα ισχύει για $x = 0$. Για $x > 0$ θέτουμε $t_n = n/x$, οπότε $t_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$. Έτσι γράφοντας

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \left[\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x$$

από τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης και το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 2.5 παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = \left[\lim_{t_n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x = e^x.$$

Για $x < 0$ θέτουμε $x = -t$, με $t > 0$ και γράφουμε για $n > t$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \left(\frac{n-t}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^n} = \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^{\frac{n-t}{t}}\right]^t}\frac{1}{\left(1 + \frac{t}{n-t}\right)^t}.$$

Συνεπώς θέτοντας $t_n = n/t - 1$ έχουμε

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^x.$$

Επειδή $t_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$, όπως στο προηγούμενο βήμα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\lim_{t_n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right]^x\left[\lim_{t_n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{t_n}\right)\right]^x = e^x.$$

Παράδειγμα 2.14. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$n\log\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big),\qquad n=1,2,3,\dots\quad a\in\mathbb{R}.$$

Γράφοτας

$$n\log\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big)=\frac{n}{2n+1}(2n+1)\log\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big)=\frac{n}{2n+1}\log\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big)^{2n+1}$$

και επειδή (βλέπε Παράδειγμα 2.13)

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big)^{2n+1}=e^a\qquad\text{και}\qquad\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$$

από τη συνέχεια της $\log x$ για $x>0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}n\log\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big)&=\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\Big)\Big(\lim_{n\to\infty}\log\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)^{2n+1}\Big)\\&=\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}\Big)\log\Big(\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{2n+1}\Big)^{2n+1}\Big)\\&=\frac{1}{2}\log e^a=\frac{a}{2}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.15. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n=\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big)^n,\qquad n=1,2,3,\dots\quad a\in\mathbb{R}.$$

Θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\Big[\Big(1+\frac{a}{2n+1}\Big)^{2n+1}\Big]^{n/(2n+1)}$$

και να συνεχίσουμε (πώς;). Φαίνεται όμως ευκολότερο να πάρουμε το λογάριθμο της a_n και στη συνέχεια να πάρουμε το όριο της $\log a_n$. Από το Παράδειγμα 2.14 έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\frac{a}{2}.$$

Από τη σχέση μεταξύ της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης, και τη συνέχεια και των δύο έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}e^{\log a_n}=e^{\lim_{n\to\infty}\log a_n}=e^{a/2}$$

Τρία χαρακτηριστικά όρια

Τα δύο όρια

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad\qquad\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=0,$$

βλέπε Παράδειγμα 2.3 και Παράδειγμα 2.4, είναι χαρακτηριστικά και θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα στο επόμενο κεφάλαιο. Ένα τρίτο, ανάλογο, όριο περιέχεται στο

Παράδειγμα 2.16. Δείχνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

ΒΗΜΑ 1. Αποδεικνύουμε ότι

$$1+x\le e^x\le \frac{1}{1-x},\qquad 0\le x<1. \tag{2.1}$$

Η ανισότητα ισχύει ως ισότητα για $x=0$, οπότε ας υποθέσουμε ότι $0<x<1$. Για $n\in\mathbb{N}$ από μεν την ανισότητα Bernoulli, $(1+a)^n\ge 1+na$ για $a\ge -1$, έχουμε

$$1+x\le\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

και από το δυωνυμικό Θεώρημα, βλέπε Παράδειγμα 1.8,

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{x^k}{n^k}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)x^k\\ &\le 1+\sum_{k=1}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\\ &\le\frac{1}{1-x}.\end{aligned}$$

Έτσι για κάθε φυσικό αριθμό n και για $0\le x<1$ έχουμε

$$1+x\le\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\le\frac{1}{1-x}$$

και η (2.1) προκύπτει παίρνοντας το όριο $n\to\infty$, από την ιδιότητα της παρεμβολής αφού $(1+x/n)^n\to e^x$, από το Παράδειγμα 2.13.

ΒΗΜΑ 2. Από την (2.1) παίρνουμε

$$x\le e^x-1\le\frac{x}{1-x}\Rightarrow 1\le\frac{e^x-1}{x}\le\frac{1}{1-x}$$

για $0<x<1$, επομένως

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Αν τώρα $-1<x<0$, θετοντας $y=-x$ έχουμε

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^{-y}-1}{-y}=e^{-y}\frac{1-e^y}{-y}=e^{-y}\frac{e^y-1}{y},\qquad 0<y<1,$$

οπότε από την συνέχεια της e^x και την ύπαρξη του από τα δεξιά πλευρικού ορίου έπεται ότι και το από τα αριστερά πλευρικό όριο υπάρχει και

$$\lim_{x\to 0-}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0+}e^{-y}\frac{e^y-1}{y}=e^0 1=1.$$

Συνεπώς ο ισχυρισμός για την ύπαρξη και την τιμή του ορίου επιβεβαιώνεται.

Παρατήρηση 2.4. Από το δυωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} = 1+x+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{n^k} \geq 1+x$$

για κάθε $x \geq 0$, η οποία είναι η αριστερή ανισότητα στην (2.1).

2.3 Βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις

Θεώρημα 2.7. *Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο διάστημα γύρω από το x_0 ή με άκρο το x_0 και $f(x_0) > 0$ (ή $f(x_0) < 0$), τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) > 0$ (ή $f(x_0) < 0$) για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Στη περίπτωση που το x_0 είναι άκρο του διαστήματος η f διατηρεί το πρόσημο του $f(x_0)$ σε διάστημα της μορφής $[x_0, x_0 + \delta)$, ή $(x_0 - \delta, x_0]$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό στην περίπτωση όπου το x_0 δεν είναι άκρο και αφήνουμε τις περιπτώσεις όπου το x είναι άκρο του διαστήματος ως άσκηση. Έστω ότι $f(x_0) = \epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad |x - x_0| < \delta, \quad \text{τότε} \quad -\epsilon/2 < f(x) - f(x_0) < \epsilon/2,$$

κατά συνέπεια για $|x - x_0| < \delta$ είναι

$$f(x) > f(x_0) - \epsilon/2 = \epsilon/2 > 0,$$

που είναι ό,τι θέλαμε να δείξουμε. Η απόδειξη για $f(x_0) < 0$ είναι ανάλογη. □

Θεώρημα 2.8 (Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής). *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και $f(a) \neq f(b)$. Αν $f(a) = A$ και $f(b) = B$ και το C είναι αυστηρά μεταξύ A και B, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $c \in (a, b)$ ώστε $f(c) = C$.*

Απόδειξη. Έστω ότι $A < C < B$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$S_1 = \{x \in [a, b] : f(x) < C\}, \qquad S_2 = \{x \in [a, b] : f(x) > C\}.$$

Από την υπόθεση, έχουμε ότι $a \in S_1$ και $b \in S_2$, κατά συνέπεια τα S_1 και S_2 είναι μη κενά υποσύνολα του $[a, b]$, οπότε υπάρχουν σημεία c_1 και c_2 του $[a, b]$ ώστε

$$c_1 = \sup S_1, \qquad \text{και} \qquad c_2 = \inf S_2.$$

Είναι προφανές ότι $c_1 \leq c_2$. Δείχνουμε ότι $c_1 = c_2 = c$ και ότι $f(c) = C$. Ας υποθέσουμε ότι $c_1 < c_2$, τότε $c_1 < (c_1 + c_2)/2 < c_2$. Στη περίπτωση αυτή θα πρέπει να ισχύει $f((c_1 + c_2)/2) \geq C$, άρα $(c_1 + c_2)/2 \geq c_2$ επομένως $c_1 \geq c_2$, τό οποίο είναι άτοπο αφου $c_1 < c_2$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $c_1 < c_2$, κατά συνέπεια θα είναι $c_1 = c_2$. Έστω $c_1 = c_2 = c$, οπότε $a < c < b$. Από τον ορισμό του c υπάρχουν ακολουθίες (x_n^1) και (x_n^2) με $x_n^1 \in S_1$ και $x_n^2 \in S_2$, και $x_n^1 \to c$ και $x_n^2 \to c$. Από τη συνέχεια της f έπεται ότι $f(x_n^1) \to f(c)$ άρα $f(c) \leq C$ και $f(x_n^2) \to f(c)$ άρα $f(c) \geq C$, κατά συνέπεια $f(c) = C$. Η απόδειξη όταν $A > C > B$ είναι ανάλογη. □

Πόρισμα 2.2. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και $f(a)f(b) < 0$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Απόδειξη. Στη περίπτωση αυτή είναι είτε $f(a) < 0 < f(b)$, είτε $f(a) > 0 > f(b)$, οπότε το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής. □

Θεώρημα 2.9 (Θεώρημα του σταθερού σημείου). *Εάν η $f : [0, 1] \to [0, 1]$ είναι συνεχής τότε υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Αν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$ δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι. Έστω λοιπόν ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$. Η g είναι συνεχής, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, και $g(0) = f(0) - 0 > 0$ και $g(1) = f(1) - 1 < 0$, άρα από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ με $g(x_0) = 0$, ισοδύναμα $f(x_0) = x_0$. □

Λήμμα 2.1. *Αν η f είναι συνεχής στο σημείο a, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο διάστημα $(a - \delta, a + \delta)$, υπάρχουν δηλαδή σταθερές m και M, ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in (a - \delta, a + \delta)$.*

Απόδειξη. Από τη συνέχεια της f στο a υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad |x - a| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(a)| < 1,$$

έτσι αν $x \in (a - \delta, a + \delta)$, τότε $f(a) - 1 < f(x) < f(a) + 1$, που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.10. *Αν η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$, τότε είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό, υπάρχουν δηλαδή σταθερές m και M, ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a, b]$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.1 έπεται ότι η f είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα $[a, a + \delta_1)$, με $a + \delta_1 \leq b$ και $\delta_1 > 0$.

(i) Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x : a \leq x \leq b \text{ με } f \text{ φραγμένη στο } [a, x]\}.$$

Τότε $[a, a + \delta_1) \subseteq A \subseteq [a, b]$, δηλαδή το A είναι μη κενό και φραγμένο σύνολο κατά συνέπεια υπάρχει το supremum του A, έστω λοιπόν $s = \sup A$. Τότε $a < s \leq b$.

(ii) Δείχνουμε ότι $s = b$. Ας υποθέσουμε ότι $s < b$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο διάστημα $(s - \delta, s + \delta)$. Επειδή $s = \sup A$ υπάρχει $x^* \in A$ με $s - \delta < x^*$. Έτσι η f είναι φραγμένη στο $[x^*, s + \delta/2]$, άρα $s + \delta/2 \in A$, που είναι άτοπο αφού $s = \sup A$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $\sup A < b$, άρα $b = \sup A$.

(iii) Δείχνουμε ότι $b \in A$. Στο (ii) δείξαμε ότι η f είναι φραγμένη σε διάστημα $[a, b - \epsilon]$ για κάθε $\epsilon > 0$ και από το Λήμμα 2.1 έχουμε ότι η f είναι φραγμένη σε κάποιο διάστημα $(b - \delta_2, b]$, με $\delta_2 > 0$, κατά συνέπεια η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, άρα $b \in A$.

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 2.11. *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$. Τότε η f παίρνει την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της στο διάστημα αυτό, δηλαδή υπάρχουν σημεία x_1 και x_2 στο $[a,b]$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Γράφουμε*

$$f(x_1) = \min_{a\leq x\leq b} f(x), \qquad f(x_2) = \max_{a\leq x\leq b} f(x)$$

Απόδειξη. Εάν η f είναι σταθερή στο $[a,b]$ το συμπέρασμα του θεωρήματος ισχύει. Θεωρούμε λοιπόν την περίπτωση όπου η f δεν είναι σταθερή. Θέτοντας $I = [a,b]$, από το Θεώρημα 2.10 έπεται ότι η εικόνα $f(I)$ είναι φραγμένο και μη κενό σύνολο κατά συνέπεια υπάρχουν το supremum και το infimum του $f(I)$. Έστω $\beta = \sup f(I)$. Δείχνουμε ότι υπάρχει $x_2 \in I$ ώστε $f(x_2) = \beta$. Ας υποθέσουμε ότι $f(x) \neq \beta$ για κάθε $x \in I$. Τότε $\beta - f(x) > 0$ για κάθε $x \in I$ και η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{\beta - f(x)}, \qquad x \in I$$

είναι συνεχής στο I, άρα και φραγμένη από το Θεώρημα 2.10, επομένως υπάρχουν σταθερές $0 \leq m_1 < m_2$, ώστε

$$m_1 \leq \frac{1}{\beta - f(x)} \leq m_2, \qquad x \in I$$

κατά συνέπεια

$$\frac{1}{m_2} \leq \beta - f(x) \Rightarrow f(x) \leq \beta - \frac{1}{m_2} \qquad \forall x \in I.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\beta = \sup f(I)$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $f(x) \neq \beta$ για κάθε $x \in I$, άρα υπάρχει $x_2 \in I$ ώστε $f(x_2) = \beta$. Η απόδειξη για το infimum είναι ανάλογη. □

Παρατήρηση 2.5. Συνέπεια των Θεωρημάτων 2.8 και 2.11 είναι ότι η εικόνα διαστήματος μέσω συνεχούς συνάρτησης είναι διάστημα, ειδικότερα αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a,b]$, τότε $f([a,b]) = [\alpha,\beta]$, όπου $\alpha = \inf f([a,b])$ και $\beta = \sup f([a,b])$.

Παράδειγμα 2.17 (Ύπαρξη του αριθμού $\sqrt{2}$). Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής για να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός c ώστε $c^2 = 2$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ η οποία ορίζεται και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Πράγματι αν $x_2 > x_1 \geq 0$, έχουμε $x_2 - x_1 > 0$ και

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) \geq x_2(x_2 - x_1) > 0$$

από την υπόθεση. Επειδή $f(1) = 1 - 2 = -1 < 0$ και $f(2) = 4 - 2 = 2 > 0$, από το Θεώρημα της Ενδιάμεσης Τιμής έπεται ότι υπάρχει $c \in (1,2)$ ώστε $f(c) = 0$ ή ισοδύναμα $c^2 = 2$, ή ισοδύναμα $c = \sqrt{2}$. Η μοναδικότητα του σημείου c έπεται από το γεγονός ότι η f είναι ένα προς ένα ως γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[0,+\infty)$.

2.3.1 Μια εφαρμογή: Η μέθοδος της διχοτόμησης

Δείχνουμε πως το αποτέλεσμα ύπαρξης ρίζας μιας εξίσωσης $f(x) = 0$, του Πορίσματος 2.2, μπορεί να δώσει και τρόπο προσέγγισης της ρίζας. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ και ότι $f(a)f(b) < 0$.

1. Θέτουμε $a_0 = a$, $b_0 = b$ και $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Αν $f(c_0) = 0$ η ρίζα εντοπίστηκε. Αν $f(c_0) \neq 0$ τότε $f(a_0)f(c_0) < 0$, ή $f(c_0)f(b_0) < 0$, διαφορετικά οι $f(a_0), f(c_0), f(b_0)$ θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι $f(a_0)f(c_0) < 0$.

2. Θέτουμε $a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ και $c_1 = (a_1+b_1)/2$. Αν $f(c_1) = 0$ η ρίζα εντοπίστηκε. Αν $f(c_1) \neq 0$ τότε $f(a_1)f(c_1) < 0$, ή $f(c_1)f(b_1) < 0$, διαφορετικά οι $f(a_1), f(c_1), f(b_1)$ θα ήταν ομόσημοι πράγμα άτοπο από την υπόθεση. Ας υποθέσουμε ότι $f(c_1)f(b_1) < 0$.

3. Θέτουμε $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$ και $c_2 = (a_2 + b_2)/2$ και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Έτσι προκύπτουν

(i) Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, με $a < c_n < b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

(ii) Μια ακολουθία διαστημάτων $(I_n)_{n=1}^{\infty}$, με $I_n = [a_n, b_n]$, όπου ένα από τα άκρα είναι το c_{n-1}, για τα οποία ισχύει ότι $I_n \subset I_{n+1}$ και επιπλέον αν με $|I_n|$ συμβολίσουμε το μήκος του I_n, τότε

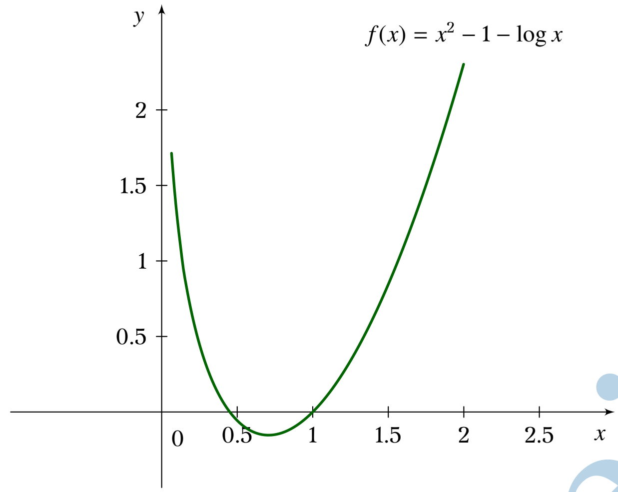
$$|I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}| = \frac{1}{2^n}(b - a).$$

Παρατηρούμε ότι αν ξ είναι η ρίζα που περιέχεται σε κάθε I_n τότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει N ώστε

$$|\xi - c_n| < \frac{1}{2^n}(b - a) < \frac{1}{2^N}(b - a) < \epsilon \tag{2.2}$$

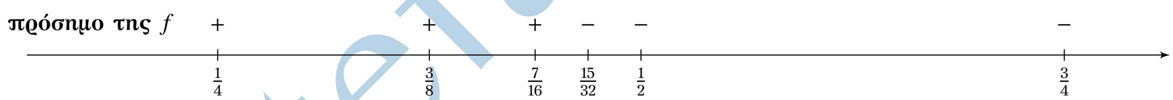
για $n > N$, κατά συνέπεια η ακολουθία $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στη ρίζα ξ της $f(x) = 0$. Βλέπε επίσης την απόδειξη του Θεωρήματος ;;. Επιπλέον η (2.2) παρέχει το σφάλμα της προσέγγισης της ρίζας.

Παράδειγμα 2.18. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1 - \log x$ ορίζεται για $x > 0$ και είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Ενδιαφερόμαστε να βρούμε ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$ και από το Σχήμα 2.3 φαίνεται ότι υπάρχει και δεύτερη ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$ για την ακρίβεια κοντά στο 0.5.



Σχήμα 2.3: Σχετικά με τις ρίζες της $x^2 - 1 - \log x = 0$

Υπολογίζουμε $f(1/4) \approx 0.448794$ και $f(3/4) \approx -0.149818$, άρα υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(1/4, 3/4)$. Είναι $c_0 = (1/4 + 3/4)/2 = 1/2$ και $f(1/2) \approx -0.056853$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(1/4, 1/2)$. Είναι $c_1 = (1/4+2/4)/2 = 3/8$ και $f(3/8) \approx 0.121454$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(3/8, 1/2)$. Είναι $c_2 = (3/8 + 2/4)/2 = 7/16$ και $f(7/16) \approx 0.018085$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(7/16, 1/2)$. Η δεύτερη ρίζα περιέχεται στο $(0.4375, 0.5)$. Είναι $c_3 = (7/16 + 1/2)/2 = 15/32$ και $f(15/32) \approx -0.022588$, κατά συνέπεια υπάρχει ρίζα της εξίσωσης στο $(7/16, 15/32)$. Η δεύτερη ρίζα περιέχεται στο $(0.4375, 0.46875)$. Βλέπε Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Η διαδικασία της διχοτόμησης για τον εντοπισμό ρίζας της $x^2 - 1 - \log x = 0$

Τα διαστήματα εντοπισμού της ρίζας είναι τα

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right], \qquad \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \qquad \left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right], \qquad \left[\frac{7}{16}, \frac{1}{2}\right], \qquad \left[\frac{7}{16}, \frac{15}{32}\right], \qquad \ldots$$

2.4 Μονοτονία και συνέχεια

Πρόταση 2.3. *Εάν η f είναι μια γνησίως μονότονη πραγματική συνάρτηση σε διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, τότε η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(I) \to I$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αυστηρά αύξουσα. Έστω $y_0 \in f(I)$ και έστω $\epsilon > 0$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για $y \in f(I)$

$$\text{αν} \quad |y - y_0| < \delta, \qquad \text{τότε} \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon.$$

Αν $x_0 = f^{-1}(y_0)$ δεν είναι άκρο του I, τότε υπάρχουν σημεία $a, b \in I$ με

$$x_0 - \epsilon < a < x_0 < b < x_0 + \epsilon.$$

Από την μονοτονία της f έπεται ότι $f(a) < y_0 < f(b)$. Έστω $\delta = \min\{y_0 - f(a), f(b) - y_0\}$ και έστω $|y - y_0| < \delta$, ισοδύναμα $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, τότε

$$f(a) \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq f(b),$$

οπότε από τη μονοτονία της f^{-1} έπεται ότι $a < f^{-1}(y) < b$, έτσι

$$a - f^{-1}(y_0) < f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) < b - f^{-1}(y_0) \Rightarrow -\epsilon < a - x_0 < f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) < b - x_0 < \epsilon$$

ή $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$, που είναι ότι θέλαμε να αποδείξουμε. Η περίπτωση όπου το x_0 είναι άκρο του διαστήματος αφήνεται ως άσκηση. □

Πρόταση 2.4. *Εάν η f είναι μια συνεχής και ένα-προς-ένα πραγματική συνάρτηση σε διάστημα I, $f : I \to \mathbb{R}$, τότε είναι γνησίως μονότονη.*

Απόδειξη. Έστω $a, b \in I$ με $a < b$. Από την ένα-προς-ένα ιδιότητα έπεται ότι $f(a) \neq f(b)$. Αν $f(a) < f(b)$, δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Με ανάλογο τρόπο δείχνεται ότι αν $f(a) > f(b)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ΒΗΜΑ 1. Έστω $a < \xi < b$ και $f(a) < f(b)$. Δείχνουμε ότι $f(a) < f(\xi) < f(b)$. Δίνουμε την απόδειξη με την εις άτοπο απαγωγή. Θα δείξουμε ότι υποθέτοντας ότι $f(\xi) \leq f(a)$ ή $f(b) \leq f(\xi)$ θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από την ένα-προς-ένα ιδιότητα οι υποθέσεις μας είναι $f(\xi) < f(a) < f(b)$ ή $f(a) < f(b) < f(\xi)$.

(i) Έστω $f(\xi) < f(a) < f(b)$. Στην περίπτωση αυτή από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (\xi, b)$ με $f(x) = f(a)$ οπότε θα πρέπει να είναι $x = a$ πράγμα άτοπο αφού $a < \xi$.

(ii) Έστω $f(a) < f(b) < f(\xi)$. Πάλι το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής εξασφαλίζει την ύπαρξη σημείου $x \in (a, \xi)$ με $f(x) = f(b)$, όπου πάλι οδηγούμαστε σε άτοπο αφού θα πρέπει να είναι $x = b$ και $\xi < b$.

Δείξαμε λοιπόν ότι αν $a < \xi < b$, και $f(a) < f(b)$, τότε $f(a) < f(\xi) < f(b)$. Με ανάλογο τρόπο δείχνεται ότι αν $a < \xi < b$ και $f(a) > f(b)$, τότε $f(a) > f(\xi) > f(b)$.

ΒΗΜΑ 2. Έστω $x_1 < x_2$ σημεία στο I.

(i) Τα x_1, x_2 δεν είναι άκρα. Έστω $a, b \in I$ με $a < x_1 < x_2 < b$, και ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Από το Βήμα 1 έχουμε $f(a) < f(x_1) < f(b)$, και $f(a) < f(x_2) < f(b)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(x_2) < f(x_1)$, τότε $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$ και από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (a, x_1)$ με $f(\xi) = f(x_2)$ οπότε $\xi = x_2$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $x_1 < x_2$. Κατά συνέπεια έχουμε $f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$. Με ανάλογο τρόπο δείχνεται ότι αν $a < x_1 < x_2 < b$, και $f(a) > f(b)$, τότε $f(a) > f(x_1) > f(x_2) > f(b)$.

(ii) Το x_1 είναι άκρο και το x_2 δεν είναι άκρο. Έστω $b \in I$ με $x_1 < x_2 < b$. Αν $f(x_1) < f(b)$ από το Βήμα 1 έχουμε $f(x_1) < f(x_2) < f(b)$, ενώ αν $f(x_1) > f(b)$, τότε $f(x_1) > f(x_2) > f(b)$.

(iii) Αν τα x_1, x_2 είναι άκρα, τότε δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5. Η υπόθεση εξασφαλίζει την ύπαρξη της $f^{-1} : f(I) \to I$. Από την Πρόταση 2.4 έπεται ότι η f είναι γνησίως μονότονη και αφού είναι ορισμένη σε διάστημα από την Πρόταση 2.3 έπεται ότι η αντίστροφη συνάρτηση είναι συνεχής. □

2.5 Ομοιόμορφη συνέχεια

Παράδειγμα 2.19. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, με $x \in (0, 1)$ δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για x_1, x_2 στο $(0, 1)$

$$\text{αν} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon. \tag{2.3}$$

Αν x_1 και x_2 είναι σημεία του $(0, 1)$ έχουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \le 2|x_1 - x_2| \tag{2.4}$$

έτσι για δοσμένο $\epsilon > 0$ επιλέγοντας $\delta = \epsilon/2$ η (2.3) έπεται από την (2.4).

Παρατήρηση 2.6. Στο Παράδειγμα 2.19 είδαμε ότι η επιλογή του δ είναι ανεξάρτητη του σημείου συνεχείας και εξαρτάται μόνο από το ϵ, έτσι ώστε η συνθήκη της συνέχειας να ισχύει ομοιόμορφα σε ολόκληρο το διάστημα.

Ορισμός 2.10. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** σε κάποιο διάστημα I αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ (το οποίο εξαρτάται μόνο από το ϵ), ώστε

$$\text{αν} \quad |x_1 - x_2| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

με $x_1, x_2 \in I$.

Παράδειγμα 2.20. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(a, +\infty)$, όπου $a > 0$.

Αν $x_1 > a$ και $x_2 > a$, βρίσκουμε

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}\right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2},$$

αφού $x_1 x_2 > a^2$. Έτσι για $\epsilon > 0$ και $\delta = a^2\epsilon$ έπεται ότι αν $|x_1 - x_2| < \delta$, τότε

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{a^2} < \frac{\delta}{a^2} = \epsilon,$$

κατά συνέπεια η συνάρτηση $1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(a, +\infty)$. Σημειώνουμε ότι η $1/x$ είναι, επίσης, ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $[a, +\infty)$.

Παράδειγμα 2.21. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = 1/x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0, 1)$.

Δείχνουμε ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε για κάθε $\delta > 0$ ενώ $|x_1 - x_2| < \delta$ έπεται ότι $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon$. Έστω $x \in (0, 1)$ και έστω $\delta > 0$. Για κάποιο $r \in (0, 1)$ θέτουμε $x_1 = x$ και $x_2 = x + r\delta$, τότε $|x_1 - x_2| = r\delta < \delta$ και

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x + r\delta}\right| = \frac{r\delta}{x(x + r\delta)}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \to 0+} \frac{r\delta}{x(x + r\delta)} = +\infty$$

ειδικά για $x < \min\{r\delta, 1/2\}$ έχουμε

$$\frac{r\delta}{x + r\delta} > \frac{1}{r\delta + r\delta} = \frac{1}{2} > x \Rightarrow \frac{r\delta}{x(x + r\delta)} \geq 1.$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για $\epsilon = 1$ και για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε σημεία x_1 και x_2 στο $(0, 1)$ ώστε

$$|x_1 - x_2| < \delta \qquad \text{αλλά} \qquad |f(x_1) - f(x_2)| \geq 1$$

που είναι το ζητούμενο.

Πρόταση 2.5. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, όπου I είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$. Εάν $[a, b] \subset I$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. Διαφορετικά, μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό.*

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει $\epsilon > 0$ και ακολουθίες σημείων (x_n) και (y_n) στο $[a, b]$ ώστε

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{και} \qquad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon.$$

Η ακολουθία (x_n) είναι φραγμένη, αφού $a \le x_n \le b$, κατά συνέπεια έχει συγκλίνουσα υπακολουθία έστω (x_{n_k}) με $x_{n_k} \to z$, για κάποιο $z \in [a,b]$. Από τη σχέση

$$|y_{n_k} - z| \le |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - z| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - z|$$

έπεται ότι $y_{n_k} \to z$. Από τη συνέχεια της f έπεται ότι $f(x_{n_k}) \to f(z)$ και $f(y_{n_k}) \to f(z)$, επομένως για $k \ge k_0$ θα είναι

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \epsilon.$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, και καταλήξαμε σε αυτό επειδή υποθέσαμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. □

Άσκηση 2.5. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$. Ορίζουμε

$$\|f\| := \max_{a \le x \le b} |f(x)|.$$

Αποδείξτε ότι ισχύει κάθε μια από τις σχέσεις:

(i) $\|f\| = 0$ αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

(ii) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ για κάθε σταθερά $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ για κάθε συνάρτηση g συνεχή στο $[a,b]$.

Καμπύλες

Εάν το I είναι διάστημα και $f_k : I \to \mathbb{R}$, με $k = 1, 2, \ldots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται με τη σχέση

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

λέγεται **καμπύλη**. Αν $n = 2$ έχουμε μια καμπύλη στο επίπεδο, ενώ αν $n = 3$ έχουμε καμπύλη στο χώρο.

Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, παρατηρούμε ότι το γράφημα της f, $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in I\}$, είναι το πεδίο τιμών μια ειδικής περίπτωσης επίπεδης καμπύλης της

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)), \qquad x \in I,$$

αφού η ταυτοτική συνάρτηση $\tau : I \to \mathbb{R}$, με $\tau(x) = x$ είναι συνεχής στο I. Πολλές φορές, καταχρηστικά, λέμε καμπύλη την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, δηλαδή το γεωμετρικό αντικείμενο το οποίο είναι η αποτύπωση του γραφήματος της f. Για καμπύλες θα μιλήσουμε αναλυτικότερα σε επόμενα κεφάλαια.

Ασυνέχειες και συνέχεια κατά τμήματα

Ας εξετάσουμε τι σημαίνει μια συνάρτηση να είναι ασυνεχής σε σημείο του πεδίου ορισμού της. Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα I είναι συνεχής στο $x_0 \in I$ αν

(1) $f(x_0)$ υπάρχει

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει, και

(3) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Δεδομένου ότι στο x_0 η f ορίζεται, η f είναι ασυνεχής στο x_0 εάν δεν ισχύει η σχέση (2) ή η (3).

Ορισμός 2.11. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα $[a, b]$. Θα λέμε ότι

(1) Η f έχει **ασυνέχεια α είδους**, ή **απλή ασυνέχεια** (simple discontinuity)

  (α΄) στο $x_0 \in (a, b)$ εάν τα όρια $f(x_0-)$ και $f(x_0+)$ υπάρχουν, αλλά είτε $f(x_0-) \neq f(x_0+)$, ή $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$.

  (β΄) στο άκρο a εάν το $f(a+)$ υπάρχει αλλά $f(a+) \neq f(a)$.

  (γ΄) στο άκρο b εάν το $f(b-)$ υπάρχει αλλά $f(b-) \neq f(b)$.

(2) Η f έχει **ασυνέχεια β** είδους, ή **ουσιώδη ασυνέχεια** (essential discontinuity)

  (α΄) στο $x_0 \in (a, b)$ εάν τουλάχιστον ένα από τα όρια $f(x_0-)$ ή $f(x_0+)$ δεν υπάρχει.

  (β΄) στο άκρο a εάν το $f(a+)$ δεν υπάρχει.

  (γ΄) στο άκρο b εάν το $f(b-)$ δεν υπάρχει.

Ορισμός 2.12. Μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα $[a, b]$ θα λέμε ότι έχει **ασυνέχεια άλματος** (jump discontinuity)

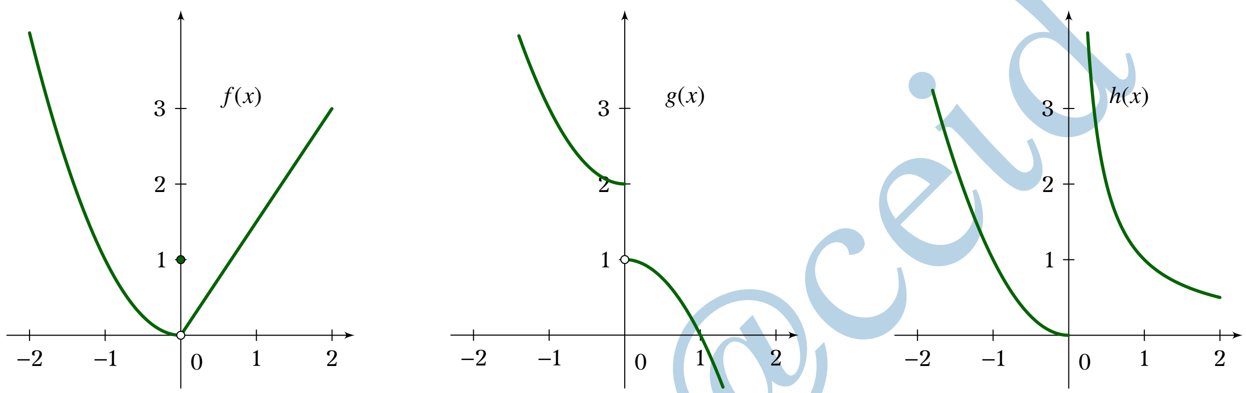
(1) στο $x_0 \in (a, b)$ εάν τα πλευρικά όρια $f(x_0-)$ και $f(x_0+)$ υπάρχουν αλλά $f(x_0-) \neq f(x_0+)$.

(2) στο ένα από, ή και στα δύο άκρα αν έχει εκεί απλή ασυνέχεια.

Παράδειγμα 2.22. Κάθε μια από τις συναρτήσεις f, g και h με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & x \le 0 \\ 1 - x^2 & x > 0 \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ 1/x & x > 0 \end{cases}$$

ορίζεται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία και είναι ασυνεχής στο $x = 0$.



Σχήμα 2.5: Είδη ασυνέχειας

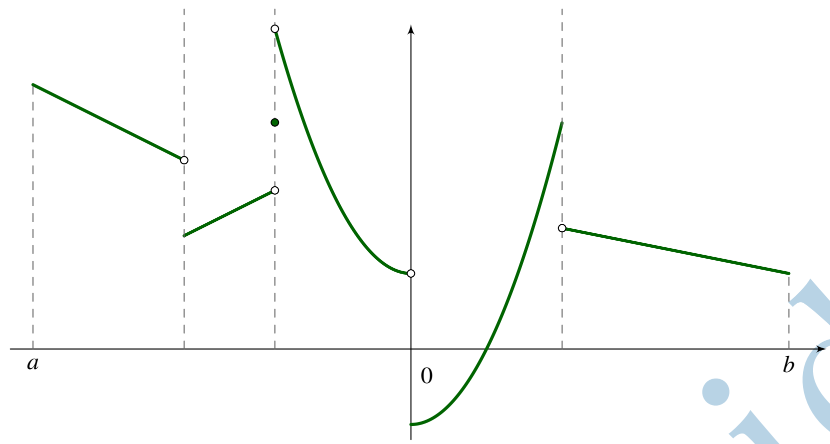
(i) Για τη μέν f έχουμε ότι τα πλευρικά όρια $f(0-)$ και $f(0+)$ υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους αλλά διαφέρουν από την τιμή $f(0)$. Η ασυνέχεια είναι α είδους η οποία στην περίπτωση αυτή χαρακτηρίζεται ως **αιρόμενη**, ή **απαλείψιμη** (removable) αφού αν ορίσουμε $f(0) = 0$ η συνάρτηση γίνεται συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(ii) Για τη δε g έχουμε ότι $g(0-) = 2 \neq 1 = g(0+)$ κατά συνέπεια η g παρουσιάζει άλμα στο $x = 0$. Η ασυνέχεια είναι α είδους.

(iii) Για την h έχουμε ότι $h(0-) = 0$ αλλά το $h(0+)$ δεν υπάρχει ως πραγματικός αριθμός, κατά συνέπεια η h παρουσιάζει ασυνέχεια β είδους στο $x = 0$.

Ορισμός 2.13. Μια συνάρτηση f λέγεται **τμηματικά συνεχής** στο διάστημα $[a, b]$ εάν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$ εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων στα οποία έχει ασυνέχεια α είδους.

Έτσι αν μια f είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[a, b]$ το διάστημα μπορεί να χωριστεί σε ανοικτά υποδιαστήματα σε καθένα από τα οποία η f είναι συνεχής και τα πλευρικά όρια στα άκρα των υποδιαστημάτων υπάρχουν. Για παράδειγμα η $f(x) = \tan x$ και $f(\pi/2) = 0$ δεν είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \pi]$ αφού τα πλευρικά όρια στο $x = \pi/2$ δεν υπάρχουν.



Σχήμα 2.6: Μια κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση

Ασκήσεις

1. Να υπολογισθούν τα όρια

   (α΄) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$

   (β΄) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x-1}$

   (γ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

   (δ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

   (ε΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

   (ϛ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

   (ζ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$

   (η΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 4x}$

2. Δείξτε ότι αν το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει, τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h).$$

3. Δείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνον αν $\lim_{x\to x_0}(f(x)-\ell) = 0$.

4. Αποδείξτε τον ισχυρισμό ή δώστε αντιπαράδειγμα

   (α΄) Εάν το όριο $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπάρχει τότε τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχουν.

   (β΄) Εάν τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ υπάρχουν τότε το όριο $\lim_{x\to x_0} g(x)$ υπάρχει.

5. Επάνω στον χάρτη της Ελλάδας ζωγραφήστε ένα κύκλο ο οποίος περιέχεται στην επικράτεια. Δείξτε ότι σε κάθε χρονική στιγμή υπάρχουν δύο διαμετρικά αντίθετες τοποθεσίες οι οποίες έχουν ίδια θερμοκρασία. **Υπόδειξη**: Αν $T(\theta)$ είναι η θερμοκρασία τοποθεσίας επάνω στην περιφέρεια, όπου θ είναι η απόστασή της κατά μήκος της περιφέρειας από σταθερό σημείο της περιφέρειας, θεωρήστε τη συνάρτηση $f(\theta) = T(\theta) - T(\theta + \pi)$.

6. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ και τέτοια ώστε $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο x στο $[0,1]$ ώστε $f(x) = f(x+1/2)$. **Υπόδειξη**: Θεωρήστε την $g(x) = f(x) - f(x+1/2)$.

7. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{-x^2} = x$ έχει μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

8. Δείξτε ότι η εξίσωση $e^{-x^2} = ax$ έχει ρίζα για κάθε πραγματικό αριθμό a διάφορο του μηδενός.

Κεφάλαιο 3

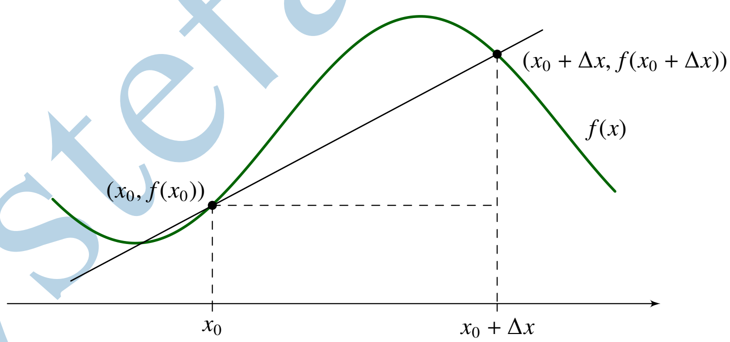
Παράγωγοι

3.1 Η παράγωγος συνάρτησης

Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$ θεωρούμε το πηλίκο διαφορών

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.1}$$

το οποίο εκφράζει το λόγο των διαφορών της εξαρτημένης μεταβλητής $y = f(x)$ προς την ανεξάρτητη x στο x_0 καθώς αυτή μεταβάλεται από x_0 σε $x_0 + \Delta x$, ώστε $a < x_0 + \Delta x < b$. Γεωμετρικά το πηλίκο αυτό δίνει την κλίση της ευθείας δια των σημείων $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.



Ορισμός 3.1. Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$ θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο $x = x_0$ αν το όριο

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει, είναι δηλαδή πραγματικός αριθμός. Το όριο $f'(x_0)$ λέγεται **παράγωγος της f στο x_0**. Εάν το όριο αυτό δεν υπάρχει ή είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$ θα λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Θεώρημα 3.1. *Αν η f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a,b) και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ τότε είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Πράγματι γράφοντας

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

και παίρνοντας το όριο του $x \to x_0$ βρίσκουμε

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0$$

απ΄ όπου απορρέει το ζητούμενο. □

Πλευρικές παράγωγοι

Ορισμός 3.2. Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$, η **παράγωγος από αριστερά** της f στο x_0 ορίζεται να είναι το όριο

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

εφόσον αυτό υπάρχει. Όμοια η **παράγωγος από δεξιά** της f στο x_0 ορίζεται να είναι το όριο

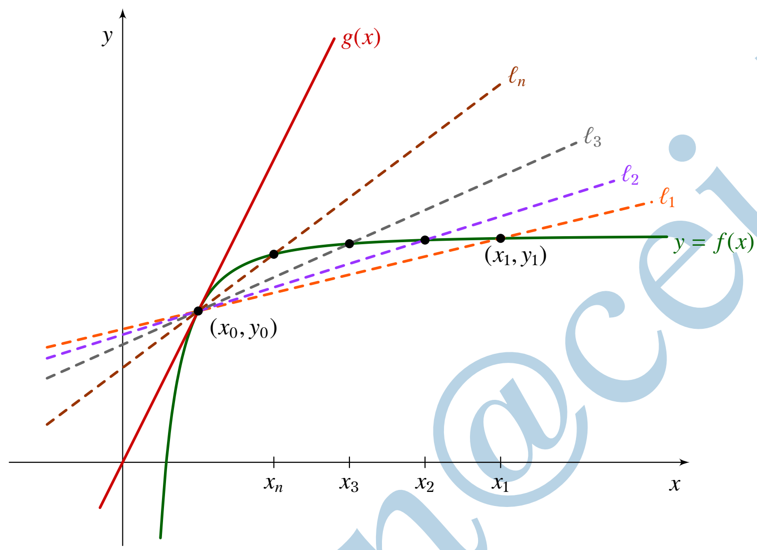
$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

εφόσον αυτό υπάρχει. Η παράγωγος από αριστερά και η παράγωγος από δεξιά της f στο σημείο x_0 λέγονται **πλευρικές παράγωγοι** της f στο x_0.

Σημειώνουμε ότι η παράγωγος της f στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Αν η f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό αν είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και οι πλευρικές παράγωγοι $f'_+(a)$ και $f'_-(b)$ υπάρχουν, ως πραγματικοί αριθμοί, και οι δύο.

Γεωμετρική σημασία της παραγώγου

Από το σχόλιο στην εισαγωγή του κεφαλαίου και τον ορισμό της παραγώγου έπεται ότι η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ στο γράφημα της $y = f(x)$. Έτσι αν (x, y) είναι ένα σημείο της ευθείας αυτής τότε



Σχήμα 3.1: Η εφαπτόμενη ευθεία $g(x)$ στη γραφική παράσταση της f στο (x_0, y_0), ως όριο των τεμνουσών ευθειών ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ... με κλίσεις, αντίστοιχα, $(f(x_k) - y_0)/(x_k - x_0)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, και γενικά $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h$ με $h \to 0$

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

κατά συνέπεια η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3.2}$$

Φυσική σημασία της παραγώγου

Το πηλίκο διαφορών στην (3.1) είναι πηλίκο μεταβολών κατά συνέπεια εκφράζει το μέσο ρυθμό μεταβολής. Έτσι αν το όριο του πηλίκου καθώς $\Delta x \to 0$ υπάρχει αυτό είναι ο ρυθμός μεταβολής ως πρός x στο x_0 της ποσότητας που περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$.

Η παράγωγος ως συνάρτηση

Εάν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (a, b) θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο διάστημα (a, b). Στη περίπτωση αυτή η σχέση

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

παράγει μια νέα συνάρτηση την f' η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο του (a, b) και λέγεται **παράγωγος της f στο (a, b)**.

Παράδειγμα 3.1. Να βρεθεί, αν αυτή υπάρχει, η παράγωγος της $f(x) = x^2$ στο $x = x_0$.

Η f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε διαμορφώνοντας το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0 + h$$

βλέπουμε ότι το όριο καθώς $h \to 0$ υπάρχει και

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h) = 2x_0,$$

συνεπώς $f'(x_0) = 2x_0$.

Επειδή το x_0 είναι τυχαίο συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x$, ισοδύναμα $(x^2)' = 2x$.

Άσκηση 3.1. Εξετάστε πώς μεταβάλλεται το εμβαδόν κύκλου συναρτήσει της διαμέτρου του, και υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού όταν η διάμετρος είναι 10 m.

Παράδειγμα 3.2. Η $f(x) = \sqrt{x}$ ορίζεται για $x \geq 0$. Εξετάζουμε κατά πόσον η f είναι παραγωγίσιμη.

Για $x > 0$ και h τέτοιο ώστε $x + h \geq 0$ υπολογίζουμε

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

έτσι

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

συνεπώς η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την παράγωγο από δεξιά της f στο $x = 0$, $f'_+(0)$. Έτσι για $h > 0$

$$\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

οπότε

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

Η γεωμετρική σημασία του τελευταίου αποτελέσματος είναι ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο $(0,0)$ είναι κάθετη στον x-άξονα, είναι δηλαδή ο y-άξονας.

Άσκηση 3.2. Εξετάστε αν η $f(x) = 1/\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και αν είναι να βρεθεί η παράγωγος.

Παράδειγμα 3.3. Δείχνουμε ότι η $f(x) = \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = \cos x$.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x\Big(\frac{\cos h - 1}{h}\Big) + \cos x\,\frac{\sin h}{h}.$$

Τα όρια στο δεξί μέλος, καθώς $h \to 0$, υπάρχουν, (βλέπε Παράδειγμα 2.3 και Άσκηση 2.4) για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως υπάρχει και αυτό στο αριστερό μέλος, κατά συνέπεια η $\sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον

$$\begin{aligned}\sin' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}\\ &= \sin x \lim_{h\to 0}\Big(\frac{\cos h - 1}{h}\Big) + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.\end{aligned}$$

Άσκηση 3.3. Ακολουθώντας μια διαδικασία ανάλογη με αυτήν του Παραδείγματος 3.3 δείξτε ότι η $f(x) = \cos x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = -\sin x$.

Παράδειγμα 3.4. Δείχνουμε ότι η $f(x) = \exp x = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = e^x$, δηλαδή $\exp' x = \exp x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για x και h στο $\mathbb{R}$, διαμορφώνοντας το πηλίκο διαφορών

$$\frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

συμπεραίνουμε, βλέπε Παράδειγμα 2.16, ότι το όριο του πηλίκου διαφορών καθώς $h \to 0$ υπάρχει και

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x 1 = e^x,$$

κατά συνέπεια $(e^x)' = e^x$.

Συμβολισμοί για την παράγωγο

Ένας άλλος συμβολισμός για την παράγωγο, ο οποίος υπαγορεύεται από την (3.1), είναι

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Το σύμβολο αυτό για την παράγωγο εισήγαγε ο Leibniz. Αν $y = f(x)$ γράφουμε επίσης

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x).$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ή σε κάποιο διάστημα και η f' είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή σε κάποιο διάστημα την $(f')'(x_0)$, ή $(f')'$ λέμε **δεύτερη παράγωγο** της f και τη συμβολίζουμε, απλούστερα, με f''. Όμοια, εφόσον αυτή υπάρχει, η $f''' = (f'')'$ είναι η **τρίτη παράγωγος** της f. Γενικότερα η $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ είναι η ***k*-τάξης παράγωγος** της f. Ορίζουμε $f^{(0)} = f$. Με τον συμβολισμό του Leibniz γράφουμε για τις f', f'', f''', ...

$$\frac{df}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df^2}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \qquad \dots$$

3.2 Κανόνες παραγώγισης

Άμεση συνέπεια του ορισμού της παραγώγου είναι το

Θεώρημα 3.2. *Εάν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε εκεί που και οι δύο παράγωγοι υπάρχουν*

(1) $(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$, *για κάθε λ και μ στο $\mathbb{R}$.*

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

(3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *εκεί όπου $g(x) \neq 0$.*

Θεώρημα 3.3 (Κανόνας της αλυσίδας). *Εάν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και η $f \circ g$ ορίζεται τότε*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Παρατήρηση 3.1. Με τον συμβολισμό του Leibniz ο τύπος της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης παίρνει μια ιδιαίτερα κομψή και ευκολομνημόνευτη μορφή. Θέτοντας $y = (f \circ g)(x)$ και $u = g(x)$ ο κανόνας αποδίδεται ως

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Θεώρημα 3.4. *Εάν οι f είναι παραγωγίσιμη και η f^{-1} υπάρχει τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

εκεί όπου $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Παράδειγμα 3.5. Για $x > 0$, από το Θεώρημα 3.4 έχουμε

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Άσκηση 3.4. Αποδείξτε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στο γράφημα της $f(x) = \sqrt[3]{x}$ στα σημεία $(-a, \sqrt[3]{-a})$ και $(a, \sqrt[3]{a})$ για κάθε $a \neq 0$ είναι παράλληλες.

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. $\dfrac{d}{dx}c = 0, \qquad c = \text{σταθερά}.$
2. $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$
3. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x.$
4. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$
5. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$
6. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x.$
7. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x.$
8. $\dfrac{d}{dx}\log x = \dfrac{1}{x}.$
9. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \log a, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$
10. $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\log a} = \dfrac{1}{x}\log_a e.$
11. $\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \qquad r \in \mathbb{R}, \qquad x > 0.$
12. $\dfrac{d}{dx}x^x = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$
13. $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 0.$
14. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 0.$
15. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1+x^2}.$
16. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

Παράδειγμα 3.6. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \log|x|$, $x \neq 0$. Δείχνουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Πράγματι αν $x > 0$, τότε $f(x) = \log x$ και $f'(x) = 1/x$.

Αν $x < 0$, τότε $f(x) = \log(-x)$ οπότε η f ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, επιπλέον από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$f'(x) = (\log'(-x))(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Παράδειγμα 3.7. Δείχνουμε ότι

$$\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \qquad r \in \mathbb{R}, \qquad x > 0.$$

Καταρχήν από τον τύπο της παραγώγου σύνθετης συνάρτησης έχουμε

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = e^{f(x)}f'(x).$$

Έτσι γράφοντας, για $x > 0$,

$$x^r = e^{\log x^r} = e^{r\log x}$$

παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}x^r = \frac{d}{dx}e^{r\log x} = e^{r\log x}\frac{d}{dx}(r\log x) = x^r r\frac{1}{x} = rx^{r-1}.$$

Άσκηση 3.5. Δείξτε ότι αν a και b είναι θετικοί αριθμοί τότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{(ab)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{b^x - 1}{x}.$$

Παράδειγμα 3.8. Δείχνουμε ότι

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$

Η $y = \sin^{-1}x$ ορίζεται για $-1 \le x \le 1$ και είναι $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Από τον κανόνα της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}$$

που ορίζεται για $\sin^{-1}x \neq \pm\pi/2$, κατά συνέπεια για $x \in (-1,1)$. Θέτοντας $\omega = \sin^{-1}x$, έχουμε $x = \sin\omega$ και

$$\cos\omega = \sqrt{1-\sin^2\omega} = \sqrt{1-x^2}$$

αφού $\omega \in (-\pi/2, \pi/2)$. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στον τύπο της παραγώγου παίρνουμε το ζητούμενο.

Άσκηση 3.6. Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

3.2.1 Πεπλεγμένη παραγώγιση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 8$ στο σημείο $(2, 2)$. Σύμφωνα με ό,τι γνωρίζουμε πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση $y = f(x)$ το γράφημα της οποίας είναι το τμήμα του κύκλου που μας ενδιαφέρει (ο κύκλος δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης) και έπειτα να υπολογίσουμε την παράγωγο της f στο σημείο $(2, 2)$ η οποία θα μας δώσει την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας. Λύνοντας την εξίσωση ως προς y βρίσκουμε

$$y^2 = 8 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{8 - x^2}$$

απ΄ όπου επιλέγουμε $y = f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ αφού για $x = 2$ πρέπει να είναι $y = 2$. Έτσι βρίσκουμε

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{8 - x^2}} \qquad \text{οπότε} \qquad f'(2) = -1$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y - 2 = -1(x - 2) \Rightarrow y = 4 - x.$$

Προσπαθώντας να γενικεύσουμε το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει δεν δόθηκε σε αναλυτική μορφή, αλλά δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή μέσω μιας εξίσωσης $F(x, y) = 0$, όπου $F(x, y) = x^2 + y^2 - 8$. Υποθέτοντας ότι η μεταβλητή y είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x σε κάποιο διάστημα γύρω από το $x = 2$ [1] μπορούμε να παραγωγίσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = 8$ και από τη σχέση που θα προκύψει να βρούμε την παράγωγο στο $x = 2$. Έτσι έχουμε

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}8 \Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \tag{3.3}$$

απ΄ όπου για $x = 2$ και $y = 2$ βρίσκουμε $4 + 4y'(2) = 0$, δηλαδή $y'(2) = -1$, όπως βρήκαμε όταν επιλύσαμε την εξίσωση ως προς y. Σημειώνουμε ότι από την (3.3) μπορούμε να γράψουμε, εκεί όπου $y \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο, παραγωγίζοντας δηλαδή την εξίσωση που περιέχει την συνάρτηση, λέγεται **πεπλεγμένη παραγώγιση** (implicit differentiation).

Άσκηση 3.7. Να βρεθούν τα σημεία στο γράφημα της $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια.

Άσκηση 3.8. Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα αντιδιαμετρικά σημεία της έλλειψης

$$\frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{(y - q)^2}{b^2} = 1$$

είναι παράλληλες. **Υπόδειξη**: Τα αντιδιαμετρικά σημεία της έλλειψης, όλα εκτός από ένα ζευγάρι, είναι τομές της ευθείας με εξίσωση $y = m(x - p) + q$, $m \in \mathbb{R}$ και της έλλειψης.

[1] Σε επόμενο κεφάλαιο θα αναφέρουμε τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε μία μεταβλητή μιας εξίσωσης $F(x, y) = 0$ μπορεί να εκφραστει ως συνάρτηση της άλλης μεταβλητής, γύρω από ένα σημείο (x_0, y_0) η οποία συνάρτηση είναι επιπλέον παραγωγίσιμη.

3.3 Βασικά θεωρήματα

Θεώρημα 3.5 (Θεώρημα του Rolle). *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Αν $f(a)=f(b)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f'(x_0)=0$.*

Απόδειξη. Εάν η f είναι σταθερή στο διάστημα, δηλαδή $f(x)=f(a)$, τότε $f'(x)=0$ για όλα τα $x \in [a,b]$, κατά συνέπεια το συμπέρασμα ισχύει.
Εάν η f δεν είναι σταθερή, τότε επειδή είναι συνεχής παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο $[a,b]$. Επειδή $f(a)=f(b)$ υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε η $f(x_0)$ είναι η μέγιστη ή η ελάχιστη τιμή της f. Ας υποθέσουμε ότι στο x_0 η f παίρνει την μέγιστη τιμή της. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, οπότε $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)$. Παρατηρούμε ότι για $h>0$, έχουμε

$$f(x_0-h)-f(x_0) \le 0 \Rightarrow \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \ge 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = f'_-(x_0) \ge 0$$
$$f(x_0+h)-f(x_0) \le 0 \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0) \le 0$$

κατά συνέπεια $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0$, επομένως $f'(x_0)=0$. Η περίπτωση όπου η f παίρνει στο x_0 την ελάχιστη τιμή της αποδεικνύεται ανάλογα. □

Θεώρημα 3.6 (Θεώρημα μέσης τιμής). *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0). \tag{3.4}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle, δηλαδή είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), ως άθροισμα παραγωγισίμων συναρτήσεων, και $F(a)=F(b)=0$. Επομένως υπάρχει σημείο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $F'(x_0)=0$, ισοδύναμα

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.1. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και $f'(x)=0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Τότε η f είναι σταθερή στο (a,b).*

Δείχνουμε ότι $f(x)=f(a)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Έστω x τυξαίο σημείο του $(a,b]$, τότε από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (a,x)$ ώστε

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(x_0) = 0,$$

κατά συνέπεια $f(x)=f(a)$. Επειδή το x είναι τυχαίο έπεται ότι το αποτέλεσμα ισχύει για όλα τα x στο $[a,b]$, επομένως η συνάρτηση είναι σταθερή.

Πόρισμα 3.2. *Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν την ίδια παράγωγο στο (a, b), τότε για κάποια σταθερά c είναι $f(x) = g(x) + c$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση $h = f - g$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Πορίσματος 3.1, άρα είναι σταθερή, ισοδύναμα για κάποια σταθερά c είναι $f(x) = g(x) + c$. □

Πόρισμα 3.3. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα (a, b). Αν $f'(x) > 0$ για κάθε x, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b). Αν $f'(x) < 0$ για κάθε x, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b).*

Απόδειξη. Έστω $a < x_1 < x_2 < b$, από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ ώστε

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_0).$$

Αν $f' > 0$ στο (a, b), τότε $f(x_2) - f(x_1) > 0$ αφού ο παρονομαστής είναι θετικός, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b). Αν $f' < 0$ στο (a, b), τότε $f(x_2) - f(x_1) < 0$ αφού ο παρονομαστής είναι θετικός, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a, b). □

Παράδειγμα 3.9. Εάν $0 < a < b$ δείχνουμε ότι

$$\frac{b-a}{1+b^2} \leq \arctan b - \arctan a \leq \frac{b-a}{1+a^2}.$$

Η $f(x) = \arctan x$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ οπότε από το Θεώρημα της μέσης τιμής παίρνουμε

$$\frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} = \arctan' \xi = \frac{1}{1+\xi^2}$$

για κάποιο $\xi \in (a, b)$. Επειδή για $0 < a < \xi < b$ είναι $0 < a^2 < \xi^2 < b^2$ έπεται ότι

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+\xi^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

συνδιάζοντας τις δύο σχέσεις έχουμε

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{\arctan b - \arctan a}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

και η ζητούμενη σχέση προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε με $b - a$ (> 0).

Άσκηση 3.9. Εάν $0 < a < b$ δείξτε ότι

$$1 - \frac{a}{b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b}{a} - 1.$$

Παράδειγμα 3.10. Να βρεθεί ο ελάχιστος αριθμός M ώστε να ισχύει

$$|\cos a - \cos b| \leq M|a-b| \qquad a, b \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \tag{3.5}$$

Η συνάρτηση cos είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε για $a \neq b$ από το Θεώρημα της μέσης τιμής έχουμε

$$\frac{\cos a - \cos b}{a-b} = \cos' x_0 = -\sin x_0$$

για κάποιο x_0 μεταξύ a και b άρα στο $[-\pi/6, \pi/6]$. Έτσι έχουμε

$$\left|\frac{\cos a - \cos b}{a-b}\right| = |\sin x_0| \leq \max_{-\pi/6 \leq x \leq \pi/6} |\sin x| = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

κατά συνέπεια η (3.5) ικανοποιείται για $M = 1/2$. Σημειώνουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $M = 1$, αφού $|\sin x_0| \leq 1$, αλλά αυτή η τιμή του M απέχει πολύ από το να είναι η ελάχιστη δυνατή για να ισχύει η (3.5) στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Άσκηση 3.10. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\arctan x = 1 - x$$

έχει μοναδική λύση και βρήτε ένα λογικό διάστημα το οποίο την περιέχει.

Θεώρημα 3.7 (Γενικευμένο Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy). *Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Εάν $g(a) \neq g(b)$ και οι f', g' δεν είναι ταυτόχρονα ίσες με μηδέν, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Απόδειξη. Βλέπουμε ότι αν $g(x) = x$ το Θεώρημα ανάγεται σε αυτό της μέσης τιμής. Έτσι γενικεύοντας τον τρόπο απόδειξης του Θεωρήματος της μέσης τιμής ορίζουμε την συνάρτηση h με τη σχέση

$$h(x) = f(x) - f(a) - [g(x) - g(a)]\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Η h, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και παραγωγισίμων στο (a, b), είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), επιπλέον ικανοποιεί τη σχέση $h(a) = h(b) = 0$. Έτσι όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle ικανοποιούνται, οπότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - g'(x_0)\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0$$

απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.8 (Θεώρημα μέσης τιμής του Taylor). *Έστω ότι η συνάρτηση $f^{(n)}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b), για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(b-a)^n. \tag{3.6}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη συνάρτηση h στο $[a, b]$ με τη σχέση

$$h(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Από τις υποθέσεις για την f η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση

$$g(x) = (b-x)^{n+1}.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} h'(x) = & -f'(x) - f''(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \\ & + f'(x) + f''(x)(b-x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \\ = & -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \end{aligned}$$

και $g'(x) = -(n+1)(b-x)^n$, με $g' \neq 0$ στο (a, b) από το γενικευμένο Θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy έπεται ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in (a, b)$ ώστε

$$\frac{h(b) - h(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)} \quad \text{ή} \quad \frac{h(a)}{g(a)} = \frac{h'(x_0)}{g'(x_0)},$$

αφού $h(b) = g(b) = 0$. Έτσι

$$\frac{h(a)}{(b-a)^{n+1}} = \frac{-f^{(n+1)}(x_0)(b-x_0)^n/n!}{-(n+1)(b-x_0)^n} \Rightarrow \frac{h(a)}{b-a} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(b-a)^n$$

όπου αντικαθιστώντας την τιμή

$$h(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

τελικά παίρνουμε

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(b-a)^n$$

που είναι ό,τι θέλαμε να δείξουμε. □

3.3.1 Πολυώνυμα Taylor και προσεγγίσεις

Το αποτέλεσμα του Θεωρήματος της μέσης τιμής, δηλαδή η (3.4) μπορεί να γραφεί σε διάφορες μορφές, για παράδειγμα αν x και x_0 είναι σημεία του (a, b), τότε

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0) \qquad \text{για κάποιο } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και } x_0. \tag{3.7}$$

Ή για $x \in (a, b)$ και $|h|$ μικρό

$$f(x+h) = f(x) + f'(x+\delta h)h \qquad \text{για κάποιο } \delta \in (0,1). \tag{3.8}$$

Παρόμοια η (3.6) γράφεται στη μορφή

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.9}$$

όπου το ξ είναι μεταξύ x και x_0. Το πολυώνυμο

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{3.10}$$

λέγεται **πολυώνυμο Taylor** τάξης n της f στο x_0. Έτσι η (3.9) μπορεί να γραφεί

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{3.11}$$

όπου το $R_n(x)$ λέγεται **υπόλοιπο** τάξης n της f στο x_0 και δίνεται από τη σχέση

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{3.12}$$

με το ξ να είναι μεταξύ x_0 και x. Η έκφραση αυτή του υπολοίπου είναι η **μορφή του Lagrange**. Μια άλλη έκφραση για το R_n είναι η **μορφή του Cauchy**

$$R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0), \tag{3.13}$$

με το ξ να είναι μεταξύ x_0 και x. Εν γένει τα ξ στις (3.12) και (3.13) είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

Άσκηση 3.11. Έστω ότι η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος μέσης τιμής του Taylor στο διάστημα $[a, b]$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 3.6 στη συνάρτηση

$$F(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k$$

δείξτε ότι $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, όπου το υπόλοιπο R_n είναι στη μορφή του Cauchy (3.13).

Παράδειγμα 3.11. Οι συναρτήσεις e^x, $\sin x$ και $\cos x$ έχουν παραγώγους όλων των τάξεων και

$$\frac{d^n}{dx^n}e^x = e^x, \quad \frac{d^n}{dx^n}\sin x = \begin{cases} (-1)^k \sin x & n = 2k, \\ (-1)^k \cos x & n = 2k+1, \end{cases} \qquad \frac{d^n}{dx^n}\cos x = \begin{cases} (-1)^k \cos x & n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \sin x & n = 2k+1, \end{cases}$$

με $k = 0, 1, 2, \ldots$. Έτσι για $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ξ μεταξύ x και μηδέν ώστε

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \tag{3.14}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{k+1}\frac{\sin\xi\, x^{2n+2}}{(2n+2)!} \tag{3.15}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{k+1}\frac{\sin\xi\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.16}$$

για $n = 0, 1, 2, \ldots$ Από τις σχέσεις αυτές εξάγονται διάφορα συμπεράσματα. Ας δούμε μερικά.

1. Από την (3.14) για $x = 1$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και ένα ώστε

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} \qquad 0 < \xi < 1.$$

Έτσι έχουμε

$$0 \le e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{e}{(n+1)!} \to 0$$

καθώς $n \to \infty$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

συγκλίνει στο e.

2. Για $n = 0$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\sin x = x - \frac{x^2}{2}\sin\xi \Rightarrow \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x}{2}\sin\xi$$

έτσι

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = \frac{|x|}{2}|\sin\xi| \le \frac{1}{2}|x|$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

3. Όμοια για $n = 0$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\cos x = 1 - x\sin\xi \Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin\xi$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = -\sin 0 = 0,$$

αφού $0 < |\xi| < |x|$ και κατά συνέπεια $\xi \to 0$ καθώς $x \to 0$.

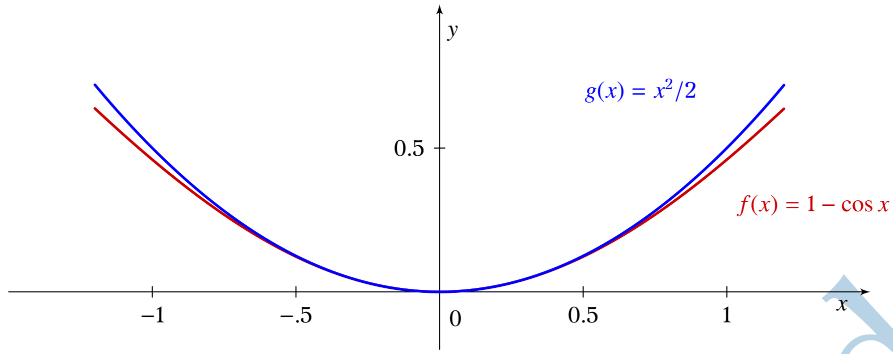
4. Όμοια για $n = 1$ και $x \neq 0$ υπάρχει ξ μεταξύ μηδέν και x ώστε

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\sin\xi \Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{6}\sin\xi$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

αφού $0 < |\xi| < |x|$ και κατά συνέπεια $\xi \to 0$ καθώς $x \to 0$. Βλέπε Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Για μικρές τιμές του $|x|$ είναι $1 - \cos x \approx x^2/2$

5. Από την (3.14) βλέπουμε ότι αν P_n είναι το πολυώνυμο Taylor τάξης n για την e^x, τότε

$$P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}, \qquad P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

και $e^x - P_n(x) = R_n(x)$ όπου

$$|R_n(x)| = e^{\xi} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

αφού το ξ είναι μεταξύ 0 και x. Επειδή $x^n/n! \to 0$ καθώς $n \to \infty$[2] έπεται ότι $R_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$, οπότε

$$\lim_{n\to\infty} |e^x - P_n(x)| = \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0 \Rightarrow e^x = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$$

και από τη μορφή των P_n είναι λογικό να γράψουμε

$$e^x = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{3.17}$$

Το όριο των πολυωνύμων P_n καθώς $n \to \infty$, το άθροισμα δηλαδή όλων των όρων (άπειροι το πλήθος) $x^n/n!$ είναι μια σειρά την οποία θα λέμε **δυναμοσειρά** (από τη μορφή των όρων) της e^x γύρω από το $x = 0$. Έτσι κάθε πολυώνυμο P_n είναι το μερικό άθροισμα S_n της δυναμοσειράς. Τη δυναμοσειρά τη λέμε **ανάπτυγμα Taylor** της e^x γύρω από το $x = 0$. Το ανάπτυγμα αυτό υπάρχει για κάθε πραγματικό αριθμό και συγκλίνει, όπως δείξαμε στο e^x.

[2]Δείχνουμε ότι για $a > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Έστω N ένας σταθερός φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε $N > 2a$, τότε για $n > N$

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N}\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n} < a^N\left(\frac{a}{N}\right)^{n-N} < a^N\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N} = (2a)^N\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο αφού το δεξί άκρο της ανισότητας τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$.

Έτσι θα λέμε ότι η δυναμοσειρά (3.17) **συγκλίνει** στην e^x για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, όπως αναφέραμε, από την (2.16) έχουμε ότι $e^x = \exp x$.

Άσκηση 3.12. Χρησιμοποιώντας τις (3.15) και (3.16) και εργαζόμενοι όπως στο αποτέλεσμα του Παραδείγματος 3.11 για την εκθετική συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{3.18}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \tag{3.19}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 3.13. Η $f(x) = \arctan x$, έχει παραγώγους όλων των τάξεων.

(α΄) Δείξτε ότι

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + R_n(x)$$

για κατάλληλο R_n.

(β΄) Δείξτε ότι $R_n(x) \to 0$ καθώς $n \to \infty$ για κάθε $-1 \le x \le 1$ και συμπεράνατε ότι

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \qquad -1 \le x \le 1.$$

Παράδειγμα 3.12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Προσεγγίζουμε τη συνάρτηση με το πολυώνυμο Taylor 2ης τάξης στο $x_0 = 8$. Πόσο ακριβής είναι η προσέγγιση όταν $7 \le x \le 9$;

Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το

$$P_2(x) = f(8) + \frac{f'(8)}{1!}(x-8) + \frac{f''(8)}{2!}(x-8)^2.$$

Υπολογίζουμε

$$f(x) = x^{1/3} \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} \qquad f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$$

$$f(8) = 2 \qquad f'(8) = \frac{1}{12} \qquad f''(8) = -\frac{1}{144}$$

επομένως

$$\sqrt[3]{x} \approx 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2.$$

Η ακρίβεια της προσέγγισης εκτιμάται από το υπόλοιπο $R_2(x)$ αφού $f(x) - P_2(x) = R_2(x)$. Το ξ στην έκφραση του $R_n(x)$ είναι μεταξύ 8 και x. Εδώ είναι

$$R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-8)^3 = \frac{10}{27}\xi^{-8/3}\frac{(x-8)^3}{3!} = \frac{5(x-8)^3}{81\xi^{8/3}}.$$

Επειδή $x \in [7,9]$ είναι $-1 \le x-8 \le 1$, ισοδύναμα $|x-8| \le 1$ και $\xi > 7$, οπότε

$$|R_2(x)| = \left|\frac{5(x-8)^3}{81\xi^{8/3}}\right| < \frac{5\cdot 1}{81\cdot 7^{8/3}} < 0.0004.$$

Έτσι για κάθε $x \in [7,9]$ έχουμε

$$\left|\sqrt[3]{x} - \left(2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2\right)\right| < 0.0004.$$

Άσκηση 3.14. Δείξτε ότι για $x > -1$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5(1+\xi)^5},$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Χρησιμοποιήστε αυτή τη σχέση για να βρείτε μια προσέγγιση του $\log 1.1$ και εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης.

Παράδειγμα 3.13. Προσεγγίστε την $f(x) = e^{-x^2}$ με το σχετικό πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού γύρω από το $x_0 = 0$ και εκτιμήστε την ακρίβεια της προσέγγισης όταν $-1/2 \le x \le 1/2$.

Επειδή

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2}, \qquad f'''(x) = (-8x^3+12x)e^{-x^2}$$

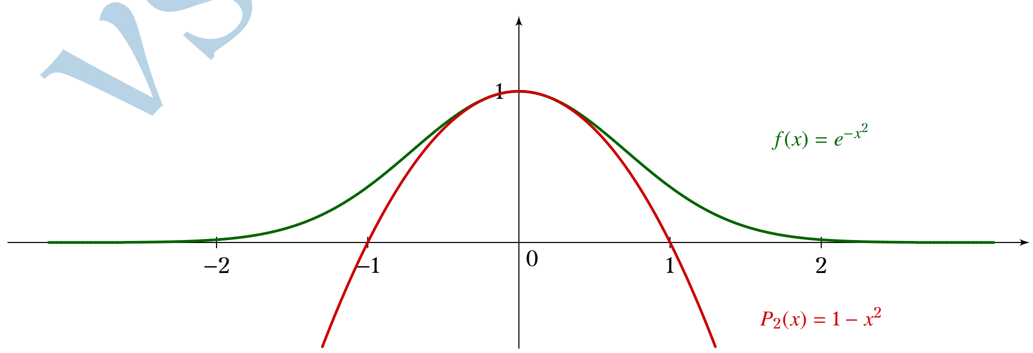
το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού είναι

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 - x^2$$

επιπλέον

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= P_2(x) + R_2(x) \\ &= 1 - x^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3, \end{aligned}$$

όπου για κάθε x το αντίστοιχο ξ είναι μεταξύ 0 και x. Στο σχήμα που ακολουθεί βλέπουμε τις γραφικές παραστάσεις της $f(x)$ και $P_2(x)$.



Σχήμα 3.3: $e^{-x^2} \approx 1 - x^2$ γύρω από το $x = 0$

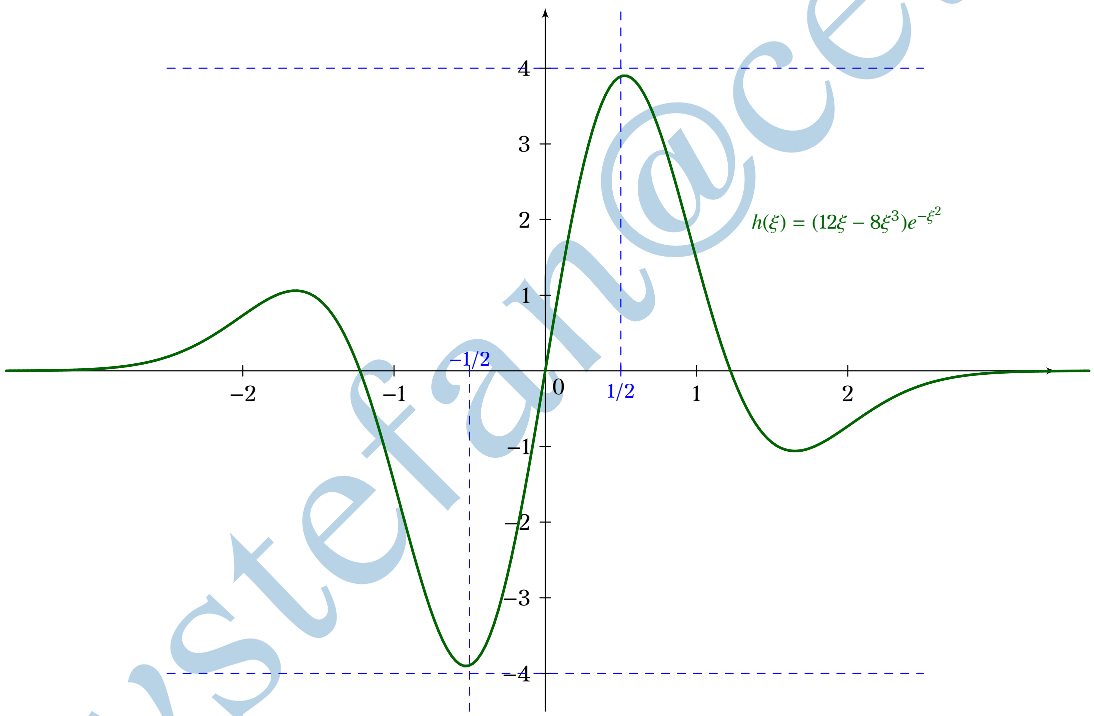
Για την εκτίμηση της ακρίβειας της προσέγγισης βρίσκουμε

$$\begin{aligned}|e^{-x^2} - P_2(x)| &= |R_2(x)|\\ &= \frac{|-8\xi^3 + 12\xi|}{e^{\xi^2}3!}|x^3|\\ &\le \frac{(1/2)^3}{3!}\max_{|\xi|\le 1/2}\left(\frac{12\xi - 8\xi^3}{e^{\xi^2}}\right)\end{aligned}$$

βλέπε Σχήμα 3.4. Επομένως στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$ έχουμε $e^{-x^2} \approx 1 - x^2$ με σφάλμα το πολύ

$$\frac{1}{48}\frac{5}{\sqrt[4]{e}} = 0.081125081569938 \qquad \left(\text{για } \xi = \frac{1}{2}\right),$$

βλέπε εξήγηση στη συνέχεια. Θέτοντας $h(\xi) = (12\xi - 8\xi^3)e^{-\xi^2}$, παρατηρούμε ότι η h είναι περιττή



Σχήμα 3.4: $R_2(x) = h(\xi)x^2/3!$

συνάρτηση και $h'(\xi) = (12 - 48\xi^2 + 16\xi^4)e^{-\xi^2}$, ενώ

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi^4 - 3\xi^2 + \frac{3}{4} = 0 \Leftrightarrow \xi = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}}.$$

Επειδή

$$\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{3 - \sqrt{6}}{2}} < \sqrt{\frac{3 + \sqrt{6}}{2}}$$

τα ακρότατα της h βρίσκονται εκτός του διαστήματος $[-1/2, 1/2]$, έτσι στο διάστημα αυτό η h είναι μονότονη. Επομένως

$$\max_{|\xi|\leq 1/2} h(\xi) = h(1/2).$$

Παρατήρηση 3.2. Σε σχέση με το Παράδειγμα 3.13 σημειώνουμε:

1. Μια εκτίμηση της ακρίβειας της προσέγγισης προκύπτει επίσης παρατηρώντας το Σχήμα 3.3, συγγεκριμένα η μέγιστη απόσταση στις δύο γραφικές παραστάσεις συμβαίνει στα άκρα του διαστήματος, έτσι

$$\begin{aligned}|e^{-x^2} - P_2(x)| &\leq |f(1/2) - P_2(1/2)| \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{e}} - 1 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{e^{0.25}} - 0.75 \\ &= 0.0288007830714049.\end{aligned}$$

2. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

έπεται ότι

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Η σειρά είναι εναλλασσόμενη και για $-1 < x < 1$ είναι

$$1 \geq \frac{x^2}{1!} \geq \frac{x^4}{2!} \geq \cdots \geq \frac{x^{2n}}{n!} \geq \cdots \geq 0,$$

οπότε από το Θεώρημα 2.1 (εκτίμηση σφάλματος αποκοπής) έπεται ότι

$$|e^{-x^2} - P_2(x)| \leq \frac{x^4}{2},$$

κατά συνέπεια στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$ έχουμε

$$\begin{aligned}|e^{-x^2} - P_2(x)| &\leq \frac{(1/2)^4}{2} \\ &= \frac{1}{32} \\ &= 0.03125.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν τρείς διαφορετικές εκτιμήσεις της ακρίβειας της προσέγγισης της $f(x) = e^{-x^2}$ με το πολυώνυμο Taylor $P_2(x) = 1 - x^2$ στο διάστημα $-1/2 \leq x \leq 1/2$. (α΄) Με χρήση του Θεωρήματος μέσης τιμής του Taylor, (β΄) υπολογίζοντας άμεσα το μέγιστο της $f(x) - P_2(x)$, και τέλος (γ΄) εκτιμώντας το σφάλμα αποκοπής εναλλασσόμενης σειράς. **Όλες οι εκτιμήσεις είναι σωστές και η κάθε μια σχετίζεται με τον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος**. Η (β΄) υπολογίζει ακριβώς το σφάλμα, δίνει το ακριβέστερο αποτέλεσμα, αλλά απαιτεί αφενός γνώση του P_2 και αφετέρου επιπλέον εργασία, την εύρεση μεγίστου, η οποία σε γενική περίπτωση μπορεί να είναι μια πολύπλοκη διαδικασία. Σε αντίθεση οι (α΄) και (γ΄) δίνουν μια ασφαλή εκτίμηση δίχως να αναφέρονται καν στο P_2.

3.3.2 Γραμμικοποίηση και διαφορικά

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα (a, b) και $x_0 \in (a, b)$, τότε το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης στο x_0 $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ είναι η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$. Αν το x είναι κοντά στο x_0 από την (3.7) βλέπουμε ότι $f(x) \approx P_1(x)$, κατά συνέπεια σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 η f προσεγγίζεται από μια γραμμική συνάρτηση. Το υπόλοιπο $R_1(x)$ εκφράζει το σφάλμα της προσέγγισης.

Ορισμός 3.3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 η συνάρτηση

$$L(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

λέγεται **γραμμικοποίηση** της f στο x_0.

Αν το x_0 μεταβάλεται κατά $\Delta x = dx$ τότε η $y = f(x)$ μεταβάλεται κατά

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0).$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη η έκφραση $f'(x_0)\, dx$ είναι μια προσέγγιση της Δf αφού για Δx μικρό είναι

$$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)\, dx + \epsilon\, dx$$

και $\epsilon \to 0$ καθώς $\Delta x \to 0$. Την έκφραση

$$dy = df = f'(x)\, dx$$

λέμε **διαφορικό** της f. Παρατηρούμε ότι το διαφορικό της f στο x_0 είναι η μεταβολή της γραμμικοποίησης L κατά dx αφού

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + dx) - L(x_0)\\ &= f(x_0) + f'(x_0)((x_0 + dx) - x_0) - f(x_0)\\ &= f'(x_0)\, dx.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.14. Η γραμμική προσέγγιση της $f(x) = (1 + x)^r$, $x > -1$ και $r \in \mathbb{R}$, στο $x = 0$ είναι

$$(1 + x)^r \approx 1 + rx, \qquad x \text{ κοντά στο } 0.$$

Πράγματι $f'(x) = r(1 + x)^{r-1}$, οπότε στο $x = 0$ είναι

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + rx.$$

Έτσι για x κοντά στο μηδέν έχουμε

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \qquad \frac{1}{1+x} \approx 1 + (-1)x = 1 - x$$
$$\sqrt[3]{1+3x^4} \approx 1 + \frac{1}{3}3x^4 = 1 + x^4 \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

3.3.3 Η μέθοδος του Newton

Έστω ότι η f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο διάστημα (a, b) και έστω, επιπλέον, ότι $f'(x) \neq 0$ στο (a, b). Αν $a < x_1 < b$ η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_1, f(x_1))$ έχει εξίσωση $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$. Επειδή $f'(x) \neq 0$ η ευθεία αυτή τέμνει τον x-άξονα. Αν x_2 είναι το σημείο τομής, τότε

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Όμοια η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_2, f(x_2))$ τέμνει τον x-άξονα στο x_3 και

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία παίρνουμε την αναδρομική ακολουθία ή **σχήμα του Newton**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.20}$$

Υποθέτοντας ότι η αναδρομική ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο σημείο x^* από την συνέχεια των f και f' παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ στα δύο μέλη της αναδρομικής σχέσης έχουμε

$$x^* = x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} \Rightarrow f(x^*) = 0,$$

δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει σε μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Κατά συνέπεια παίρνοντας το σημείο x_1 κοντά σε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ το αναδρομικό αυτό σχήμα συγκλίνει στη ρίζα.

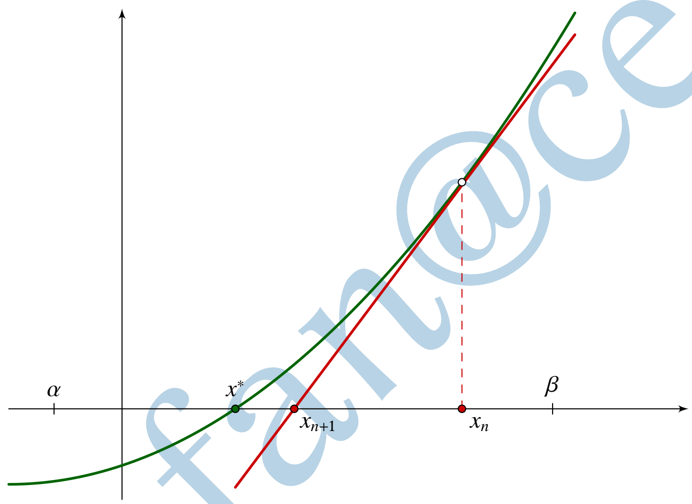
Άσκηση 3.15. Εξετάστε αν οι ακολουθίες στα (α΄) και (β΄) είναι του τύπου (3.20) για κατάλληλη, στην κάθε περίπτωση, f. Στη συνέχεια εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες και αν συγκλίνουν να βρεθούν τα όριά τους.

(α′) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

(β′) $x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$

Συνθήκες στη συνάρτηση f κάτω από τις οποίες η ακολουθία (3.20) συγκλίνει μας παρέχει η

Πρόταση 3.1. *Έστω f μια συνάρτηση με συνεχείς τις παραγώγους f' και f'' σε ένα διάστημα (a, b). Έστω ότι για $a < \alpha < \beta < b$ είναι $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Αν x^* είναι η ρίζα της $f(x) = 0$ η οποία περιέχεται στο $[\alpha, \beta]$, και ορίσουμε $m = \min f'(x)$ και $M = \max|f''(x)|$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε επιλέγοντας x_1 ώστε $|x^* - x_1| < m/(2M)$ η ακολουθία που ορίζεται με την αναδρομική σχέση (3.20) συγκλίνει στη ρίζα x^*.*



Σχήμα 3.5: Γεωμετρική αναπαράσταση για το σχήμα του Newton

Απόδειξη. Οι υποθέσεις για την f εξασφαλίζουν την ύπαρξη μοναδικής ρίζας x^* στο $[\alpha, \beta]$ (γιατί;). Επειδή $f(x^*) = 0$, από την (3.20) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \frac{f(x_n) - f(x^*)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - x^* - (x_n - x^*)\frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)} && \text{για κάποιο } \xi_n \text{ μεταξύ } x_n \text{ και } x^* \\
&= (x_n - x^*)\left(1 - \frac{f'(\xi_n)}{f'(x_n)}\right) \\
&= (x_n - x^*)\frac{f'(x_n) - f'(\xi_n)}{f'(x_n)} \\
&= (x_n - x^*)(x_n - \xi_n)\frac{f''(\zeta_n)}{f'(x_n)} && \text{για κάποιο } \zeta_n \text{ μεταξύ } x_n \text{ και } \xi_n.
\end{aligned}$$

Έτσι αφού το ξ_n είναι μεταξύ των x_n και x^* παίρνουμε

$$|x_{n+1} - x^*| \le |x_n - x^*||x_n - \xi_n|\frac{M}{m} \le |x_n - x^*|^2\frac{M}{m}. \tag{3.21}$$

Από την υπόθεση $|x_1 - x^*| < m/(2M)$ και την (3.21) προκύπτει αμέσως ότι

$$|x_2 - x^*| \le |x_1 - x^*|^2\frac{M}{m} < \frac{1}{2}|x_1 - x^*|$$

και

$$|x_3 - x^*| \le |x_2 - x^*|^2\frac{M}{m} < \left(\frac{1}{2}|x_1 - x^*|\right)^2\frac{M}{m} < \left(\frac{1}{2}\right)^3|x_1 - x^*|.$$

Με επαγωγή δε μπορεί να δειχτεί[3] ότι

$$|x_{n+1} - x^*| < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1}|x_1 - x^*|, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.22}$$

απ᾽ όπου έπεται ότι $x_n \to x^*$ καθώς $n \to \infty$. □

3.4 Μέγιστα Ελάχιστα και Κυρτότητα

Ορισμός 3.4. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **απόλυτο μέγιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0) \ge f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$. Ο αριθμός $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** της f. Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **απόλυτο ελάχιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0) \le f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$ και ο αριθμός $f(x_0)$ θα λέγεται **ελάχιστη τιμή** της f.

[3]Θέτοντας $\delta_n = |x_n - x^*|$ και $\lambda = M/m$ η (3.21) και η υπόθεση γράφονται αντίστοιχα

$$\delta_{n+1} \le \lambda\delta_n^2, \qquad \lambda\delta_1 < 1/2$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\delta_2 &\le \lambda\delta_1^2 \\
\delta_3 &\le \lambda\delta_2^2 \le \lambda(\lambda\delta_1^2)^2 = \lambda^3\delta_1^4 \\
\delta_4 &\le \lambda\delta_3^2 \le \lambda(\lambda^3\delta_1^4)^2 = \lambda^7\delta_1^8 \\
\delta_5 &\le \lambda\delta_4^2 \le \lambda(\lambda^7\delta_1^8)^2 = \lambda^{15}\delta_1^{16}
\end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι $\delta_{n+1} \le \lambda^{2^n-1}\delta_1^{2^n}$ για $n = 1, 2, 3, \ldots$ Πράγματι για $n = 1$ είναι $\delta_2 \le \lambda\delta_1^2$ το οποίο ισχύει. Στη συνέχεια, δεχόματε ότι (για $n = k - 1$ είναι) $\delta_k \le \lambda^{2^{k-1}-1}\delta_1^{2^{k-1}}$, τότε

$$\delta_{k+1} \le \lambda\delta_k^2 \le \lambda[\lambda^{2^{k-1}-1}\delta_1^{2^{k-1}}]^2 = \lambda^{2^k-1}\delta_1^{2^k}$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας. Κατά συνέπεια έχουμε $\delta_{n+1} \le (\lambda\delta_1)^{2^n-1}\delta_1 < (1/2)^{2^n-1}\delta_1$, για $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ορισμός 3.5. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x_0 και $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x_0 και $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** της f.

Θεώρημα 3.9 (Fermat). *Εάν η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0 και η $f'(x_0)$ υπάρχει τότε $f'(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι στο x_0 η f έχει τοπικό μέγιστο. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, έπεται ότι $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.5 του Rolle έχουμε ότι $f'_-(x_0) \geq 0$ και $f'_+(x_0) \leq 0$, κατά συνέπεια $f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0$. Η περίπτωση όπου η f έχει στο x_0 τοπικό ελάχιστο αποδεικνύεται ανάλογα. □

Το αντίστροφο του Θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα για την $f(x) = x^3$ ισχύει $f'(0) = 0$ αλλά στο $x = 0$ δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο αφού $f'(x) = 3x^2 > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και κατά συνέπεια η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 3.6. Ένα σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f λέγεται **κρίσιμο σημείο** της f αν $f'(x_0) = 0$, ή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει.

Θεώρημα 3.10 (κριτήριο της πρώτης παραγώγου). *Έστω ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνεχούς συνάρτησης f.*

(1) *Εάν η f' αλλάζει από θετική σε αρνητική στο x_0, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*

(2) *Εάν η f' αλλάζει από αρνητική σε θετική στο x_0, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*

(3) *Εάν η f' δεν αλλάζει πρόσημο στο x_0, τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα I, $x_0 \in I$ και η $f'(x_0)$ μπορεί να υπάρχει ή να μην υπάρχει.

(1) Εάν η f' είναι θετική σε διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$ και αρνητική στο $(x_0, x_0 + \delta)$, για κάποιο $\delta > 0$, τότε η f είναι αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και αφού $f(x_0) = f(x_0-)$ έπεται ότι $f(x_0) > f(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, κατά συνέπεια είναι αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0]$. Είναι επίσης φθίνουσα στο $[x_0, x_0 + \delta)$, επομένως στο x_0 έχει τοπικό μέγιστο.

(2) Εάν η f' είναι αρνητική σε διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$ και θετική στο $(x_0, x_0 + \delta)$, για κάποιο $\delta > 0$, τότε η f είναι φθίνουσα στο $(x_0 - \delta, x_0]$ και αύξουσα στο $[x_0, x_0 + \delta)$ άρα στο x_0 έχει τοπικό ελάχιστο.

(3) Ας υποθέσουμε ότι $f' > 0$ στο $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, τότε η f είναι αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα, επιπλέον $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $f(x_0) < f(x)$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, κατά συνέπεια η f είναι γνησίως μονότονη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, άρα δεν έχει ακρότατο στο x_0.

□

Παρατήρηση 3.3. Το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.10 δεν ισχύει αν η f δεν είναι συνεχής. Πράγματι για την

$$f(x) = \begin{cases} 1/|x| & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

είναι $f' > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f' < 0$ στο $(0, +\infty)$ αλλά προφανώς δεν έχει τοπικό μέγιστο στο $x = 0$.

Παράδειγμα 3.15. Δείχνουμε ότι

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1, \qquad x > 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \log x.$$

Η f ορίζεται για $x > 0$, είναι παραγωγίσιμη και

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1 - x}{x^2}.$$

Αν $x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι αύξουσα στο $(0, 1)$ ενώ αν $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο $x = 1$ η f έχει μέγιστο, έτσι $f(x) \leq f(1)$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή

$$1 - \frac{1}{x} - \log x \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \log x, \tag{3.23}$$

για κάθε $x > 0$. Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = x - 1 - \log x.$$

Η g ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη για $x > 0$ και

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x - 1}{x}.$$

Αν $x < 1$ είναι $g'(x) < 0$ άρα η g είναι φθίνουσα στο $(0, 1)$ ενώ αν $x > 1$ είναι $g'(x) > 0$ οπότε η g είναι αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο $x = 1$ η g έχει ελάχιστο, έτσι $g(x) \geq g(1)$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή

$$x - 1 - \log x \geq 0 \Rightarrow x - 1 \geq \log x, \tag{3.24}$$

για κάθε $x > 0$. Το ζητούμενο έπεται από τις (3.23) και (3.24).

Άσκηση 3.16. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του a ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει

$$\sqrt{x} \geq \log x + a.$$

Άσκηση 3.17. Αποδείξτε ότι για κάθε x ισχύει

$$-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}.$$

Θεώρημα 3.11 (κριτήριο της δεύτερης παραγώγου). *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο ανοιχτό διάστημα το οποίο περιέχει το σημείο x_0.*

(1) *Εάν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.*

(2) *Εάν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.*

Απόδειξη. Η δεύτερη παράγωγος της f υπάρχει στο x_0, επομένως $f''(x_0) = f''(x_0-) = f''(x_0+)$.

(1) Παρατηρούμε ότι

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0,$$

οπότε και

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f'(x_0 + h)}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{f'(x_0 + h)}{h} < 0$$

κατά συνέπεια υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f' > 0$ στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και $f' < 0$ στο $(x_0, x_0 + \delta)$. Έτσι από το κριτήριο της πρώτης παραγώγου, Θεώρημα 3.10, έπεται ότι στο x_0 η f έχει τοπικό μέγιστο.

(2) Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του (1).

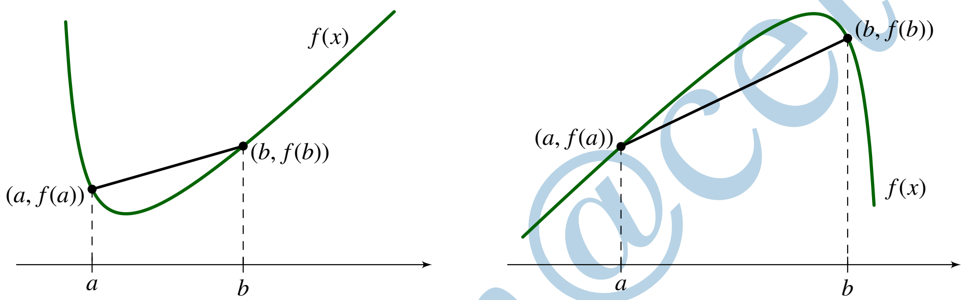
□

3.4.1 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Η γεωμετρική έννοια της κυρτότητας παίζει πολύ σπουδαίο ρόλο και εμφανίζεται σε πολλές περιοχές των Μαθηματικών σχετίζεται δε με τις σημαντικότερες ανισότητες που συναντάμε στα Μαθηματικά. Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε τα απαραίτητα εκείνα στοιχεία που αφορούν τις κυρτές συναρτήσεις τα οποία θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε τη συμπεριφορά διάφορων συναρτήσεων.

Ορισμός 3.7. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε διάστημα I. Η f θα λέγεται **κυρτή** στο I, εάν για κάθε a και b στο I η γραφική παράστασή της f μεταξύ των $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$. Η f θα λέγεται **κοίλη** στο I, εάν για κάθε a και b στο I η γραφική παράστασή της f μεταξύ των $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$.

Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή αν η $-f$ είναι κοίλη και αντίστροφα.



Σχήμα 3.6: Μια κυρτή συνάρτηση f, και μια κοίλη συνάρτηση f

Άσκηση 3.18. Έστω $[a, b]$ ένα διάστημα. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $t \in [0, 1]$ ώστε $x = (1-t)a + tb$, κατά συνέπεια

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb : 0 \le t \le 1\}. \tag{3.25}$$

Το αποτέλεσμα αυτό εκφράζεται λέγοντας ότι κάθε σημείο x του $[a, b]$ είναι **κυρτός συνδυασμός** των άκρων του διαστήματος a και b.

Παρατήρηση 3.4. Υπό το πρίσμα του αποτελέσματος της Άσκησης 3.18 έπεται ότι

(1) Η συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα I είναι κυρτή στο διάστημα αν και μόνο αν για κάθε a και b στο I ισχύει

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \le (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \tag{3.26}$$

για κάθε $\lambda \in (0, 1)$.

(2) Η συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα I είναι κοίλη στο διάστημα αν και μόνο αν για κάθε a και b στο I ισχύει

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) \ge (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b) \tag{3.27}$$

για κάθε $\lambda \in (0, 1)$.

Πρόταση 3.2 (Λήμμα των τριών χορδών). *Η συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα I είναι κυρτή στο διάστημα αν και μόνο αν για κάθε $r < s < t$ στο I ισχύει*

$$\frac{f(s)-f(r)}{s-r} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s}. \tag{3.28}$$

Απόδειξη. Το s είναι μεταξύ των r και t, άρα έκφράζεται ως κυρτός συνδυασμός $s = (1-\lambda)r + \lambda t$, απ΄ όπου υπολογίζουμε

$$\lambda = \frac{s-r}{t-r}$$

και από από την (3.26) παίρνουμε

$$f(s) \le \left(1 - \frac{s-r}{t-r}\right) f(r) + \frac{s-r}{t-r} f(t) \qquad \text{και} \qquad f(s) \le \frac{t-s}{t-r} f(r) + \left(1 - \frac{t-s}{t-r}\right) f(t).$$

Από την αριστερή ανισότητα προκύπτει

$$f(s) - f(r) \le \frac{s-r}{t-r}(f(t) - f(r)) \Rightarrow \frac{f(s)-f(r)}{s-r} \le \frac{f(t)-f(r)}{t-r}$$

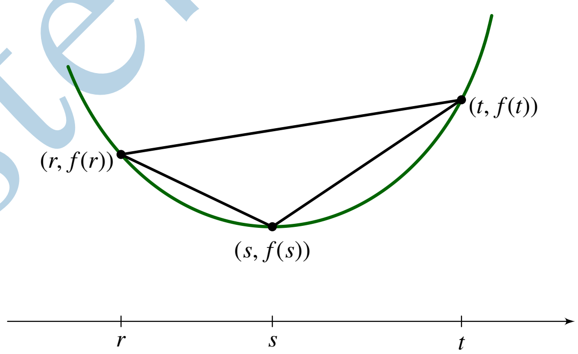
και από την δεξιά

$$\frac{t-s}{t-r}(f(t) - f(r)) \le f(t) - f(s) \Rightarrow \frac{f(t)-f(r)}{t-r} \le \frac{f(t)-f(s)}{t-s}.$$

Συνδέοντας τις δύο τελικές ανισότητες παίρνουμε την (3.28). Για την απόδειξη του αντιστρόφου υποθέτουμε ότι $x < y$ είναι σημεία του I και $0 < \lambda < 1$. Το $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ είναι μεταξύ των x και y και η

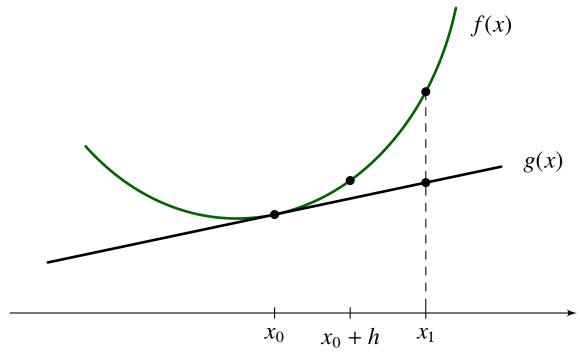
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x},$$

η οποία ισχύει από την υπόθεση, είναι ισοδύναμη με την $f((1-\lambda)r + \lambda t) \le (1-\lambda)$. □



Σχήμα 3.7: Το Λήμμα των τριών χορδών

Πρόταση 3.3. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα I. Εάν η f είναι επιπλέον παραγωγίσιμη στο I, τότε η γραφική παράστασή της βρίσκεται πάνω από την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο του γραφήματος.*



Σχήμα 3.8: Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση κυρτής συνάρτησης

Απόδειξη. Αν $x_0 \in I$ η εφαπτόμενη ευθεία στο $(x_0, f(x_0))$ είναι $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Αποδεικνύουμε ότι $g(x) \leq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Έστω $x_1 > x_0$ σημείο του I. Για κάθε $h > 0$ τέτοιο ώστε $x_0 < x_0 + h < x_1$ από τη Λήμμα των τριών χορδών, Πρόταση 3.2, έπεται

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0 + h)}{x_1 - x_0 - h}.$$

Παίρνοντας το όριο του $h \to 0$, το οποίο υπάρχει αφού η f είναι παραγωγίσιμη, προκύπτει ότι

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \Rightarrow f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \leq f(x_1)$$

ισοδύναμα $g(x_1) \leq f(x_1)$. Όμοια αποδεικνύεται η περίπτωση όπου $x_1 < x_0$. □

Πρόταση 3.4. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή σε κάποιο διάστημα I. Εάν η f είναι επιπλέον παραγωγίσιμη στο I, τότε η παράγωγος είναι αύξουσα στο διάστημα.*

Απόδειξη. Αν $x_0 < x_1$ είναι σημεία του I, έστω $s \in (x_0, x_1)$. Θέτουμε $s = x_0 + h = x_1 - h'$, με $h > 0$ και $h' > 0$, τότε από τη Λήμμα των τριών χορδών, Πρόταση 3.2, έπεται

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0 + h)}{x_1 - x_0 - h}$$
$$\frac{f(x_1 - h') - f(x_0)}{x_1 - x_0 - h'} \leq \frac{f(x_1) - f(x_1 - h')}{h'} = \frac{f(x_1 - h') - f(x_1)}{-h'}$$

όπου οι h και h' σχετίζονται με τη σχέση $h' = x_1 - x_0 - h$. Οι ανισότητες ισχύουν για όλα τα s μεταξύ x_0 και x_1, κατά συνέπεια περνώντας στα όρια του $h \to 0$ στην πρώτη ανισότητα και του $h' \to 0$ στην δεύτερη παίρνουμε αντίστοιχα

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \qquad \text{και} \qquad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_1)$$

ισοδύναμα $f'(x_0) \leq f'(x_1)$. □

Θεώρημα 3.12 (Κριτήριο κυρτότητας). *Έστω ότι για την συνάρτηση f η f'' υπάρχει σε κάποιο διάστημα I.*

(1) *Εάν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, η f είναι κυρτή στο I.*

(2) *Εάν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, η f είναι κοίλη στο I.*

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη με την εις άτοπο απαγωγή.

(1) Εάν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, η f' είναι αύξουσα στο I. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι κυρτή στο I. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν σημεία $r < s < t$ στο I ώστε

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} > \frac{f(t) - f(s)}{t - s}. \tag{3.29}$$

Από το Θεώρημα της μέσης τιμής έπεται ότι υπάρχουν σημεία ζ και ξ στο I με $r < \zeta < s < \xi < t$, ώστε $f'(\zeta) > f'(\xi)$, ως συνέπεια της (3.29). Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η f' είναι αύξουσα. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι η f δεν είναι κυρτή στο I, συνεπώς η f είναι κυρτή στο I.

(2) Εάν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, τότε $-f'' > 0$ στο I, κατά συνέπεια η $-f$ είναι κυρτή στο I, από το (1), επομένως η f είναι κοίλη στο I.

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

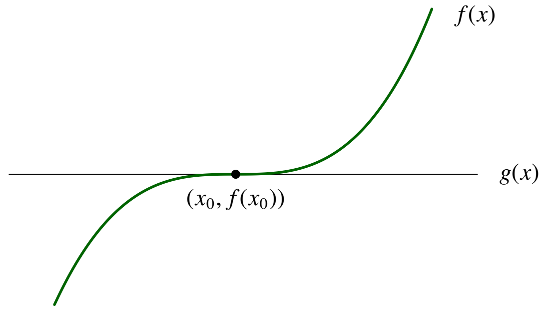
Ορισμός 3.8. Ένα σημείο στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f λέγεται **σημείο καμπής** εάν η συνάρτηση στο σημείο αυτό αλλάζει από κυρτή σε κοίλη, ή από κοίλη σε κυρτή.

Παράδειγμα 3.16. Για τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ παρατηρούμε ότι $f'(x) = 3x^2$ και $f''(x) = 6x$. Έτσι από το κριτήριο κυρτότητας προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 0)$ αφού $f''(x) < 0$ για $x < 0$, και κυρτή στο $(0, +\infty)$ αφού $f'' > 0$ στο διάστημα αυτό. Άρα το $x = 0$ είναι σημείο καμπής για τη συνάρτηση f και $f''(x_0) = 0$.

Θεώρημα 3.13. *Έστω ότι για την συνάρτηση f η f'' υπάρχει σε κάποιο διάστημα (a, b). Εάν στο σημείο $x_0 \in (a, b)$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής, τότε $f''(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f αλλάζει από κοίλη σε κυρτή στο σημείο x_0, βλέπε Σχήμα 3.9. Αν g είναι η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, θέτουμε

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$



Σχήμα 3.9: Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση συνάρτησης σε σημείο καμπής

Από την υπόθεση είναι $h(x) \leq 0$ αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $h(x_0) = 0$ και $h(x) \geq 0$ αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Παρατηρούμε ότι $h'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, και $h''(x) = f''(x)$. Κατά συνέπεια το x_0 είναι μεν κρίσιμο σημείο, αλλά στο x_0 η h δεν μπορεί να έχει ακρότατο (γιατί;). Επομένως το $h''(x_0)$, το οποίο ορίζεται από την υπόθεση, δεν μπορεί να είναι ούτε θετικό, αφού τότε θα είχαμε ελάχιστο στο x_0, ούτε αρνητικό, αφού τότε θα είχαμε μέγιστο στο x_0, κατά συνέπεια θα είναι $h''(x_0) = f''(x_0) = 0$. Η απόδειξη για την περίπτωση όπου η f αλλάζει από κυρτή σε κοίλη είναι παρόμοια. $\square$

Παρατήρηση 3.5. Σε σχέση με το Θεώρημα 3.13 σημειώνουμε ότι η σχέση $f''(c) = 0$ δεν είναι ικανή συνθήκη για να είναι το c σημείο καμπής. Για παράδειγμα για την $f(x) = x^4$ έχουμε ότι $f''(x) = 12x^2$ άρα $f''(0) = 0$, και $f(x) > 0$ για $x \neq 0$. Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, επομένως δεν αλλάζει από κυρτή σε κοίλη ή από κοίλη σε κυρτή στο $x = 0$. Σημειώνουμε ότι η f είναι κυρτή σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία (γιατί;).

Παράδειγμα 3.17 (Εφαρμογή). Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

Η f ορίζεται για $x \neq \pm\sqrt{2}$.

Άσκηση 3.19 (Ανισότητα του Young). Εάν a και b είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $p, q > 1$ με $1/p + 1/q = 1$ δείξτε ότι

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Υπόδειξη: Εάν $ab = 0$ η ανισότητα είναι προφανής. Υποθέστε ότι $a > 0$, $b > 0$ και θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx, \qquad x > 0.$$

3.5 Η ιδιότητα Darboux

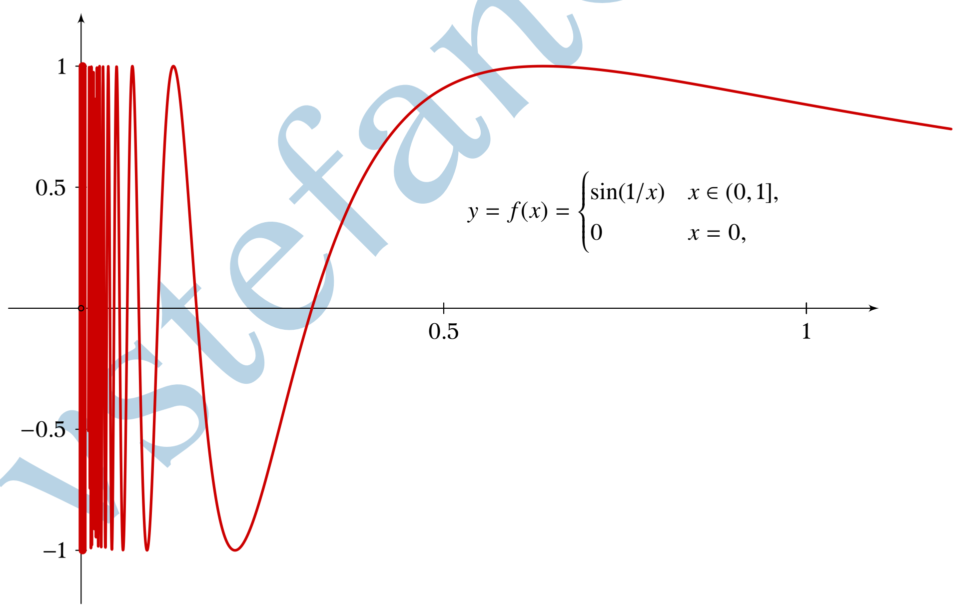
Ορισμός 3.9. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **έχει την ιδιότητα Darboux** ή **είναι Darboux συνεχής** εάν για $s < t$ στο $[a, b]$ με $f(s) \neq f(t)$ και για c μεταξύ των $f(s)$ και $f(t)$ υπάρχει $q \in (s, t)$ ώστε $f(q) = c$.

Έτσι μια συνάρτηση η οποία έχει την ιδιότητα Darboux απεικονίζει διάστημα σε διάστημα. Από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής έπεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα $[a, b]$ έχει την ιδιότητα Darboux. Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως δείχνει το

Παράδειγμα 3.18. Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & x \in (0, 1], \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

έχει την ιδιότητα Darboux αλλά δεν είναι συνεχής στο 0.



Σχήμα 3.10: Μια μη συνεχής συνάρτηση η οποία έχει την ιδιότητα Darboux

Η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$ αλλά όχι στο $x = 0$. Πράγματι οι ακολουθίες

$$a_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad b_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

συγκλίνουν στο μηδέν αλλά ενώ $f(a_n) = 0 \to 0 = f(0)$ έχουμε ότι $f(b_n) = 1 \to 1 \neq f(0)$.

Δείχνουμε ότι η f έχει την ιδιότητα Darboux στο $[0,1]$. Για $0 < s < t \leq 1$ η f έχει την ιδιότητα Darboux στο $[s,t]$ ως συνεχής στο διάστημα αυτό. Έστω $s \in (0,1]$ με

$$f(s) = \sin(1/s) = a \neq 0$$

Ας υποθέσουμε ότι $a > 0$. Για $b \in (0,a)$ υπάρχει αφενός $\theta \in (0,\pi/2)$ με $\sin\theta = b$ και αφετέρου φυσικός αριθμός k ώστε

$$0 < \frac{1}{\theta + 2k\pi} < s,$$

κατά συνέπεια

$$f\left(\frac{1}{\theta + 2k\pi}\right) = \sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta = b$$

που είναι το ζητούμενο. Η απόδειξη για $a < 0$ είναι ανάλογη επιλέγοντας $\theta \in (-\pi/2, 0)$.

Παρατήρηση 3.6. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του Παραδείγματος 3.18 έχει ασυνέχεια β είδους στο 0 αφού το $f(0-)$ δεν υπάρχει. Πράγματι κάθε σημείο του $[-1,1]$, του πεδίου τιμών της συνάρτησης, είναι όριο κατάλληλης ακολουθίας $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ όπου $x_n \in (0,1]$ και $x_n \to 0$. Η απόδειξη του ισχυρισμού περιέχεται στο Σχήμα 3.10 (πώς;). Αντίθετα η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & x \leq 0 \\ 1 - x^2 & x > 0 \end{cases},$$

η οποία όσον αφορά τη συνέχεια συμπεριφέρεται καλύτερα από αυτήν του Παραδείγματος 3.18, δεν έχει την ιδιότητα Darboux. Πράγματι η εικόνα του $[-1,1]$ μέσω της g είναι το $[0,1] \cup [2,3]$, βλέπε Σχήμα 2.5.

Πρόταση 3.5. *Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία έχει την ιδιότητα Darboux δεν μπορεί να έχει ασυνέχεια α είδους.*

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη με την απαγωγή σε άτοπο υποθέτουμε λοιπόν ότι στο $x_0 \in [a,b]$ η f έχει απλή ασυνέχεια.

(i) Θεωρούμε την περίπτωση αιρώμενης ασυνέχειας, δηλαδή $f(x_0-) = f(x_0+) \neq f(x_0)$, κατά συνέπεια $x_0 \in (a,b)$. Τότε είτε $f(x_0-) < f(x_0)$, ή $f(x_0-) > f(x_0)$. Ας υποθέσουμε ότι $f(x_0-) < f(x_0)$ και έστω $f(x_0-) < c < f(x_0)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $f(x) < c$ αν $x_0 - \delta < x < x_0$. Αν $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε για κάθε $x \in (x_1, x_0)$ είναι $f(x) \neq c$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η f έχει την ιδιότητα Darboux. Σε άτοπο επίσης καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $f(x_0-) > f(x_0)$.

(ii) Θεωρώντας την περίπτωση ασυνέχειας άλματος στο $x_0 \in (a,b)$ έχουμε $f(x_0-) \neq f(x_0+)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_0-) < f(x_0+)$ και έστω $f(x_0-) < c < f(x_0+)$ με $c \neq f(x_0)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$, ώστε $f(x) < c$ αν $x_0 - \delta < x < x_0$ και $f(x) > c$ αν $x_0 < x < x_0 + \delta$. Αν $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$ και $x_2 \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f(x) \neq c$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί η f έχει την

ιδιότητα Darboux. Σε άτοπο επίσης καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι $f(x_0-) > f(x_0+)$.
(iii) Αν $x_0 = b$, τότε είτε $f(b-) < f(b)$ ή $f(b-) > f(b)$. Η απόδειξη είναι όπως στο (i).
(iv) Αν $x_0 = a$, τότε είτε $f(a) < f(a+)$ ή $f(a) > f(a+)$. Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής στο (i) όπου εργαζόμαστε σε διάστημα της μορφής $(a, a+\delta)$ για κατάλληλο $\delta > 0$.
Καταλήξαμε σε άτοπο σε κάθε περίπτωση που θεωρήσαμε γιατί υποθέσαμε ότι μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα Darboux μπορεί να έχει ασυνέχεια α είδους, κατά συνέπεια μια τέτοια συνάρτηση δεν μπορεί να έχει απλή ασυνέχεια. □

Πρόταση 3.6. *Εάν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η f' έχει την ιδιότητα Darboux.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a \le s < t \le b$ και $f'(s) < f'(t)$. Έστω $f'(s) < c < f'(t)$. Ορίζουμε την $h : [s,t] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = f(x) - cx$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $[s,t]$ και $h'(x) = f'(x) - c$. Αν στο $q \in [s,t]$ η h παίρνει την ελάχιστη τιμή της, τότε επειδή $h'(s) < 0$ και $h'(t) > 0$ η h φθίνει δεξιά του s και αυξάνει πλησιάζοντας από αριστερά το t, κατά συνέπεια $q \ne s$ και $q \ne t$, οπότε $q \in (s,t)$. Επομένως $h'(q) = 0$, ισοδύναμα $f'(q) = c$, που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε. □

Πόρισμα 3.4. *Εάν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε ή f' δεν μπορεί να έχει ασυνέχειες α είδους στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Το συμπέρασμα είναι συνέπεια των Προτάσεων 3.5 και 3.6. □

3.6 Απροσδιόριστες μορφές

Γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

και υπολογίζουμε

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \lim_{x\to 1}(1+x) = 2.$$

Ενώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, και στα δύο κλάσματα, τείνουν στο μηδέν τα όρια είναι διαφορετικά. Αυτό το αποτέλεσμα μας λέει ότι η πράξη $0/0$ δεν μπορεί να οριστεί, δηλαδή η μορφή $0/0$ είναι απροσδιόριστη. Άλλες απροσδιόριστες μορφές είναι οι ∞/∞, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Θεώρημα 3.14 (Ο κανόνας του L'Hospital). *Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (a,b) το οποίο περιέχει το σημείο x_0, εκτός ίσως από το ίδιο το σημείο x_0 και έστω $g'(x) \ne 0$ για $x \ne x_0$. Αν*

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *ή*

(2) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$,

έχουμε δηλαδή απροσδιόριστη μορφή του τύπου $0/0$ *ή* ∞/∞, *τότε*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{3.30}$$

εάν το όριο στο δεξί μέλος υπάρχει, ή είναι $+\infty$ *ή* $-\infty$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την περίπτωση όπου το όριο στο δεξί μέλος της (3.30) είναι πεπερασμένο.
(1) Επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ ορίζοντας $f(x_0) = g(x_0) = 0$ οι συναρτήσεις f και g γίνονται συνεχείς σε ολόκληρο το διάστημα. Από το γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy, αφού οι f' και g' δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα καθόσον $g'(x) \neq 0$, έχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(\xi_x)}{g(\xi_x)} \qquad x_0 < \xi_x < x < b$$

για κάθε $x > x_0$. Αν το όριο, έστω L, στο δεξί μέλος της (3.30) υπάρχει παίρνουμε

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Με συνδυασμό των δύο αποτελεσμάτων προκύπτει η (3.30) για τη μορφή $0/0$.
(2) Επειδή $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, τότε υπάρχει x_1 με $a < x_0 < x_1 < b$ ώστε $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$ για $x \in (x_0, x_1]$. Από το γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής του Cauchy παίρνουμε

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \qquad x_0 < x < \xi_x < x_1$$

κατά συνέπεια

$$\frac{f(x)}{g(x)}\frac{1 - f(x_1)/f(x)}{1 - g(x_1)/g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}$$

για $x_0 < x < \xi_x < x_1$. Αν το όριο, έστω L, στο δεξί μέλος της (3.30) υπάρχει γράφουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - L\right)\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)} + L\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}$$

και στη συνέχεια

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - L\right)\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)} + L\left(\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)} - 1\right) \tag{3.31}$$

για $x_0 < x < \xi_x < x_1$. Επειδή

$$\lim_{x\to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_0+} \frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)} = 1$$

για δοσμένο $\epsilon > 0$ αυθαίρετα μικρό επιλέγοντας αρχικά x_1 ώστε

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{για } x_0 < x < x_1, \tag{3.32}$$

έτσι από την (3.31) παίρνουμε

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leq \frac{\epsilon}{2}\left|\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)}\right| + |L|\left|\frac{1 - g(x_1)/g(x)}{1 - f(x_1)/f(x)} - 1\right| \tag{3.33}$$

για $x_0 < x < x_1$. Το όριο στο δεξί μέλος της (3.33) καθώς $x \to x_0+$ είναι $\epsilon/2$, κατά συνέπεια υπάρχει x_2 με $x_0 < x_2 < x_1$, ώστε

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon \qquad \text{για } x_0 < x < x_2, \tag{3.34}$$

ισοδύναμα

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = L = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Με συνδυασμό των δύο αποτελεσμάτων προκύπτει η (3.30) για τη μορφή $(+\infty)/(+\infty)$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η περίπτωση $(-\infty)/(-\infty)$.
Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση όπου το όριο στο δεξί μέλος της (3.30) είναι $\pm\infty$. Η απόδειξη που δώσαμε όταν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ είναι ανεξάρτητη από το αν το όριο L είναι πεπερασμένο ή όχι, κατά συνέπεια ισχύει και στην περίπτωση όπου $L = \pm\infty$. Στην περίπτωση τώρα όπου $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ και

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty,$$

τότε αφενός $|f'(x)/g'(x)| > 1$ σε ένα διάστημα γύρω από το x_0 άρα $f'(x) \neq 0$ στο διάστημα αυτό, και αφετέρου

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0.$$

Κατά συνέπεια από το πρώτο μέρος της απόδειξης παίρνουμε

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g'(x)}{f'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Το ανάλογο ισχύει όταν $L = -\infty$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 3.7. Κατά την απόδειξη του Θεωρήματος 3.14 δείξαμε ότι το αποτέλεσμα του κανόνα του L'Hospital ισχύει αν το όριο $x \to x_0$ αντικατασταθεί με ένα από τα όρια $x \to x_0+$, $x \to x_0-$. Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα του κανόνα ισχύει επίσης αν το όριο $x \to x_0$ αντικατασταθεί με ένα από τα όρια $x \to +\infty$, ή $x \to -\infty$. Πράγματι $x \to +\infty \Leftrightarrow t = 1/x \to 0+$, έτσι ορίζοντας $\tilde{f}(x) = f(1/x)$ και $\tilde{g}(x) = g(1/x)$, από το Θεώρημα 3.14 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0+}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0+}\frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)} &= \lim_{t\to 0+}\frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)}\\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)}\\ &= \lim_{t\to 0+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.19. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0}(2^x-1) = 2^0-1 = 0, \qquad \lim_{x\to 0} x = 0,$$

και

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x\log 2}{1} = \log 2,$$

ο κανόνας του L'Hospital εφαρμόζεται, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)'}{x'} = \log 2.$$

Παράδειγμα 3.20. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}.$$

Αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2$, τότε το όριο

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

είναι της μορφής ∞/∞ και το

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$$

είναι επίσης της μορφής ∞/∞, ενώ

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty,$$

κατά συνέπεια ο κανόνας του L'Hospital εφαρμόζεται, οπότε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Άσκηση 3.20. Δείξτε ότι για κάθε $r > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^r} = 0.$$

Παράδειγμα 3.21. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0+} x \log x.$$

Το όριο είναι του τύπου $0 \cdot \infty$ οπότε μπορεί να μετασχηματιστεί σε $0 \cdot 1/0 = 0/0$ ή σε $1/\infty \cdot \infty = \infty/\infty$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} x \log x &= \lim_{x\to 0+} \frac{\log x}{1/x} \qquad \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x\to 0+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.22. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{1/x}.$$

Το όριο είναι του τύπου 1^∞. Γράφοντας

$$(1 + \sin x)^{1/x} = e^{\log(1+\sin x)^{1/x}} = e^{[\log(1+\sin x)]/x}$$

βλέπουμε ότι καθώς $x \to 0$ ο εκθέτης είναι του τύπου $0/0$ οπότε από την συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης έχουμε

$$\lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{[\log(1+\sin x)]/x} = e^{\lim_{x\to 0}[\log(1+\sin x)]/x}.$$

Υπολογίζοντας τον εκθέτη

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 1,$$

τελικά βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}(1 + \sin x)^{1/x} = e^1 = e.$$

Άσκηση 3.21. Να υπολογιστούν τα όρια

(α΄) $\lim_{x\to 0}(e^{3x} - 5x)^{1/x}$.

(β΄) $\lim_{x\to\infty}(e^{3x} - 5x)^{1/x}$.

Άσκηση 3.22. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Ακολουθίες και L' Hospital

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = r \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = s.$$

Ορίζοντας τις ακολουθίες $a_n = f(n)$ και $b_n = f(1/n)$, επίσης ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = r \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = s.$$

Έτσι αν ο κανόνας του L' Hospital εφαρμόζεται στη συνεχή περίπτωση, δηλαδή στην ανάλογη συνάρτηση f και δίνει το όριο της συνάρτησης, τότε αυτό το όριο είναι και το όριο της ακολουθίας.

Παράδειγμα 3.23. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_n = n(e^{1/n} - 1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Γράφοντας

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n}$$

βλέπουμε ότι το όριο της a_n είναι το

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x},$$

εφόσον αυτό υπάρχει. Το τελευταίο όριο είναι η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης στο $x = 0$, επομένως

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = e^0 = 1.$$

Παράδειγμα 3.24. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Τα ανάλογα όρια της συνεχούς περίπτωσης είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right)^x, \qquad \text{ή} \qquad \lim_{x\to 0}\left(1 + \sin x\right)^{1/x}.$$

Και τα δύο όρια είναι της μορφής 1^∞. Στο Παράδειγμα 3.22, κάνοντας χρήση του κανόνα του L' Hospital υπολογίσαμε το δεύτερο όριο και δείξαμε ότι ισούται με e. Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}\left(1 + \sin x\right)^{1/x} = e.$$

Παράδειγμα 3.25. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(\frac{\log(n+1)}{n^p}\right)^q, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

όπου p και q είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Εξετάζουμε πρώτα αν το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n^p}$$

υπάρχει. Θεωρώντας τη συνεχή περίπτωση με x στη θέση του n βλέπουμε ότι το όριο είναι της μορφής ∞/∞, και ότι ο αριθμητής $\log(x+1)$ και ο παρονομαστής x^p είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, έτσι από τον κανόνα του L' Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/(x+1)}{px^{p-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^{p-1}(x+1)}.$$

Αν $p \geq 1$ το παραπάνω όριο είναι ίσο με μηδέν, ενώ αν $0 < p < 1$ έχουμε για $x > 0$

$$0 \leq \frac{1}{px^{p-1}(x+1)} \leq \frac{1}{px^{p-1}x} = \frac{1}{px^p}.$$

Το δεξί μέλος της ανισότητας τείνει στο 0 καθώς $x \to +\infty$, αφού $p > 0$, έτσι τελικά έχουμε για $0 < p < 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{px^{p-1}(x+1)} = 0.$$

Έτσι τελικά και σε συνδυασμό με τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, $a > 0$ παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log(n+1)}{n^p}\right)^q = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{n^p}\right)^q = 0^q = 0.$$

Ασκήσεις

1. Αν η f είναι μια πραγματική συνάρτηση, παραγωίσιμη στο $a > 0$ να υπολογισθούν εφόσον υπάρχουν τα όρια

   (α΄) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ (β΄) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^k \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \qquad k = 1, 2.$$

   (α΄) Για $k = 1$: Είναι η f συνεχής στο $x = 0$; Είναι η f παραγωγίσιμη στο $x = 0$;

   (β΄) Για $k = 2$: Είναι η f παραγωγίσιμη στο $x = 0$; Είναι η f' συνεχής στο $x = 0$;

3. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

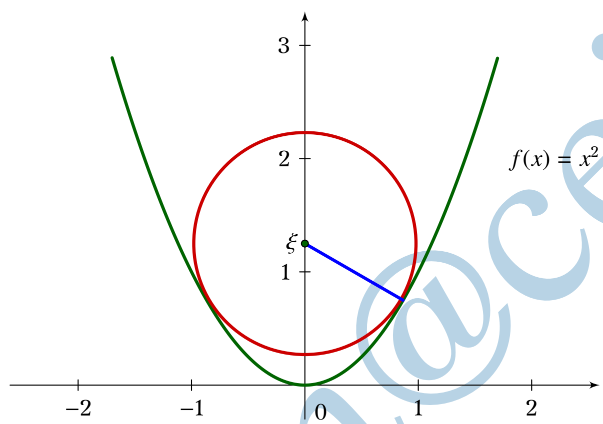
   δείξτε ότι είναι συνεχής στο $x = 0$, παραγωγίσιμη το $x = 0$, και η παράγωγος στο $x = 0$ είναι συνεχής.

4. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

εξετάστε αν είναι συνεχής στο $x = 0$, ή παραγωγίσιμη το $x = 0$.

5. Περιφέρεια ακτίνας $r = 1$ ισορροπεί στο εσωτερικό της παραβολής $y = x^2$, όπως δείχνει το Σχήμα 3.11.



Σχήμα 3.11: Άσκηση 5

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου της περιφέρειας, από συμμετρία $(0, \xi)$, καθώς και τα σημεία τομής της περιφέρειας με την παραβολή.

6. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει πραγματικός αριθμός $\delta_n \in (0,1)$ ώστε

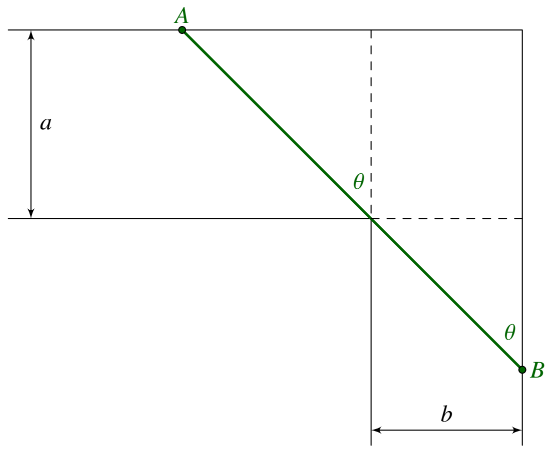
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n/(n+\delta_n)}. \tag{3.35}$$

Γράφοντας

$$\frac{n}{n+\delta_n} = 1 - \frac{\delta_n}{n+\delta_n}$$

βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο η αύξουσα ακολουθία στο αριστερό μέλος της (3.35) συγκλίνει στον αριθμό e.

7. Να βρεθεί το μέγιστο μήκος σκάλας η οποία μπορεί να περάσει από τη γωνία του διαδρόμου με διαστάσεις a και b του Σχήματος 3.12. **Υπόδειξη:** Εκφράστε το μήκος L της σκάλας AB ως συνάρτηση της γωνίας θ που σχηματίζει το τμήμα AB με την κατακόρυφη πλευρά του διαδρόμου.



Σχήμα 3.12: Άσκηση 7

8. Να βρεθούν σταθερές a και b, αν υπάρχουν τέτοιες, ώστε

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x^3}+\frac{a}{x^2}+b\right)=0.$$

9. Να υπολογισθούν τα όρια

(α΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}\qquad a>0,\quad b>0$

(β΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos ax)}{\log(\cos bx)}\qquad a>0,\quad b>0$

(γ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

(δ΄) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\sqrt[4]{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$

(ε΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\left(\log\frac{1}{x}\right)^{x}$

(ϛ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{1/(1-x)}$

(ζ΄) $\displaystyle\lim_{x\to 1-}(\log x)\log(1-x)$

(η΄) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}x^{1/\log x}$

Μέρος IV

Ολοκληρώματα

Κεφάλαιο 1

Ολοκληρώματα

1.1 Το ορισμένο ολοκλήρωμα

Ορισμός 1.1. Εάν $[a, b]$ είναι ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, λέγοντας **διαμέριση** του $[a, b]$ εννοούμε ένα σύνολο πεπερασμένου πλήθους σημείων $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\} \subset [a, b]$ ώστε $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$. Γράφουμε $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Έάν P και P' είναι διαμερίσεις του $[a, b]$ και $P \subset P'$ θα λέμε ότι η P' είναι **λεπτότερη** της P, ή ότι είναι μια **εκλέπτυνση** της P.

Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ και αν $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, N$ διαμορφώνουμε το άθροισμα

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_N)(x_N - x_{N-1}) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1.1}$$

Θέτουμε $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \ldots, N\}$. Εάν καθώς ο αριθμός των σημείων N στη διαμέριση αυξάνει απεριόριστα, ώστε $\|P\| \to 0$, το αντίστοιχο όριο

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k$$

υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της επιλογής των σημείων ξ_k το συμβολίζουμε με

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f,$$

δηλαδή

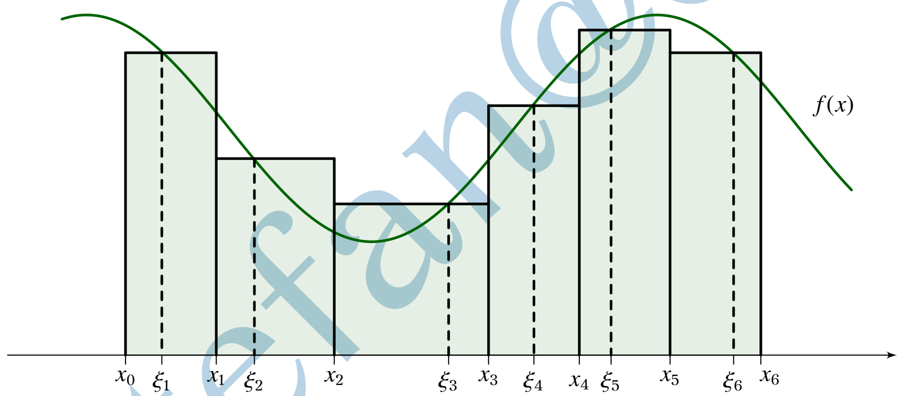
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx,$$

και το λέμε **ολοκλήρωμα Riemann**, ή απλά **ολοκλήρωμα** της f στο $[a, b]$.

Ορισμός 1.2. Μια συνάρτηση f ορισμένη και φραγμένη σε κάποιο διάστημα $[a, b]$ θα λέγεται **ολοκληρώσιμη κατά Riemmann**, ή απλά **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$, αν υπάρχει αριθμός $I(f)$, το ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$, ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$, και $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, N$, τότε

$$\left| \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k - I(f) \right| < \epsilon. \tag{1.2}$$

Το άθροισμα στην (1.2) λέγεται **άθροισμα Riemann** της f για την διαμέριση P στο $[a, b]$ και συμβολίζεται με $S(f, P)$. Τα σημεία a και b λέγονται **άκρα της ολοκλήρωσης** με a να είναι το κάτω άκρο και b να είναι το άνω άκρο της ολοκλήρωσης.



Σχήμα 1.1: Το άθροισμα Riemann ($N = 6$, $a = x_0$, $b = x_6$)

Παρατήρηση 1.1. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού του ολοκληρώματος είναι ότι εάν $f(x) = c$ σε κάποιο διάστημα $[a, b]$, όπου c είναι μια σταθερά, τότε για κάθε διαμέριση του $[a, b]$ το αντίστοιχο άθροισμα Riemann είναι ίσο με $c(b - a)$, επομένως το ολοκλήρωμα της f υπάρχει και

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a).$$

Κατά συνέπεια κάθε σταθερή συνάρτηση σε κλειστό και φραγμένο διάστημα είναι ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμά της είναι ίσο με την τιμή της συνάρτησης επί το μήκος του διαστήματος.

Παρατήρηση 1.2. Μια άλλη συνέπεια του ορισμού είναι ότι αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ και $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία διαμερίσεων του $[a, b]$ με $\|P_n\| \to 0$

καθώς $n \to \infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx$$

όπου $S(f, P_n)$ είναι οποιοδήποτε άθροισμα Riemann της f για την P_n. Πράγματι για $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν $\|P_n\| < \delta$, τότε

$$\left| S(f, P_n) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \epsilon,$$

και αφού $\|P_n\| \to 0$ υπάρχει N ώστε για $n \geq N$ είναι $\|P_n\| < \delta$.

Πρόταση 1.1. *Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε υπάρχει ακολουθία $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ διαμερίσεων του $[a, b]$ με $\|P_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, και*

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

όπου $S(f, P_n)$ είναι οποιοδήποτε άθροισμα Riemann της f για την P_n.

Απόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\delta_n > 0$ ώστε αν P είναι διαμέριση του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta_n$, τότε

$$\left| S(f, P) - \int_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{1}{n}.$$

Επιλέγοντας P_n ώστε $\|P_n\| < \min\{\delta_n, 1/n\}$ η ακολουθία που διαμορφώνεται ικανοποιεί τις προδιαγραφές. □

Θεώρημα 1.1. *Έστω ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$. Για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών λ και μ η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ και $I(g) = \int_a^b g(x)\,dx$. Για $\lambda = \mu = 0$ το αποτέλεσμα είναι προφανές. Έστω λοιπόν ότι τουλάχιστον μία από τις σταθερές λ και μ είναι διάφορη του μηδενός, και έστω $\epsilon > 0$. Από την υπόθεση έπεται ότι υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ ώστε αν P_1 και P_2 είναι διαμερίσεις του $[a, b]$ με $\|P_1\| < \delta_1$ και $\|P_2\| < \delta_2$, τότε για κάθε άθροισμα Riemann $S(f, P_1)$ της f για την P_1 και για κάθε άθροισμα Riemann $S(g, P_2)$ της g για την P_2 είναι

$$|S(f, P_1)| < \frac{\epsilon}{|\lambda| + |\mu|} \qquad \text{και} \qquad |S(g, P_2)| < \frac{\epsilon}{|\lambda| + |\mu|}. \tag{1.3}$$

Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και P είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$, τότε

$$\sum_k (\lambda f + \mu g)(\xi_k)\Delta_k = \sum_k (\lambda f(\xi_k) + \mu g(\xi_k))\Delta_k = \lambda \sum_k f(\xi_k)\Delta_k + \mu \sum_k g(\xi_k)\Delta_k$$

οπότε

$$\begin{aligned}
|S(\lambda f+\mu g,P)-(\lambda I(f)+\mu I(g))| &= |\lambda S(f,P)+\mu S(g,P)-(\lambda I(f)+\mu I(g))| \\
&\le |\lambda S(f,P)-\lambda I(f)|+|\mu S(g,P)-\mu I(g)| \\
&= |\lambda||S(f,P)-I(f)|+|\mu||S(g,P)-I(g)| \\
&< \frac{|\lambda|\epsilon}{|\lambda|+|\mu|}+\frac{|\mu|\epsilon}{|\lambda|+|\mu|}=\epsilon,
\end{aligned}$$

κατά συνέπεια η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη, και $\int_a^b(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g$. □

Πρόταση 1.2. *Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ίση με την f εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων του $[a,b]$, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Υποθέτοντας ότι $c_1<\cdots<c_n$ είναι τα σημεία στα οποία διαφέρουν οι τιμές των f και g θέτουμε

$$M=\max\{|f(c_j)-g(c_j)|:j=1,\dots,n\}.$$

Για δοσμένο $\epsilon>0$ υπάρχει δ_1 ώστε αν P είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ με $\|P\|<\delta_1$, τότε

$$\left|S(f,P)-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\frac{\epsilon}{2}.$$

Έστω $\delta=\min\{\delta_1,\epsilon/(2nM)\}$. Αν P είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ με $\|P\|<\delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|S(g,P)-\int_a^b f(x)\,dx\right| &\le \left|S(g,P)-S(f,P)\right|+\left|S(f,P)-\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&< \left|\sum_{k=1}^N (g(\xi_k)-f(\xi_k))\Delta x_k\right|+\frac{\epsilon}{2} \\
&\le \sum_{k=1}^N |g(\xi_k)-f(\xi_k)|\Delta x_k+\frac{\epsilon}{2} \\
&\le nM\|P\|+\frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon
\end{aligned}$$

από την επιλογή του δ, απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.2. *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει, δηλαδή υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ μπορεί να επιλεγεί $\delta > 0$ ώστε αν P είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ με $\|P\| < \delta$ και $S(f,P)$ είναι ένα άθροισμα Riemann της f για την P, τότε $|S(f,P) - s| < \epsilon$, βλέπε (1.2).

Βήμα 1. Κατασκευή μιας ειδικής ακολουθίας διαμερίσεων $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ του $[a,b]$.

Έστω P μια διαμέριση του $[a,b]$. Θέτουμε $P_0 = P$ και ορίζουμε επαγωγικά την ακολουθία των διαμερίσεων $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου η P_n προκύπτει από την P_{n-1} εάν η P_{n-1} εμπλουτισθεί με τα μέσα των υποδιαστημάτων του $[a,b]$ τα οποία ορίζει η P_{n-1}, κατά συνέπεια

$$P_1 = P_0 \cup \left\{\frac{x_{k-1} + x_k}{2} : x_{k-1}, x_k \in P_0\right\}, \quad \ldots, \quad P_n = P_{n-1} \cup \left\{\frac{x_{k-1} + x_k}{2} : x_{k-1}, x_k \in P_{n-1}\right\}, \tag{1.4}$$

για $n = 1, 2, \ldots$ Έτσι έχουμε

(1) $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \cdots$

(2) $\|P_n\| = \frac{1}{2}\|P_{n-1}\| = \frac{1}{2^n}\|P_0\| \to 0$, καθώς $n \to \infty$

για $n = 1, 2, \ldots$.

Βήμα 2. Κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $(S(f,P_n))_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει.

Η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$ και έστω ότι $m \le f(x) \le M$. Αν $P_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ θέτουμε

$$m_k = \min\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\} \qquad \text{και} \qquad M_k = \max\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\},$$

$k = 1, 2, \ldots, N$ και ορίζουμε

$$L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{N} m_k \Delta x_k, \qquad \text{και} \qquad U(f, P_n) = \sum_{k=1}^{N} M_k \Delta x_k,$$

τότε για κάθε άθροισμα Riemann $S(f,P_n)$ της f για τη διαμέριση P_n είναι

$$m(b-a) \le L(f,P_n) \le S(f,P_n) \le U(f,P_n) \le M(b-a). \tag{1.5}$$

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$m(b-a) \le L(f,P_0) \le L(f,P_1) \le \cdots \le L(f,P_{n-1}) \le L(f,P_n) \le \cdots \le M(b-a) \tag{1.6}$$

$$M(b-a) \ge U(f,P_0) \ge U(f,P_1) \ge \cdots \ge U(f,P_{n-1}) \ge U(f,P_n) \le \cdots \ge m(b-a) \tag{1.7}$$

(γιατί;). Έτσι οι ακολουθίες $(L(f,P_n))_{n=1}^{\infty}$ και $(U(f,P_n))_{n=1}^{\infty}$ ως μονότονες και φραγμένες συγκλίνουν. Έστω $\underline{s}$ και $\overline{s}$ τα αντίστοιχα όρια. Δείχνουμε ότι $\underline{s} = \overline{s}$. Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$ (γιατί;) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad |x - x'| < \delta, \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

έτσι αν $\|P_n\| < \delta$, τότε $M_k - m_k < \epsilon/(b-a)$, οπότε

$$0 \leq U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=1}^{N_n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{N_n} \Delta x_k = \epsilon$$

για όλα τελικά τα n, απ' όπου παίρνοντας το όριο $n \to \infty$ έπεται ότι $\overline{s} - \underline{s} < \epsilon$, κατά συνέπεια $\overline{s} = \underline{s}$ αφού το ϵ είναι τυχαίο. Αν με s συμβολίσουμε το κοινό όριο από την (1.5) έπεται ότι το όριο της $(S(f, P_n))_{n=1}^{\infty}$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = s. \tag{1.8}$$

Βήμα 3. Η f είναι ολοκληρώσιμη και $s = \int_a^b f(x)\,dx$.

Έστω $\epsilon > 0$, από την ομοιόμορφη συνέχεια έπεται ότι υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad |x - x'| < \delta_1, \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Έστω $\tilde{P} = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{\tilde{n}}\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$ με $\|\tilde{P}\| < \delta_1/2$. Από την ακολουθία των διαμερίσεων του Βήματος 1, αφού $\|P_n\| \to 0$, επιλέγουμε μια διαμέριση P_n με

$$\|P_n\| < \min\{\Delta\tilde{x}_k : k = 0, 1, \dots \tilde{n}\}, \qquad \text{και} \qquad |S(f, P_n) - s| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.9}$$

Αν $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_{N_n}\}$, ($N_n > \tilde{n}$, από την επιλογή της P_n), θέτουμε $P' = \tilde{P} \cup P_n = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_{N'}\}$, όπου $N_n \leq N' \leq N_n + \tilde{n} - 2$. Τότε $\Delta x'_i < \delta_1/2$ και θέλοντας να εκτιμήσουμε τη διαφορά αθροισμάτων Riemann της f για τις P_n και $\tilde{P}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|S(f, P_n) - S(f, \tilde{P})\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N_n} f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{j=1}^{\tilde{n}} f(\tilde{\xi}_j)\Delta x_j\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{N'} (f(\xi_i) - f(\tilde{\xi}_i))\Delta x'_i\right|\end{aligned}$$

όπου κάποια από τα ξ_i και $\tilde{\xi}_i$ επαναλαμβάνονται λόγω της (1.9)[1]. Τότε $|\xi_i - \tilde{\xi}_i| < \delta_1$, συνεπώς

$$\begin{aligned}|S(f,P_n) - S(f,\tilde{P})| &\le \sum_{i=1}^{N'} |f(\xi_i) - f(\tilde{\xi}_i)|\Delta x_i' \\ &< \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{N'} \Delta x_i' \\ &= \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Έτσι από την τελευταία ανισότητα και την (1.9) τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned}|S(f,\tilde{P}) - s| &\le |S(f,\tilde{P}) - S(f,P_n)| + |S(f,P_n) - s| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon\end{aligned}$$

που είναι ό,τι θέλαμε να δείξουμε με $\delta = \delta_1/2$. □

Πρόταση 1.3. *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ τότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, και αν $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$ είναι τα σημεία ασυνέχειας της f, τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη όταν η f έχει ένα σημείο ασυνέχειας έστω c στο $[a,b]$. Για περισσότερα του ενός σημεία ασυνέχειας η απόδειξη εύκολα γενικεύεται. Έστω $c \in (a,b)$, τότε η f είναι συνεχής στα $[a,c)$ και $(c,b]$ και τα πλευρικά όρια $f(c-)$ και $f(c+)$ υπάρχουν. Θέτουμε $f_1(c) = f(c-)$ και $f_2(c) = f(c+)$, και ορίζουμε

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x) \quad a \le x < c, \qquad f_1(c) = f(c-) \\ f_2(x) &= f(x) \quad c < x \le b, \qquad f_2(c) = f(c+). \end{aligned}$$

[1]Από την επιλογή της διαμέρισης έχουμε ότι αν $x_k < \tilde{x}_j$, τότε $x_{k+1} < \tilde{x}_{j+1}$. Έτσι αν, για παράδειγμα, $a < x_1 < x_2 < \tilde{x}_1 < x_3$ και

$$S(f,P_n) = f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots \qquad S(f,\tilde{P}) = f(\tilde{\xi}_1)(\tilde{x}_1 - a) + f(\tilde{\xi}_2)(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) + \cdots$$

τότε

$$\begin{aligned} S(f,P_n) &= f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(\tilde{x}_1 - x_2) + f(\xi_3)(x_3 - \tilde{x}_1) + \cdots \\ S(f,\tilde{P}) &= f(\tilde{\xi}_1)(x_1 - a) + f(\tilde{\xi}_1)(x_2 - x_1) + f(\tilde{\xi}_1)(\tilde{x}_1 - x_2) + f(\tilde{\xi}_2)(x_3 - \tilde{x}_1) + \cdots \end{aligned}$$

οπότε

$$S(f,P_n) - S(f,\tilde{P}) = (f(\xi_1) - f(\tilde{\xi}_1))\Delta x_1' + (f(\xi_2) - f(\tilde{\xi}_1))\Delta x_2' + (f(\xi_3) - f(\tilde{\xi}_1))\Delta x_3' + (f(\xi_3) - f(\tilde{\xi}_2))\Delta x_4' + \cdots$$

και

$$|\xi_1 - \tilde{\xi}_1| < |\tilde{x}_1 - a| < \delta_1/2, \qquad |\xi_2 - \tilde{\xi}_1| < |\tilde{x}_1 - a| < \delta_1/2, \qquad |\xi_3 - \tilde{\xi}_1| < \begin{cases} |\tilde{x}_1 - a| < \delta_1/2, & \text{αν } \xi_3 \le \tilde{x}_1 \\ |\tilde{x}_2 - a| < \delta_1, & \text{αν } \xi_3 > \tilde{x}_1. \end{cases}$$

Η f_1 είναι συνεχής στο $[a, c]$ άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό και το αυτό ισχύει για την f_2 στο $[c, b]$, κατά συνέπεια η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$, βλέπε Πρόταση 1.2 και

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^c f_1(x)\,dx \qquad \text{και} \qquad \int_c^b f(x)\,dx = \int_c^b f_2(x)\,dx.$$

Έστω $\epsilon > 0$, τότε υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ ώστε αν P_1 είναι διαμέριση του $[a, c]$ και P_2 είναι διαμέριση του $[c, b]$ με $\|P_1\| < \delta_1$ και $\|P_2\| < \delta_2$ τότε

$$\left|S(f, P_1) - \int_a^c f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{και} \qquad \left|S(f, P_2) - \int_c^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

για κάθε άθροισμα Riemann $S(f, P_1)$ της f για την P_1 και για κάθε άθροισμα Riemann $S(f, P_2)$ της f για την P_2. Αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ και P είναι μια διαμέριση του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$, τότε και η $P^* = P \cup \{c\}$ ικανοποιεί την $\|P^*\| < \delta$, και αν $P_1 = P \cap [a, c]$ και $P_2 = P \cap [c, b]$, τότε

$$\begin{aligned}
\left|S(f, P) - \left(\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\right)\right| &= \left|S(f, P_1) + S(f, P_2) - \left(\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\right)\right| \\
&\le \left|S(f, P_1) - \int_a^c f(x)\,dx\right| + \left|S(f, P_2) - \int_c^b f(x)\,dx\right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

αφού $\|P_1\| < \delta \le \delta_1$ και $\|P_2\| < \delta \le \delta_2$, άρα η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Αν $c = a$, τότε η f συμφωνεί παντού εκτός από το $x = a$ με την συνεχή συνάρτηση

$$f_2(x) = f(x) \quad a < x \le b, \qquad f_2(a) = f(a+),$$

έτσι από την Πρόταση 1.2 έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_2(x)\,dx,$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο της τιμής της f στο $x = a$. Η απόδειξη όταν $c = b$ είναι ανάλογη. □

Παρατήρηση 1.3. Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $f(x) \ge 0$ στο διάστημα αυτό, τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι το εμβαδόν της περιοχής R του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ του x-άξονα, του γραφήματος της f και των ευθειών $x = a$ και $x = b$. Το αποτέλεσμα αυτό έπεται από το γεγονός ότι κάθε άθροισμα Riemann της f είναι το άθροισμα εμβαδών διαδοχικών ορθογωνίων το "άθροισμα" των οποίων, καθώς το μήκος της βάσης Δx τείνει στο μηδέν, προσεγγίζει όλο και περισσότερο την περιοχή R, βλέπε Σχήμα 1.1.

Παράδειγμα 1.1. Με τον ορισμό του ολοκληρώματος να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\,dx.$$

Η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι συνεχής παντού άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Επιπλέον το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα δίνει το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$, κατά συνέπεια θα πρέπει το ζητούμενο ολοκλήρωμα να ισούται με $1/2$. Αφού το ολοκλήρωμα υπάρχει, είναι ανεξάρτητο του τύπου των διαμερίσεων που χρησιμοποποιούνται στη διαμόρφωση των αθροισμάτων Riemann. Έτσι για $N \in \mathbb{N}$ παίρνουμε την διαμέριση

$$0 < \frac{1}{N} < \frac{2}{N} < \cdots < \frac{N-1}{N} < 1$$

και ως ξ_k το κέντρο κάθε υποδιαστήματος $[(k-1)/N, k/N]$, δηλαδή $\xi_k = (2k-1)/2N$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Οπότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann γίνεται

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{2k-1}{2N}\frac{1}{N} = \frac{1}{2N^2}\sum_{k=1}^{N}(2k-1)$$

Υπολογίζοντας

$$\sum_{k=1}^{N}(2k-1) = \sum_{k=1}^{N} 2k - \sum_{k=1}^{N} 1 = 2\sum_{k=1}^{N} k - N = 2\sum_{k=1}^{N} k - N = 2\frac{N(N+1)}{2} - N = N^2$$

τελικά βρίσκουμε

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{2N^2}N^2 = \frac{1}{2},$$

κατά συνέπεια, όπως εξάλου περιμέναμε,

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 1.1. Με τον ορισμό του ολοκληρώματος να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2\,dx.$$

Παράδειγμα 1.2. Να υπολογισθεί το

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right).$$

Θέλουμε να δούμε το ζητούμενο όριο ως όριο αθροισμάτων Riemann. Έτσι γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n} &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\\ &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,\end{aligned}$$

όπου για $k=1,2,\ldots,n$ είναι

$$\xi_k=\frac{k}{n},\qquad \Delta x_k=\frac{1}{n},\qquad \text{και}\qquad f(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Έτσι η σχετική διαμέριση αποτελείται από τα σημεία $x_0=0$, $x_1=1/n$, $x_2=2/n$, $\ldots$, $x_n=n/n=1$. Κατά συνέπεια

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

το οποίο υπάρχει αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Αργότερα θα δούμε ότι το ολοκλήρωμα είναι ίσο με $\log 2$.

Παρατήρηση 1.4. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$ το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$, όπως φαίνεται και από την (1.1), είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής x. Έτσι μπορούμε, για παράδειγμα, να γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(y)\,dy=\int_a^b f(u)\,du=\int_a^b f(s)\,ds.$$

Η μεταβλήτή στο ολοκλήρωμα λέγεται και **βουβή μεταβλητή**.

Αριθμητική ολοκλήρωση: Ο κανόνας του τραπεζίου

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση χωρίζουμε το διάστημα $[a,b]$ σε n ίσου μήκους υποδιαστήματα, με τη βοήθεια της διαμέρισης $P_h=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, με $x_k-x_{k-1}=h=(b-a)/n$, για $k=1,2,\ldots,n$. Τότε τό άθροισμα

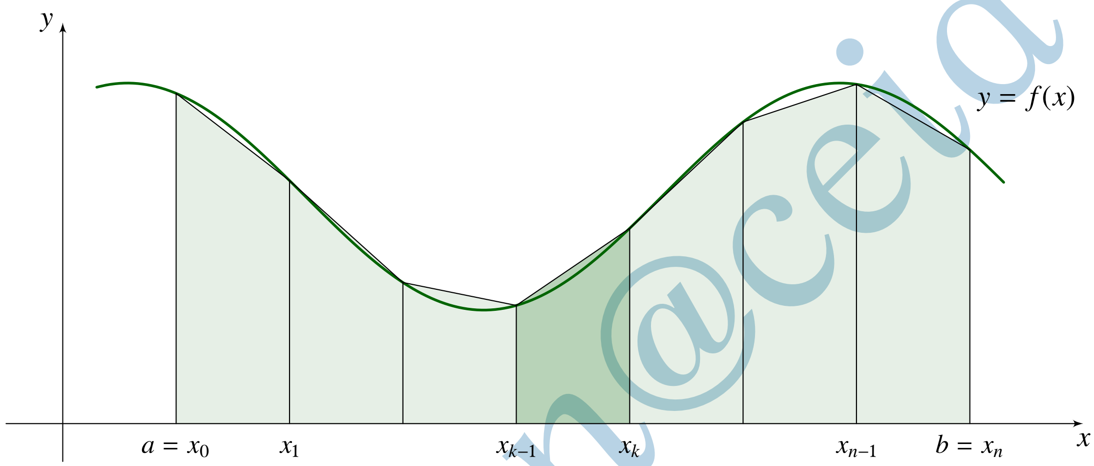
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k=f(x_0)h+f(x_1)h+\cdots+f(x_{n-1})h$$

είναι ένα τυπικό άθροισμα Riemann της f για την P_h, έστω $S(f,P_h)$, αφού $\xi_k=x_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,n$, κατά συνέπεια

$$\lim_{h\to 0} S(f,P_h)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Τότε και $S(f,P_h) + f(b)h \to \int_a^b f(x)\,dx$ καθώς $h \to 0$. Το τελευταίο άθροισμα μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)h &= f(a)\frac{h}{2} + [f(a)+f(x_1)]\frac{h}{2} + \cdots + [f(x_{n-1})+f(b)]\frac{h}{2} + f(b)\frac{h}{2}\\ &= f(a)\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+f(x_k)]\frac{h}{2} + f(b)\frac{h}{2}.\end{aligned}$$



Σχήμα 1.2: Ο κανόνας του τραπεζίου

Παρατηρούμε ότι για $f \geq 0$ ό τυπικός όρος του αθροίσματος παριστάνει το εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις $f(x_{k-1})$, $f(x_k)$ και ύψος h, βλέπε Σχήμα 1.2. Επειδή $x_k = a + k(b-a)/n$, $k = 0,1,2,\ldots,n$, για μεγάλο n, έχουμε την προσέγγιση

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\Big), \qquad \text{όπου} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Τον προσεγγιστικό αυτό τρόπο υπολογισμού του ολοκληρώματος λέμε **κανόνα του τραπεζίου**.

Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος

Θεώρημα 1.3. *Έστω ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a,b]$.*

(1) *Εάν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

(2) *Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(3) *Εάν $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

Ειδικά αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

(4) *Εάν $a < c < b$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$ και*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ και $I(g) = \int_a^b g(x)\,dx$.

(1) Για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, από την υπόθεση έπεται ότι $S(f,P) \leq S(g,P)$, έτσι αν $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία διαμερίσεων με $\|P_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) \leq \lim_{n\to\infty} S(g,P_n) \Rightarrow I(f) \leq I(g)$$

από την ύπαρξη των ορίων.

(2) Η ολοκληρωσιμότητα της $|f|$ είναι αυταπόδεικτη εάν η f είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση, αφού η απόλυτη τιμή μιας τέτοιας συνάρτησης είναι επίσης τμηματικά συνεχής. Η απόδειξη της γενικής περίπτωσης δίνεται στο Θεώρημα 1.15. Η ανισοτική σχέση είναι συνέπεια του (2) αφού $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

(3) Για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, από την υπόθεση έπεται ότι $m(b-a) \leq S(f,P) \leq M(b-a)$, οπότε θεωρώντας όπως στο (2) μια ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ με $\|P_n\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, και παίρνοντας το όριο, έπεται το ζητούμενο. Για $m = 0$ έχουμε $I(f) \geq 0$.

(4) Το αποτέλεσμα είναι προφανές αν η f είναι τμηματικά συνεχής συνάρτηση, βλέπε Πρόταση 1.3. Για την απόδειξη της γενικής περίπτωσης βλέπε Θεώρημα 1.16.

□

Σημείωση 1.1. Στη μέχρι τώρα θεώρησή μας για το ολοκλήρωμα έχουμε υποθέσει ότι το κάτω όριο ολοκλήρωσης είναι μικρότερο του άνω ορίου. Στη πράξη είναι βολικό να θεωρούμε και περιπτώσεις όπου το κάτω όριο είναι μεγαλύτερο του άνω ορίου. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a, b]$ $(a < b)$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Επίσης εάν $a \leq c \leq b$, ορίζουμε

$$\int_c^c f(x)\,dx = 0.$$

Με αυτή την επέκταση του ορισμού του ολοκληρώματος αποδεικνύεται ότι αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα I και a, b, c είναι σημεία του I, τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

για οποιαδήποτε διάταξη των a, b, c.

Το ολοκλήρωμα ομαλοποιεί

Θεώρημα 1.4. *Έστω ότι η f είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$. Η συνάρτηση που ορίζεται με τη σχέση*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$.

Θεωρήματα μέσης τιμής για ολοκληρώματα

Ορισμός 1.3. Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τον αριθμό

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ονομάζουμε **μέση τιμή** της f.

Θεώρημα 1.5. *Εάν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \overline{f}$, δηλαδή*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \overline{f}.$$

Απόδειξη. Αν η f είναι σταθερή στο διάστημα τότε $\overline{f} = f(a) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα και για κάποιο ξ στο (a,b). Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή, τότε από τη συνέχεια, Θεώρημα 2.11, έπεται ότι υπάρχουν σημεία x_1 και x_2 στο $[a,b]$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ολοκληρώνοντας, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος, παίρνουμε

$$\int_a^b f(x_1)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x_2)\,dx$$
$$(b-a)f(x_1) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)f(x_2)$$

απ' όπου έπεται ότι $f(x_1) \leq \overline{f} \leq f(x_2)$. Από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, τώρα, υπάρχει ξ μεταξύ των x_1 και x_2, κατά συνέπεια $a < \xi < b$, ώστε $f(\xi) = \overline{f}$. □

Θεώρημα 1.6. *Εάν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η g είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα, τότε υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Το συμπέρασμα ισχύει τετριμένα αν η f είναι σταθερή στο διάστημα. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η f δεν είναι σταθερή, τότε από τη συνέχεια θα υπάρχουν σημεία x_1 και x_2 στο $[a,b]$ ώστε $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Υποθέτοντας ότι $g(x) \geq 0$ παίρνουμε $f(x_1)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x_2)g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε ολοκληρώνοντας, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος, παίρνουμε

$$f(x_1)\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq f(x_2)\int_a^b g(x)\,dx$$

Από το Θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής, τώρα, υπάρχει ξ μεταξύ των x_1 και x_2, κατά συνέπεια $a < \xi < b$, ώστε

$$f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Η απόδειξη στην περίπτωση όπου $g(x) \leq 0$ προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την g με $-g$ στην απόδειξη της πρώτης περίπτωσης. □

1.2 Το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Θεώρημα 1.7 (ΘΘ1). *Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad a \leq x \leq b.$$

Αν η f είναι συνεχής στο $c \in [a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο c και $F'(c) = f(c)$. Ειδικά αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Γράφοντας $F'(a)$ εννοούμε τη δεξιά παράγωγο στο $x = a$, και $F'(b)$ εννοούμε την αριστερή παράγωγο στο $x = b$.

Το αποτέλεσμα του θεωρήματος μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

σε κάθε σημείο x όπου η f είναι συνεχής.

Θεώρημα 1.8 (ΘΘ2). *Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω $f = g'$ για κάποια συνάρτηση g, τότε*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Ειδικά αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a), \qquad \text{όπου} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Παρατήρηση 1.5. Εάν η f είναι συνεχής και οι u, v παραγωγίσιμες τότε

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Πράγατι αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και ορίσουμε $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, τότε

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_{u(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{v(x)} f(t)\,dt = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt - \int_a^{u(x)} f(t)\,dt = F(v(x)) - F(u(x))$$

και το ζητούμενο έπεται παραγωγίζοντας τα δύο μέλη και παίρνοντας υπόψη ότι $F' = f$.

Θεώρημα 1.9 (Τύπος της αντικατάστασης). *Αν οι f και g' είναι συνεχείς, τότε*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

Σημείωση 1.2. Αν $g' = f$ το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.8 το γράφουμε απλά ως

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(t)\Big]_a^b \qquad \text{όπου} \quad g(t)\Big]_a^b = g(b) - g(a).$$

Παράδειγμα 1.3. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x\,dx.$$

Από το ΘΘ2 2 έχουμε

$$\int_0^1 x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2\right)' dx = \frac{1}{2}1^2 - \frac{1}{2}0^2 = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα 1.4. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx.$$

Πάλι με χρήση του ΘΘ2 έχουμε

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} (-\cos x)' \, dx = -\cos x \Big]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2.$$

Παράδειγμα 1.5. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx.$$

Όπως πριν υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{-\cos' x}{\cos x} \, dx = -\int_0^{\pi/4} \frac{\cos' x}{\cos x} \, dx &= -\log|\cos x|\Big]_0^{\pi/4} \\ &= -\log\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + \log 1 \\ &= \frac{1}{2} \log 2.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.6. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx.$$

Αν δούμε ότι

$$\sin^5 x \cos x = \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{6} \sin^6 x\Big)$$

τότε από το ΘΘ 2 παίρνουμε

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx = \frac{1}{6} \sin^6 b - \frac{1}{6} \sin^6 a.$$

Διαφορετικά γράφοντας

$$\int_a^b \sin^5 x \cos x \, dx = \int_a^b \sin^5 x \sin' x \, dx$$

και θέτοντας $u = \sin x$ έχουμε ότι $du = \cos x \, dx$, οπότε από τον τύπο της αντικατάστασης παίρνουμε

$$= \int_{u(a)}^{u(b)} u^5 \, du = \int_{\sin a}^{\sin b} u^5 \, du = \int_{\sin a}^{\sin b} \Big(\frac{1}{6} u^6\Big)' \, du = \frac{1}{6} \sin^6 b - \frac{1}{6} \sin^6 a.$$

1.3 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Θα λέμε ότι η F είναι μια **παράγουσα** της f αν $F' = f$. Γράφοντας

$$\int f(x)\,dx$$

εννοούμε τη συλλογή όλων των παραγουσών της f. Έτσι αν $F'(x) = f(x)$, τότε

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

όπου C είναι μια σταθερά. Έτσι αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Σημειώνουμε ότι αν η f είναι συνεχής η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

είναι η (μοναδική) παράγουσα της f με $F(a) = 0$.

Παράγουσες βασικών συναρτήσεων

1. $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C, \qquad r \neq -1.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C, \qquad x \neq 0.$
3. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
4. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
5. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \log|\sec x| + C.$
6. $\displaystyle\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C.$
7. $\displaystyle\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C.$
8. $\displaystyle\int \csc x\,dx = \log|\csc x - \cot x| + C.$
9. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$
10. $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C.$
11. $\displaystyle\int e^x = e^x + C.$
12. $\displaystyle\int a^x = \frac{1}{\log a}a^x + C, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$
13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C = -\cos^{-1} x + C.$
14. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C.$
15. $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$

Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Οι μέθοδοι που αναφέρουμε αφορούν στη μορφή της προς ολοκλήρωση συνάρτησης.

- **Ολοκλήρωση κατά μέρη**

  Ολοκληρώνοντας τη σχέση $(fg)' = f'g + fg'$ προκύπτει ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη
  $$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$
  Θέτοντας $u = f(x)$ και $v = g(x)$ έχουμε $du = f'(x)\,dx$ και $dv = g'(x)\,dx$, οπότε ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη σε διαφορική μορφή γράφεται
  $$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

- **Ανάλυση σε απλά κλάσματα**

  Κάθε ρητή συνάρτηση, $p(x)/q(x)$ όπου ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος του βαθμού του αριθμητή, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα απλών κλασμάτων, τόσων στο πλήθος όσο το πλήθος των παραγόντων του $q(x)$, της μορφής
  $$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad \text{ή} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m},$$
  όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι απόρροια του

  Θεώρημα 1.10. *Αν p και q είναι πολυώνυμα, ο βαθμός του q είναι μικρότερος του βαθμού του p, και το q αναλύεται σε παράγοντες ανά δύο διαφορετικούς μεταξύ τους*
  $$q(x) = Q(x+a_1)^{m_1}\cdots(x+a_k)^{m_k}(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}\cdots(x^2+b_lx+c_l)^{n_l}$$
  όπου Q είναι μια σταθερά και τα τριώνυμα δεν έχουν πραγματικές ρίζες, τότε υπάρχουν σταθερές $A_1^1,\dots A_1^{m_1}$, $A_k^1,\dots A_k^{m_k}$, $B_1^1,\dots B_1^{n_1}$, $B_l^1,\dots B_l^{n_l}$, $C_1^1,\dots C_1^{n_1}$, $C_l^1,\dots C_l^{n_l}$ μονοσήμαντα ορισμένες, ώστε
  $$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} = {}& \frac{A_1^1}{x+a_1} + \cdots + \frac{A_1^{m_1}}{(x+a_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_k^1}{x+a_k} + \cdots + \frac{A_k^{m_k}}{(x+a_k)^{m_k}} \\ & + \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_1^{n_1}x+C_1^{n_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{B_l^1x+C_l^1}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{B_l^{n_l}x+C_l^{n_l}}{(x^2+b_1x+c_1)^{n_l}}.\end{aligned}$$

  Για παράδειγμα
  $$\frac{3x-2}{(4x-3)(2x+5)^3} = \frac{A}{4x-3} + \frac{B}{2x+5} + \frac{C}{(2x+5)^2} + \frac{D}{(2x+5)^3}$$
  $$\frac{5x^2-x+2}{(x^2+2x+4)^2(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+4)^2}$$
  Κάνοντας, σε κάθε μια από τις περιπτώσεις, τα κλάσματα ομώνυμα και εξισώνοντας τα πολυώνυμα στους αριθμητές προκύπτει ένα σύστημα με αγνώστους τις σταθερές $A, B, C, \dots$.

- **Αλλαγή μεταβλητής**

  Ο τύπος της αντικατάστασης στη περίπτωση του αόριστου ολοκληρώματος παίρνει την απλή μορφή

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \qquad t = g(x), \quad dt = g'(x)\,dx.$$

1.4 Παραδείγματα και Ασκήσεις

Παράδειγμα 1.7. Δείξτε ότι

$$\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| \le \frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Από τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\,dx\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin nx}{x^2+n^2}\right|dx &\le \int_0^{2\pi}\frac{dx}{x^2+n^2} \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{dx}{n^2[(x/n)^2+1]} \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{2\pi/n}\frac{du}{u^2+1} \qquad \left(u = \frac{x}{n}, \quad du = \frac{1}{n}dx\right) \\
&= \frac{1}{n}\tan^{-1}u\Big]_0^{2\pi/n} \\
&= \frac{1}{n}\tan^{-1}\left(\frac{2\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p}, \qquad x > e^{-1}, \quad p \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας $u = 1+\log x$ έχουμε $u > 0$ και $du = 1/x\,dx$, οπότε

(1) $p \neq 1$

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)^p} = \int \frac{du}{u^p} = \frac{1}{1-p}u^{1-p} + C = \frac{1}{1-p}(1+\log x)^{1-p} + C.$$

(2) $p = 1$

$$\int \frac{dx}{x(1+\log x)} = \int \frac{du}{u} = \log|u| + C = \log(1+\log x) + C.$$

Άσκηση 1.2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\cot(\log x)}{x}\,dx.$$

Άσκηση 1.3. Για κάθε ακέραιο n να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int x^n \log x \, dx.$$

Παράδειγμα 1.9. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\, dx.$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{2x+5} = \frac{A(2x+5)+B(x-3)}{(x-3)(2x+5)}$$

οπότε εξισώνοντας παίρνουμε

$$6-x = (5A-3B) + (2A+B)x \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 5A-3B &= 6 \\ 2A+B &= -1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} A &= 3/11 \\ B &= -17/11 \end{aligned}\right.$$

έτσι

$$\begin{aligned}\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}\, dx &= \frac{3}{11}\int \frac{dx}{x-3} - \frac{17}{11}\int \frac{dx}{2x+5} \\ &= \frac{3}{11}\log|x-3| - \frac{17}{22}\log|2x+5| + C.\end{aligned}$$

Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Παράδειγμα 1.10. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sin^5 x \, dx.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x\, dx &= \int \sin^4 x \sin x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\, dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\, dx \qquad\qquad u = \cos x, \quad du = -\sin x\, dx \\ &= \int -(1-u^2)^2\, du \\ &= \int (-1+2u^2-u^4)\, du \\ &= -u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5 + C \\ &= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.11. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \sin^4 x\,dx.$$

Μια διαδικασία ανάλογη αυτής που ακολουθήθηκε στο Παράδειγμα 1.10 στη περίπτωση αυτή δεν δουλεύει. Εδώ, όπως και σε ανάλογες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τον τύπο του διπλασίου τόξου

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{1.10}$$

απ΄ όπου προκύπτουν οι χρήσιμες σχέσεις/αντικαταστάσεις

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}. \tag{1.11}$$

Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x\,dx &= \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \Big(\frac{1-\cos(2x)}{2}\Big)^2 dx \\
&= \int \frac{1}{4}\Big(1 - 2\cos(2x) + \cos^2(2x)\Big)\,dx \\
&= \int \frac{1}{4}\Big(1 - 2\cos(2x) + \frac{1+\cos(4x)}{2}\Big)\,dx \\
&= \int \Big(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\Big)\,dx \\
&= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\cos(4x) + C.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.12. Δείξτε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η αναδρομική σχέση

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

Γράφοντας για $n > 1$

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx = \int \sin^{n-1} x(-\cos x)'\,dx$$

με ολοκλήρωση κατά μέρη υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x\,dx &= -\sin^{n-1} x\cos x + \int (\sin^{n-1} x)'\cos x\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx
\end{aligned}$$

απ΄ όπου μεταφέροντας το τελευταίο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους στο αριστερό βρίσκουμε

$$n\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$

από την οποία διαιρώντας με n και τα δύο μέλη παίρνουμε το ζητούμενο. Για $n = 1$ είναι

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

η οποία δεχόμαστε ότι απορρέει από τη γενική περίπτωση για $n = 1$. Σημειώνουμε ότι για $n > 1$ η σταθερά της ολοκλήρωσης περιέχεται στο αόριστο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος.

Παράδειγμα 1.13 (Το ολοκλήρωμα της τέμνουσας). Αν $f(x) = \sec x = 1/\cos x$, τότε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sec x &= \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x) = \frac{1}{\cos x}\tan x = \sec x\,\tan x\\ \frac{d}{dx}\tan x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

Με χρήση των αποτελεσμάτων αυτών υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \sec x\frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x}\,dx\\ &= \int \frac{\sec x\tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x}\,dx\\ &= \log|\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

Μια χρήσιμη αντικατάσταση. Μια ρητή έκφραση των $\sin x$ και $\cos x$ συνήθως απλοποιείται αν χρησιμοποιηθεί η αντικατάσταση $u = \tan(x/2)$.

Παράδειγμα 1.14. Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $u = \tan(x/2)$ για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}.$$

Από τη σχέση $u = \tan(x/2)$ και από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο βλέπουμε ότι

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \qquad \sin\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

οπότε

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+u^2} - \frac{u^2}{1+u^2} = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

και

$$du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx \Rightarrow dx = 2\cos^2\frac{x}{2}\,du = \frac{2}{1+u^2}\,du.$$

Έτσι το ζητούμενο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\int \frac{1}{5+3(1-u^2)/(1+u^2)}\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{du}{4+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(u/2)}{1+(u/2)^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{u}{2}+C,$$

και τελικά παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{5+3\cos x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\Big(\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\Big)+C.$$

Άσκηση 1.4. Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $u=\tan(x/2)$ και δείξτε ότι

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\log\Big|\tan\Big(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\Big)\Big|+C.$$

Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Οι βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1, \qquad \sec^2 x = 1+\tan^2 x$$

παρακινούν στη χρήση τριγωνομετρικών αντικαταστάσεων στις αντίστοιχες αλγεβρικές εκφράσεις

$$\sqrt{a^2-x^2}, \qquad \sqrt{a^2+x^2}, \qquad \sqrt{x^2-a^2}.$$

Έτσι η αντικατάσταση

$$\begin{aligned}
x &= a\sin\theta \quad \text{δίνει} \quad \sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)} = a|\cos\theta|, \qquad \theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}\\
x &= a\tan\theta \quad \text{δίνει} \quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)} = a|\sec\theta|, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}\\
x &= a\sec\theta \quad \text{δίνει} \quad \sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} = a|\tan\theta|, \qquad \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}
\end{aligned}$$

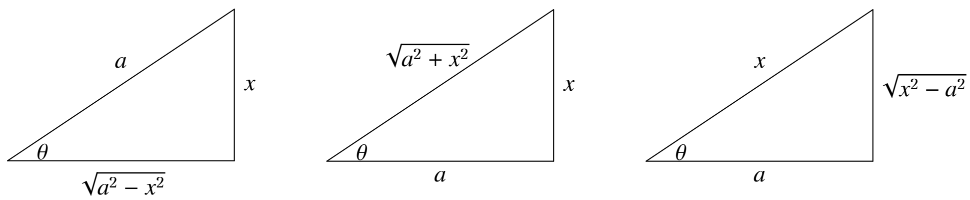
με $a>0$. Με τις αντικαταστάσεις αυτές ένα ολοκλήρωμα $\int P(x)\,dx$, όπου $P(x)$ είναι, εν γένει, μια αλγεβρική έκφραση, μετασχηματίζεται σε ένα $\int R(\theta)\,d\theta = Q(\theta)+C$. Προκειμένου να επιστρέψουμε στην αρχική μεταβλητή x θέτουμε περιορισμούς στο θ ώστε οι αντίστροφες τριγωνομετρικές εκφράσεις $\theta = f^{-1}(x)$ να ορίζονται.

Παράδειγμα 1.15. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}}, \qquad -3<x<3.$$

Θέτουμε

$$x = 3\sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} \quad \text{οπότε} \quad \sqrt{3^2-x^2} = 3|\cos\theta| = 3\cos\theta \quad \text{και} \quad dx = 3\cos\theta\,d\theta$$



$x = a\sin\theta$ $\qquad$ $x = a\tan\theta$ $\qquad$ $x = a\sec\theta$

Σχήμα 1.3: Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

έτσι το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται

$$\begin{aligned} I = \int \frac{(27\sin^3\theta)(3\cos\theta)\,d\theta}{3\cos\theta} = 27\int \sin^3\theta\,d\theta &= 27\int (1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta \\ &= 27\int \sin\theta\,d\theta - 27\int \cos^2\theta\,\sin\theta\,d\theta \\ &= -27\cos\theta + 9\cos^3\theta + C. \end{aligned}$$

Από την αντικατάσταση έχουμε

$$\sin\theta = \frac{x}{3} \qquad \text{και} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{3^2 - x^2}}{3}$$

οπότε παίρνουμε

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = -27\frac{\sqrt{9-x^2}}{3} + 9\Big(\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\Big)^3 + C = -9\sqrt{9-x^2} + \frac{1}{3}(9-x^2)^{3/2} + C.$$

Παράδειγμα 1.16. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{οπότε} \quad \sqrt{2^2 + x^2} = 2|\sec\theta| = 2\sec\theta, \quad \text{και} \quad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta,$$

άρα

$$\tan\theta = \frac{x}{2} \qquad \text{και} \qquad \sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{2\sec\theta} = \int \sec\theta\,d\theta &= \log|\sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \log\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.17. Δείξτε ότι

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^2-2x+4)^{3/2}}\,dx = \frac{1}{6}.$$

Γράφοντας $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ θέτουμε

$$x-1=\sqrt{3}\tan t, \qquad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2} \quad \text{οπότε} \quad \sqrt{(x-1)^2+3}=\sqrt{3}\sec t, \quad \text{και} \quad dx=\sqrt{3}\sec^2 t\,dt,$$

με

$$t=\tan^{-1}\frac{x-1}{\sqrt{3}}, \qquad t(1)=\tan^{-1}0=0, \quad t(2)=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{(x^2-2x+4)^{3/2}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{((x-1)^2+3)^{3/2}}\,dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{\sqrt{3}\sec^2 t}{(\sqrt{3}\sec t)^3}\,dt \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/6} \cos t\,dt \\ &= \frac{1}{3}\sin x\Big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.18. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}}, \qquad x>\frac{2}{5}.$$

Επειδή

$$\sqrt{25x^2-4}=5\sqrt{x^2-\left(\frac{2}{5}\right)^2},$$

θέτουμε

$$x=\frac{2}{5}\sec\theta, \quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}, \quad \text{οπότε} \quad \sqrt{25x^2-4}=2|\tan\theta|=2\tan\theta, \quad \text{και} \quad dx=\frac{2}{5}\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-4}} = \int \frac{2/5\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta}{2\tan\theta} = \frac{1}{5}\int \sec\theta\,d\theta &= \frac{1}{5}\log|\sec\theta+\tan\theta|+C \\ &= \frac{1}{5}\log\left|\frac{5x}{2}+\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}+\right|+C\end{aligned}$$

όπως διαβάζουμε από την αντικατάσταση.

Παράδειγμα 1.19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{3x^4-2x^3+16x^2-7x+15}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx.$$

Ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από αυτόν του αριθμητή οπότε αναλύοντας την υπό ολοκλήρωση συνάρτηση σε απλά κλάσματα γράφουμε

$$\frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2},$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+4) + (Dx+E)(x-1).$$

Λύνοντας βρίσκουμε

$$A = 1, \qquad B = 2, \qquad C = 0, \qquad D = 0, \qquad E = 1,$$

επομένως

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{2x\,dx}{x^2+4} + \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} \\ &= \log|x-1| + \log(x^2+4) + I,\end{aligned}$$

όπου

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+4)^2}.$$

Για τον υπολογισμό του I θέτουμε

$$x = 2\tan\theta, \qquad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad \text{οπότε} \quad x^2 + 4 = 4(\tan^2\theta + 1) = 4\sec^2\theta$$

άρα

$$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{2}, \qquad \text{και} \quad dx = 2\sec^2\theta\,d\theta,$$

επομένως

$$\begin{aligned}I = \int \frac{2\sec^2\theta\,d\theta}{16\sec^4\theta} = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,d\theta &= \frac{1}{16}\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{32}\sin 2\theta + C \\ &= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{16}\sin\theta\cos\theta + C\end{aligned}$$

κατά συνέπεια

$$\int \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{16}\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\frac{2}{\sqrt{x^2+4}} + C = \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + C.$$

Έτσι τελικά βρίσκουμε

$$\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 7x + 15}{(x-1)(x^2+4)^2}\,dx = \log|x-1| + \log(x^2+4) + \frac{1}{16}\tan^{-1}\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{x^2+4} + C.$$

Παράδειγμα 1.20 (Το ολοκλήρωμα περιοδικής συνάρτησης). Έστω f μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, δηλαδή $f(x+T) = f(x)$, και ολοκληρώσιμη στο $[0,T]$ δείξτε ότι

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx, \qquad \forall b \in \mathbb{R}.$$

Η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\alpha,\beta]$ (γιατί;), έτσι για $b \in \mathbb{R}$ μπορούμε να γράφουμε σύμφωνα με τις ιδιότητες του ολοκληρώματος

$$\begin{aligned}\int_b^{b+T} f(x)\,dx &= \int_b^T f(x)\,dx + \int_T^{b+T} f(x)\,dx\\ &= \int_b^T f(x)\,dx + \int_T^{b+T} f(x-T)\,dx\end{aligned}$$

από περιοδικότητα της f, αφού $f(x+kT) = f(x)$ για κάθε ακέραιο k, οπότε για $t = x - T$, $dx = dt$

$$\begin{aligned}&= \int_b^T f(x)\,dx + \int_0^b f(t)\,dt\\ &= \int_0^T f(x)\,dx.\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Παράδειγμα 1.21 (Ανισότητα Cauchy–Schwarz). Εάν οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a,b]$, τότε

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right\}^2 \le \left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\right\}\left\{\int_a^b g^2(x)\,dx\right\}.$$

Η fg είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έχουμε

$$0 \le \int_a^b \big(tf(x) + g(x)\big)^2\,dx = t^2\int_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int_a^b f(x)g(t)\,dx + \int_a^b g^2(x)\,dx$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, κατά συνέπεια η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μη θετική, δηλαδή

$$\left\{2\int_a^b f(x)g(t)\,dx\right\}^2 - 4\left\{\int_a^b f^2(x)\,dx\right\}\left\{\int_a^b g^2(x)\,dx\right\} \le 0$$

απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο. Το αποτέλεσμα ισχύει και όταν οι f και g είναι απλά ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, αφού, τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, βλέπε Πόρισμα 1.1.

1.5 Εφαρμογές του ολοκληρώματος

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$ και $f(x) \ge 0$ στο ίδιο διάστημα, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ δίνει το εμβαδόν της περιοχής ή χωρίου R του επιπέδου μεταξύ του γραφήματος της f και του x-άξονα και των ευθειών $x = a$ και $x = b$. Έτσι αν $a \le x \le b$ η ποσότητα

$$dA = f(x)\,dx$$

εκφράζει το εμβαδό του “στοιχειώδους παραλληλογράμμου” στο x βάσης dx και ύψους $f(x)$.

Εμβαδόν χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων

Αν οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και R είναι το χωρίο μεταξύ των γραφημάτων των f και g και των ευθειών $x = a$ και $x = b$, το R αποτελείται από "στοιχειώδη παραλληλόγραμμα". Το εμβαδόν κάθε τέτοιου στο $x \in [a, b]$ είναι

$$dA = [\max\{f(x), g(x)\} - \min\{f(x), g(x)\}]\, dx = |f(x) - g(x)|\, dx,$$

έτσι το εμβαδόν $A(R)$ του χωρίου R είναι

$$A(R) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \tag{1.12}$$

Η αυστηρή απόδειξη του (1.12) γίνεται με χρήση των αθροισμάτων Riemann.

Παράδειγμα 1.22. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος της $y = \sin x$ του x-άξονα και των ευθειών $x = 0$ και $x = 2\pi$.

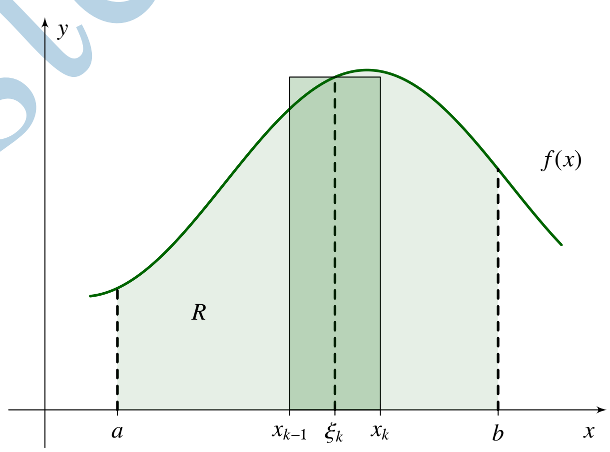
Εδώ είναι $g(x) = 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$A(R) = \int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} + \cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

Άσκηση 1.5. Να βρεθεί το εμβαδόν του φραγμένου χωρίου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος της $f(x) = \sqrt{x}$, της ευθείας $y = x - 2$ και του x-άξονα.

Όγκος στερεού εκ περιστροφής

Αν το χωρίο R του επιπέδου που βρίσκεται μεταξύ του γραφήματος της f, του x-άξονα και των ευθειών $x = a$ και $x = b$ περιστραφεί γύρω από τον x-άξονα ή τον y-άξονα παράγεται ένα στερεό, ένα **στερεό εκ περιστροφής**. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τον όγκο V του στερεού αυτού.



Σχήμα 1.4: Το σκιασμένο ορθογώνιο με βάση $[x_{k-1}, x_k]$ και ύψος $f(\xi_k)$

1. Περιστροφη γυρω απο τον x-αξονα.

   Αν $x \in [a, b]$ το "στοιχειώδες" παραλληλόγραμμο στο x καθώς κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον x-άξονα παράγει ένα "στοιχειώδη" κυκλικό στερεό κύλινδρο με εμβαδό βάσης $\pi[f(x)]^2$ και ύψος dx, έτσι ο όγκος του "στοιχειώδους" κυλίνδρου στο x είναι $dV = \pi[f(x)]^2\,dx$, κατά συνέπεια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής, όπως στη περίπτωση του εμβαδού, είναι

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx. \tag{1.13}$$

2. Περιστροφη γυρω απο τον y-αξονα.

   Αν $x \in [a, b]$ το "στοιχειώδες" παραλληλόγραμμο στο x καθώς κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον y-άξονα παράγει ένα "στοιχειώδη" φλοιό κυκλικού κυλίνδρου με μήκος $2\pi x$, ύψος $f(x)$ και πάχος dx, έτσι ο όγκος του "στοιχειώδους" φλοιού στο x είναι $dV = 2\pi x f(x)\,dx$, κατά συνέπεια ο όγκος του στερεού εκ περιστροφής είναι

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx. \tag{1.14}$$

Η αυστηρή απόδειξη των όσων αναφέραμε γίνεται με χρήση αθροισμάτων Riemann. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε μια διαμέριση $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ του $[a, b]$. Έστω ξ_k ένα σημείο στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, τότε αναφερόμενοι στο Σχήμα 1.4, αν το ορθογώνιο με βάση $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ και ύψος $f(\xi_k)$ περιστραφεί γύρω από τον x-άξονα κατά γωνία $360°$ παράγεται ένας κύλινδρος όγκου $\Delta V_k = \pi[f(\xi_k)]^2\Delta_k$. Έτσι το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} \pi[f(\xi_k)]^2 \Delta x_k$$

είναι μια προσέγγιση του όγκου του στερεού που παράγεται κατά μια πλήρη περιστροφή του χωρίου R του επιπέδου γύρω από τον x-άξονα. Έτσι παίρνοντας το όριο καθώς $\Delta x \to 0$, το οποίο υπάρχει αφού η f^2 είναι συνεχής, προκύπτει η (1.13). Αν τώρα το ορθογώνιο με βάση $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ και ύψος $f(\xi_k)$ περιστραφεί γύρω από τον y-άξονα κατά γωνία $360°$ παράγεται ένας κυλινδρικός φλοιός όγκου

$$\begin{aligned}
\Delta V_k = V_k - V_{k-1} &= \pi x_k^2 f(\xi_k) - \pi x_{k-1}^2 f(\xi_k) \\
&= 2\pi \frac{x_k + x_{k-1}}{2}(x_k - x_{k-1}) f(\xi_k) \\
&= 2\pi \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k, \qquad\qquad \xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}
\end{aligned}$$

όπου για ξ_k επιλέγουμε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $[x_{k-1}, x_k]$. Έτσι το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

είναι μια προσέγγιση του όγκου του στερεού που παράγεται κατά μια πλήρη περιστροφή του χωρίου R του επιπέδου γύρω από τον y-άξονα. Έτσι παίρνοντας το όριο καθώς $\Delta x \to 0$, το οποίο υπάρχει αφού η g, όπου $g(x) = xf(x)$, είναι συνεχής, προκύπτει η (1.14).

Παράδειγμα 1.23. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται κατά μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον x-άξονα της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ του x-άξονα, του γραφήματος της $y = f(x) = e^{-x}$, και των $x = 0$ και $x = 1$.

Ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \int_0^1 \pi[e^{-x}]^2\,dx = \pi\int_0^1 e^{-2x}\,dx = -\frac{\pi}{2}e^{-2x}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}\Big(1-\frac{1}{e^2}\Big).$$

Παράδειγμα 1.24. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται κατά μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον y-άξονα της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ του x-άξονα, του γραφήματος της $y = f(x) = 1 - x$, και των $x = 0$ και $x = 1$.

Το στερεό που παράγεται είναι κυκλικός κώνος. Ο ζητούμενος όγκος είναι

$$V = \int_0^1 2\pi x(1-x)\,dx = 2\pi\int_0^1 (x - x^2)\,dx = \pi\Big[x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Άσκηση 1.6. Να βρεθεί ο όγκος σφαίρας ακτίνας R.

Άσκηση 1.7. Να βρεθεί ο όγκος κυκλικού κώνου με ακτίνα βάσης r και ύψος h.

Η αρχή του Cavalieri

Ας υποθέσουμε ότι ένα στερεό βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $x = a$ και $x = b$, με $a < b$. Αν για $x_0 \in [a, b]$ γνωρίζουμε το εμβαδόν $A(x_0)$ του χωρίου $R(x_0)$ που είναι η τομή του στερεού με το επίπεδο $x = x_0$, τότε η ποσότητα $A(x_0)\,dx$ εκφράζει τον όγκο μιας "στοιχειώδους φέτας" του στερεού στο $x = x_0$. Έτσι ο όγκος V του στερεού θα δίνεται από τη σχέση

$$V = \int_a^b A(x)\,dx. \tag{1.15}$$

Αναφέρουμε και πάλι ότι για μια αυστηρή απόδειξη της (1.15) ανατρέχουμε στον ορισμό του ολοκληρώματος και τα αθροίσματα Riemann. Το χωρίο $R(x_0)$, δηλαδή την τομή του στερεού με το επίπεδο $x = x_0$, θα το λέμε **διατομή** στο $x = x_0$. Έτσι, σύμφωνα με την αρχή του Cavalieri στερεά ίσου ύψους και ίσων εμβαδών διατομής σε κάθε ύψος, έχουν ίσους όγκους.

Παράδειγμα 1.25. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό σφαίρας ακτίνας R και είναι τέτοιο ώστε οι διατομές του κατά μήκος ενός άξονα που περιέχει το κέντρο της σφαίρας είναι τετράγωνα εγγεγραμμένα στη σφαίρα.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο της σφαίρας είναι το σημείο $(0, 0, 0)$. Το επίπεδο κάθετο στον x-άξονα στο σημείο $x = x_0$ με $-R \le x_0 \le R$ τέμνει τη σφαίρα κατά μήκος ενός κύκλου με κέντρο το $(x_0, 0, 0)$ και ακτίνα

$$r(x_0) = \sqrt{R^2 - x_0^2}$$

(γιατί;). Έτσι η διατομή του στερεού στο $x = x_0$ είναι τετράγωνο με διαγώνιο $d = 2r(x_0)$, κατά συνέπεια το εμβαδόν της διατομής είναι

$$A(x_0) = 2r(x_0)r(x_0) = 2(R^2 - x_0^2).$$

Επομένως ο όγκος του στερεού είναι

$$V = \int_{-R}^{R} A(x)\,dx = 2\int_0^R 2(R^2 - x^2)\,dx = 4\Big[R^2x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^R = \frac{8}{3}R^3.$$

Άσκηση 1.8. Να βρεθεί ο όγκος πυραμίδας της οποίας η βάση είναι τετράγωνο πλευράς L και το ύψος h.

Μήκος καμπύλης

Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$ τη συνάρτηση $\gamma_f : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, με

$$\gamma_f(x) = (x, f(x)), \qquad a \le x \le b$$

τη λέμε **καμπύλη**. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ το $(x, f(x))$ είναι σημείο του γραφήματος G_f της f και ότι η γραφική παράσταση της f είναι η γεωμετρική εικόνα της καμπύλης γ στο επίπεδο. Για τον λόγο αυτό, παραβιάζοντας τον ορισμό, πολλές φορές λέγοντας καμπύλη εννοούμε το γεωμετρικό αντικείμενο που είναι η γραφική παράσταση της f και αναφερόμαστε στην καμπύλη $y = f(x)$. Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι αν μπορούμε να ορίσουμε μια έννοια μήκους καμπύλης και τι είναι αυτό. Θυμίζουμε ότι έχουμε ορίσει το μήκος περιφέρειας και τόξου τα οποία είναι ειδική περίπτωση καμπύλης.

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι γραμμική. Τότε η γραφική παράσταση της σχετικής καμπύλης είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα (στο επίπεδο) με άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$, κατά συνέπεια το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος είναι λογικό να ορίζεται ως το μήκος της σχετικής καμπύλης γ_f. Έτσι αν με $L(\gamma_f)$ συμβολίσουμε το μήκος της καμπύλης, τότε

$$L(\gamma_f) = \sqrt{(b-a)^2 + (f(b) - f(a))^2} = (b-a)\sqrt{1+m^2},$$

αν $f(x) = mx + c$ και $b > a$.

Αν η γραφική παράσταση της f είναι μια πολυγωνική γραμμή που απαρτίζεται από διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα σημεία $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ και $(x_k, f(x_k))$, με $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n =$

b, τότε γενικεύοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα ορίζουμε το μήκος της πολυγωνικής καμπύλης με τη σχέση

$$L(\gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Έτσι αν $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ και η f στο $[x_{k-1}, x_k]$ είναι $f(x) = m_k x + c_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, τότε

$$L(\gamma_f) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + m_k^2}\, \Delta x_k.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος είναι συνεχής. Αν θεωρήσουμε μια διαμέριση $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ του $[a, b]$ τότε η πολυγωνική καμπύλη που συνδέει τα σημεία $(x_k, f(x_k))$ με $k = 0, 1, 2, \dots, n$ είναι μια "προσέγγιση" της γ_f, οπότε είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι

$$L(\gamma_f) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

οπότε από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχει $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ώστε

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})]^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\, \Delta x_k \end{aligned}$$

όπου $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Η τελευταία έκφραση είναι άθροισμα Riemann για την συνεχή συνάρτηση $\sqrt{1 + (f')^2}$, κατά συνέπεια παίρνοντας το όριο του $n \to \infty$ θα είναι

$$L(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{1.16}$$

Παρατήρηση 1.6. Μια καμπύλη στο επίπεδο, ή και στο $\mathbb{R}^n$ γενικώτερα, μπορεί να δίνεται σε παραμετρική μορφή

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)), \qquad a \le t \le b \tag{1.17}$$

με ανάλογη έκφραση στο $\mathbb{R}^n$, όπου οι f και g είναι συνεχείς συναρτήσεις. Για παράδειγμα η τυπική έλλειψη με εξίσωση $(x - x_0)^2/a^2 + (y - y_0)^2/b^2 = 1$ εκφράζεται ως

$$\gamma(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

αφού αν $x = x(t) = x_0 + a\cos t$, και $y = y(t) = y_0 + b\sin t$, τότε

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ δίνεται παραμετρικά από την (1.17), όπου οι f και g είναι παραγωγίσιμες και έχουν συνεχείς παραγώγους στο $[a,b]$. Αν $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ η πολυγωνική γραμμή με άκρα τα σημεία $(f(t_k), g(t_k))$ έχει μήκος το οποίο, για κατάλληλη διαμέριση, προσεγγίζει το μήκος $L(\gamma)$ της γ. Έτσι

$$L(\gamma) \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 + (g(t_k) - g(t_{k-1}))^2}$$

οπότε από το Θεώρημα της μέσης τιμής υπάρχουν $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ και $\zeta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ώστε

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(\xi_k)(t_k - t_{k-1})]^2 + [g'(\zeta_k)(t_k - t_{k-1})]^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(\xi_k)]^2 + [g'(\zeta_k)]^2}\, \Delta x_k \end{aligned}$$

όπου $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Έστω $r_k \in \{\xi_k, \zeta_k\}$ και $s_k \in \{\xi_k, \zeta_k\}$ ώστε

$$[f'(r_k)]^2 + [g'(r_k)]^2 \le [f'(\xi_k)]^2 + [g'(\zeta_k)]^2 \le [f'(s_k)]^2 + [g'(s_k)]^2$$

για $k = 1, 2, \ldots, n$. Έτσι παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(r_k)]^2 + [g'(r_k)]^2}\, \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(\xi_k)]^2 + [g'(\zeta_k)]^2}\, \Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(s_k)]^2 + [g'(s_k)]^2}\, \Delta x_k.$$

Το καθένα από τα αθροίσματα στο αριστερό και το δεξιό μέλος της διπλής ανισότητας είναι άθροισμα Riemann για τη συνεχή συνάρτηση $[(f')^2 + (g)^2]^{1/2}$, επομένως καθώς $n \to \infty$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(r_k)]^2 + [g'(r_k)]^2}\, \Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(s_k)]^2 + [g'(s_k)]^2}\, \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

κατά συνέπεια, από την παρεμβολή, προκύπτει ότι

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{1.18}$$

Παρατήρηση 1.7 (Μήκος τόξου). Άμεση συνέπεια της ταυτότητας $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ είναι ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x το σημείο $(\cos x, \sin x)$ είναι σημείο της μοναδιαίας περιφέρειας, ισοδύναμα η καμπύλη $\gamma(x) = (\cos x, \sin x)$, $x \in \mathbb{R}$ περιγράφει την μοναδιαία περιφέρεια. Ας θεωρήσουμε την περιφέρεια θετικά προσανατολισμένη με αρχή το σημείο $A = (1,0)$. Για $x \neq 0$ έστω $P = (\cos x, \sin x)$. Για $x > 0$ το μήκος του τόξου AP είναι ίσο με το μήκος της καμπύλης $\gamma_x(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le x$, ισοδύναμα

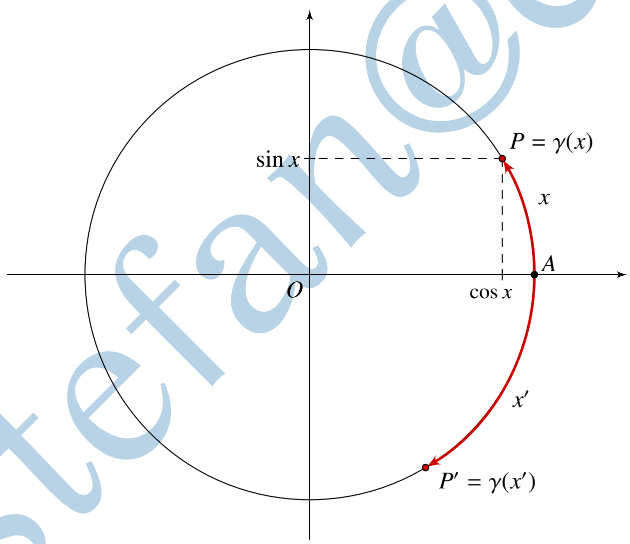
$$\begin{aligned} L(\gamma_x) = \int_0^x \sqrt{[\cos' t]^2 + [\sin' t]^2}\, dt &= \int_0^x \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^x 1\, dt = x. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια κάθε πραγματικός αριθμός x αντιστοιχεί σε τόξο μήκους $|x|$ (γιατί;) της μοναδιαίας περιφέρειας από το σημείο $(1, 0)$ στο $(\cos x, \sin x)$ το οποίο διαγράφεται κατά τη θετική ή αρνητική φορά ανάλογα με το πρόσημο του x. Κατ΄ αυτό τον τρόπο η πραγματική ευθεία "τυλίγεται" γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο έτσι ώστε $\gamma(0) = (1, 0)$, η θετική ημιευθεία τυλίγεται κατά τη θετική φορά και η αρνητική κατά την αρνητική φορά. Σημειώνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος k και $x_0 \in [0, 2\pi)$ ώστε $x = x_0 + 2k\pi$. Πράγματι αν $k = [x/2\pi]$, το ακέραιο μέρος του $x/2\pi$, τότε

$$k \leq \frac{x}{2\pi} < k + 1 \Rightarrow 2k\pi \leq x < 2(k+1)\pi \Rightarrow 0 \leq x - 2k\pi < 2\pi$$

οπότε γι $x_0 = x - 2k\pi$ έπεται το ζητούμενο. Επίσης

$$P = (\cos x, \sin x) = (\cos x_0, \sin x_0).$$



Σχήμα 1.5: Τόξο και μήκος τόξου

1.6 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Μέχρι το σημείο αυτό αντιμετωπίσαμε το ολοκλήρωμα, κυρίως, ως ένα "εργαλείο" το οποίο μας επιτρέπει να υπολογίζουμε εμβαδά, όγκους καθώς και το μήκος καμπυλών. Όμως το ολοκλήρωμα δεν είναι μόνο αυτό. Εμφανίζεται σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών, και είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση η οποία απεικονίζει συναρτήσεις σε αριθμούς. Συγκεκριμένα αν f είναι μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,b]$, τότε $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$, και αν γράψουμε

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

και με $\mathcal{R}[a,b]$ συμβολίσουμε το σύνολο των συναρτήσεων που είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[a,b]$, τότε $I : \mathcal{R}[a,b] \to \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού συναρτήσεις λέγεται **τελεστής**. Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος έπεται ότι αν $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, τότε

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \tag{1.19}$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\beta \in \mathbb{R}$. Κάθε τελεστής που ικανοποιεί την (1.19) λέγεται **γραμμικός τελεστής**. Το ολοκλήρωμα, λοιπόν, είναι ένα τυπικό παράδειγμα γραμμικού τελεστή.[2]

Ας δούμε λοιπόν περισσότερο προσεκτικά το ολοκλήρωμα και τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Είδαμε ότι κάθε συνεχής ή τμηματικά συνεχής συνάρτηση σε διάστημα $[a,b]$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα αυτό.

Παράδειγμα 1.26 (Η συνάρτηση του Dirichlet). Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \{0,1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ 1, & x \text{ ρητός} \end{cases}$$

Η f είναι φραγμένη. Αν $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ είναι μια διαμέριση του $[0,1]$, τότε αν $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ είναι ρητός αριθμός για κάθε k, έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} (x_k - x_{k-1}) = 1 - 0 = 1,$$

ενώ αν $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ είναι άρρητος αριθμός για κάθε k, έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{N} 0(x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Κατά συνέπεια το όριο

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k$$

δεν υπάρχει. Έτσι η f **δεν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemmann** στο $[0,1]$.

[2] Ένα άλλο παράδειγμα γραμμικού τελεστή, με τιμές αυτή τη φορά συναρτήσεις, είναι η παράγωγος, αφού αν γράψουμε

$$D(f) = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

έχουμε για f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις και α και β πραγματικές σταθερές

$$D(\alpha f + \beta g) = \alpha D(f) + \beta D(g).$$

Στη μελέτη μας θα χρειαστούμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.11 που αφορά σε ακολουθίες. Το σημαντικό αυτό αποτέλεσμα ξανασυζητάμε και αποδεικνύουμε με διαφορετικό τρόπο σε επόμενο κεφάλαιο, βλέπε Θεώρημα ;;.

Ορισμός 1.4. Μια ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών λέγεται **ακολουθία Cauchy** εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n - a_m| < \epsilon \qquad \text{για όλα τα } n \geq N \text{ και } m \geq N.$$

Άσκηση 1.9. Δείξτε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι ακολουθία Cauchy.

Θεώρημα 1.11. *Κάθε ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία Cauchy.
Βήμα 1. Η ακολουθία είναι φραγμένη.

Από τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy υπάρχει φυσικός αριθμός N ώστε $|a_n - a_N| < 1$, για κάθε $n \geq N$. Έτσι από την τριγωνική ανισότητα έπεται

$$|a_n| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|, \qquad n \geq N.$$

Αν τώρα ορίσουμε $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$, θα είναι $|a_n| \leq M$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, που είναι ό,τι θέλουμε να δείξουμε.
Βήμα 2. Ορίζουμε τις ακολουθίες $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha'_n)_{n=1}^{\infty}$ με

$$\alpha_n = \inf_{k \geq n}\{a_k\} = \inf\{a_n, a_{n+1}, \ldots\} \qquad \text{και} \qquad \alpha'_n = \sup_{k \geq n}\{a_k\} = \sup\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\alpha_n \leq \alpha'_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n = \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2} \ldots\}$ και παρατηρούμε ότι $A_{n+1} \subseteq A_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γενικότερα $A_n \subset A_m$ αν και μόνο αν $m < n$, επίσης

$$\text{αν} \quad A_n \subset A_m, \qquad \text{τότε} \quad \begin{cases} \sup A_n \leq \sup A_m \\ \inf A_n \geq \inf A_m \end{cases}$$

κατά συνέπεια οι $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(\alpha'_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονες και επιπλέον φραγμένες, από το Βήμα 1, συγκεκριμένα

$$-M \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots \leq M, \qquad M \geq \alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \cdots \geq \alpha'_n \geq \cdots \geq -M, \tag{1.20}$$

αφού $|a_n| \leq M$, άρα συγκλίνουν. Έστω s και s' τα αντίστοιχα όρια. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $\alpha'_n \geq \alpha_m$ για όλα τα n, m. Πράγματι αν $n > m$, ισοδύναμα $A_n \subseteq A_m$, έπεται ότι $\sup A_n \geq \inf A_n \geq \inf A_m$, δηλαδή $\alpha'_n \geq \alpha_m$. Αν $n < m$, ισοδύναμα $A_n \supseteq A_m$, έπεται ότι $\sup A_n \geq \sup A_m \geq \inf A_m$, δηλαδή $\alpha'_n \geq \alpha_m$. Συνδυάζοντας το τελευταίο αποτέλεσμα με τις ανισότητες (1.20) παίρνουμε

$$-M \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq \cdots \leq s \leq s' \leq \cdots \leq \alpha'_n \leq \cdots \alpha'_2 \leq \alpha'_1 \leq M.$$

Βήμα 3. $s = s'$.

Έστω $\epsilon > 0$, τότε για κάποιο N είναι $|a_n - a_m| < \epsilon$ για όλα τα $n, m \geq N$, κατά συνέπεια

$$\sup\{|a_n - a_m| : a_n, a_m \in A_k\} < \epsilon, \qquad \forall k \geq N$$

επομένως $|s - s'| < \epsilon$. Επειδή το ϵ είναι τυχαίο έπεται ότι $s = s'$. Έστω $\alpha = s = s'$ το κοινό όριο.

Βήμα 4. Η αρχική ακολουθία συγκλίνει στο α.

Έστω $\epsilon > 0$, επειδή $\alpha_n \to \alpha$ και $\alpha'_n \to \alpha$ υπάρχει N ώστε $\alpha - \epsilon < \alpha_n \leq \alpha \leq \alpha'_n < \alpha + \epsilon$, για κάθε $n \geq N$, ισοδύναμα

$$\alpha - \epsilon < \inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\} \leq \alpha \leq \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\} < \alpha + \epsilon, \qquad \text{για} \qquad n \geq N,$$

επομένως $|a_n - \alpha| < \epsilon$ για κάθε $n \geq N$, ισοδύναμα $a_n \to \alpha$. □

Θεώρημα 1.12 (Κριτήριο Cauchy). *Έστω f μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν P και P' είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$ και $\|P'\| < \delta$, τότε*

$$|S(f, P) - S(f, P')| < \epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω $I(f) = \int_a^b f$. Τότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε διαμέριση P με $\|P\| < \delta$ ισχύει $|S(f, P) - I(f)| < \epsilon/2$. Έτσι αν P και P' είναι δύο τέτοιες διαμερίσεις, τότε

$$\begin{aligned} |S(f, P) - S(f, P')| &\leq |S(f, P) - I(f)| + |S(f, P') - I(f)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Αποδεικνύουμε το αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει δ_n ώστε αν P και P' είναι δύο διαμερίσεις του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta_n$ και $\|P'\| < \delta_n$, τότε

$$|S(f, P) - S(f, P')| < 1/n.$$

Επιλέγοντας $\delta_m < \delta_n$ εάν $m < n$, για κάθε δ_n έστω P_n μια διαμέριση με $\|P_n\| < \delta_n$. Αν θέσουμε $a_n = S(f, P_n)$, τότε η $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα συγκλίνει, από το Θεώρημα 1.11. Αν I είναι το όριο της ακολουθίας, τότε για $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta_N > 0$ και P_N ώστε

$$\text{αν} \quad \|P_n\| < \delta_n \leq \delta_N, \qquad \text{τότε} \quad |S(f, P_n) - I(f)| < \epsilon/2 \qquad n \geq N.$$

Αφετέρου, από την υπόθεση, υπάρχει δ' ώστε για διαμερίσεις P και P' με $\|P\| < \delta'$ και $\|P'\| < \delta'$ είναι $|S(f,P) - S(f,P_n)| < \epsilon/2$, κατά συνέπεια αν $\delta = \min\{\delta', \delta_N\}$, τότε αν P είναι μια διαμέριση με $\|P\| < \delta$ τότε για κάποιο n με $\|P_n\| < \delta_n < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |S(f,P) - I(f)| &\leq |S(f,P) - S(f,P_n)| + |S(f,P_n) - I(f)| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα της f υπάρχει. □

Ορισμός 1.5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση και έστω ότι $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ είναι μια διαμέριση του $[a,b]$. Γράφοντας

$$m_k(f) = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x), \qquad \text{και} \qquad M_k(f) = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x),$$

$k = 1, 2, \ldots, N$, τα οποία υπάρχουν αφού η f είναι φραγμένη, ορίζουμε το **κάτω άθροισμα** της f για την P, $L(f,P)$, και και το **άνω άθροισμα** της f για την P, $U(f,P)$, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$L(f,P) = \sum_{k=1}^{N} m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \qquad U(f,P) = \sum_{k=1}^{N} M_k(f)(x_k - x_{k-1}).$$

Τα αθροίσματα $L(f,P)$ και $U(f,P)$ λέγονται **αθροίσματα του Darboux** της f για την P.

Επειδή η f είναι φραγμένη οι m_k και M_k υπάρχουν για κάθε k, επιπλέον $m_k \leq M_k$, κατά συνέπεια

$$L(f,P) \leq U(f,P)$$

για κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[a,b]$. Σημειώνουμε ότι αν $S(f,P)$ είναι ένα άθροισμα Riemann της f για την P, τότε

$$L(f,P) \leq S(f,P) \leq U(f,P). \tag{1.21}$$

Πρόταση 1.4. *Έστω f μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$.*

(1) *Εάν P είναι μια διαμέριση του $[a,b]$ και P' είναι μια εκλέπτυνση της P, δηλαδή $P \subset P'$, τότε*

$$L(f,P) \leq L(f,P') \qquad \text{και} \qquad U(f,P') \leq U(f,P).$$

(2) *Εάν P_1 και P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a,b]$, τότε*

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2). \tag{1.22}$$

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η P' περιέχει ένα μόνο σημείο περισσότερο από την P και έστω x' το σημείο αυτό. Αν $x_{j-1} < x' < x_j$, όπου x_{j-1} και x_j δύο διαδοχικά σημεία της P, ορίζουμε

$$\mu_1(f) = \inf_{x_{j-1} \leq x \leq x'} f(x), \qquad \text{και} \qquad \mu_2(f) = \inf_{x' \leq x \leq x_j} f(x).$$

Τότε αφενός $\mu_1(f) \geq m_j(f)$ και $\mu_2(f) \geq m_j(f)$ και αφετέρου

$$L(f, P') = \mu_1(f)(x' - x_{j-1}) + \mu_2(f)(x_j - x') + L(f, P) - m_j(f)(x_j - x_{j-1})$$

οπότε

$$\begin{aligned} L(f, P') - L(f, P') &= \mu_1(f)(x' - x_{j-1}) + \mu_2(f)(x_j - x') - m_j(f)(x_j - x_{j-1}) \\ &= (\mu_1(f) - m_j(f))(x' - x_{j-1}) + (\mu_2(f) - m_j(f))(x_j - x') \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Αν η P' περιέχει n επιπλέον της P σημεία, επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία n φορές καταλήγουμε στο συμπέρασμα $L(f, P') - L(f, P') \geq 0$. Η απόδειξη για το άνω άθροισμα είναι ανάλογη.

Για το (2) θέτουμε $P = P_1 \cup P_2$, οπότε από το (1) έπεται

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2).$$

Σημειώνουμε ότι οι P_1 και P_2 είναι τυχαίες διαμερίσεις και δεν υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ τους. □

Θεώρημα 1.13 (Κριτήριο Riemann). *Έστω ότι η f είναι μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ϵ του $[a, b]$ ώστε*

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση P_ϵ ώστε

$$\left| S(f, P_\epsilon) - \int_a^b f(x)\, dx \right| < \frac{\epsilon}{3} \tag{1.23}$$

για κάθε άθροισμα Riemann της f που αντιστοιχεί στην P_ϵ. Αν $P_\epsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ επιλέγουμε για κάθε $k = 1, 2, \ldots, x_N$ σημεία ξ_k και ξ'_k στο $[x_{k-1}, x_k]$ ώστε

$$M_k(f) - \frac{\epsilon}{6(b-a)} < f(\xi_k), \qquad f(\xi'_k) < m_k(f) + \frac{\epsilon}{6(b-a)}.$$

Τότε

$$M_k(f) - m_k(f) < f(\xi_k) - f(\xi'_k) + \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

για $k = 1, 2, \ldots, N$, οπότε

$$\sum_{k=1}^{N} (M_k(f) - m_k(f))\Delta x_k < \sum_{k=1}^{N} (f(\xi_k) - f(\xi_k'))\Delta x_k + \frac{\epsilon}{3}$$

ή, για $S(f, P_\epsilon, \Xi) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)\Delta x_k$ και $S(f, P_\epsilon, \Xi') = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k')\Delta x_k$

$$\begin{aligned} U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) &< S(f, P_\epsilon, \Xi) - S(f, P_\epsilon, \Xi') + \frac{\epsilon}{3} \\ &\leq \left| S(f, P_\epsilon, \Xi) - \int_a^b f(x)\,dx \right| + \left| S(f, P_\epsilon, \Xi') - \int_a^b f(x)\,dx \right| + \frac{\epsilon}{3} \\ &< +\frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

από την (1.23). Για την απόδειξη του αντίστροφου υποθέτουμε ότι για $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ϵ ώστε $U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon/2$. Έστω $P_\epsilon = \{x_0^\epsilon, x_1^\epsilon, \ldots, x_N^\epsilon\}$ και έστω $M = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$. Έστω

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{4NM}, \|P_\epsilon\|\right\}.$$

Αν P είναι διαμέριση του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$ και $S(f, P)$ είναι ένα άθροισμα Riemann για την P γράφουμε

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = S_1 + S_2 \tag{1.24}$$

όπου S_1 είναι το τμήμα του $S(f, P)$ αποτελούμενο από τα $f(\xi_k)\Delta x_k$ για τα οποία το $[x_{k-1}, x_k]$ δεν περιέχει κάποιο από τα σημεία της P_ϵ, και S_2 το υπόλοιπο άθροισμα. Από τον ορισμό του S_1 έπεται ότι κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ που σχετίζεται με το S_1 περιέχεται εξ ολοκλήρου σε κάποιο από τα $[x_{j-1}^\epsilon, x_j^\epsilon]$. Επίσης αν το $[x_{k-1}, x_k]$ περιέχεται στο $[x_{j-1}^\epsilon, x_j^\epsilon]$ και το $[x_k, x_{k+1}]$ δεν περιέχει σημείο της P_ϵ, τότε $[x_{k-1}, x_{k+1}] \subset [x_{j-1}^\epsilon, x_j^\epsilon]$. Έτσι θα είναι

$$L(f, P_\epsilon) \leq S_1 \leq U(f, P_\epsilon). \tag{1.25}$$

Πάλι από δε τον ορισμό έπεται ότι το S_2 αποτελείται από το πολύ N όρους, έτσι

$$-NM\|P\| \leq S_2 \leq NM\|P\| \Rightarrow -\frac{\epsilon}{4} \leq S_2 \leq \frac{\epsilon}{4} \tag{1.26}$$

από τον ορισμό του δ. Από τις (1.24), (1.25) και (1.26) έπεται ότι

$$L(f, P_\epsilon) - \frac{\epsilon}{4} \leq S(f, P) \leq U(f, P_\epsilon) + \frac{\epsilon}{4}. \tag{1.27}$$

Έτσι για διαμερίσεις P και P' με $\|P\| < \delta$ και $\|P'\| < \delta$ έπεται ότι

$$L(f, P_\epsilon) - U(f, P_\epsilon) - \frac{\epsilon}{2} \leq S(f, P) - S(f, P') \leq U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}
|S(f,P) - S(f,P')| &\le U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \epsilon,
\end{aligned}$$

από την υπόθεση για την P_ϵ. Έτσι από το Θεώρημα 1.12 έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. □

Μια ισοδύναμη διατύπωση του κριτηρίου είναι η ακόλουθη

Θεώρημα 1.14 (Κριτήριο Riemann). *Έστω ότι η f είναι μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση P_n του $[a,b]$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} (U(f,P_n) - L(f,P_n)) = 0.$$

Άσκηση 1.10. Για τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ άρρητος} \\ x, & x \text{ ρητός} \end{cases}$$

δείξτε ότι για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$ είναι $U(f,P) - L(f,P) > 1/2$ και συμπεράνατε ότι δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Θεώρημα 1.15. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

(1) *Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

(2) *Η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο Riemann. Για $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ϵ ώστε $|U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon)| < \epsilon$.

(1) Αν $x_{k-1}, x_k \in P_\epsilon$, τότε

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b]\} \tag{1.28}$$

κατά συνέπεια σε συνδυασμό με την ιδιότητα της απόλυτης τιμής $||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|$, έπεται ότι

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \le M_k(f) - m_k(f)$$

επομένως

$$\begin{gathered}
\sum (M_k(|f|) - m_k(|f|))\Delta_k \le \sum (M_k(f) - m_k(f))\Delta_k \Rightarrow \\
U(|f|, P_\epsilon) - L(|f|, P_\epsilon) \le U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) < \epsilon
\end{gathered}$$

από την υπόθεση για την f, άρα η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(2) Αν $M = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ από την

$$\begin{aligned} |f^2(x) - f^2(y)| &= |f(x) + f(y)||f(x) - f(y)| \\ &\leq (|f(x)| + |f(y)|)|f(x) - f(y)| \\ &\leq 2M|f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

και την (1.28) έπεται ότι

$$M_k(f^2) - m_k(f^2) \leq 2M(M_k(f) - m_k(f))$$

έτσι όπως στο (1) παίρνουμε $U(f^2, P_\epsilon) - L(f^2, P_\epsilon) < 2M\epsilon$, απ΄ όπου προκύπτει το ζητούμενο.

□

Πόρισμα 1.1. *Αν οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$, η συνάρτηση γινόμενο fg είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 1.15, την ταυτότητα

$$fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$

και το γεγονός ότι το άθροισμα και η διαφορά ολοκληρωσίμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση. □

Θεώρημα 1.16. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Εάν $a < c < b$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$ και*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το κριτήριο Riemann. Έστω $\epsilon > 0$ τυχόν, τότε υπάρχει διαμέριση P_ϵ ώστε $|U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon)| < \epsilon$. Εάν $P'_\epsilon = P_\epsilon \cup \{c\}$ και $P_1 = P'_\epsilon \cap [a,c]$, $P_2 = P'_\epsilon \cap [c,b]$, τότε αφενός

$$U(f,P'_\epsilon) - L(f,P'_\epsilon) \leq U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) < \epsilon,$$

από την Πρόταση 1.4, και αφετέρου

$$U(f,P'_\epsilon) - L(f,P'_\epsilon) = U(f,P_1) - L(f,P_1) + U(f,P_2) - L(f,P_2).$$

Επειδή $U(f,P_1) - L(f,P_1) \geq 0$ και $U(f,P_2) - L(f,P_2) \geq 0$ έπεται ότι

$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \epsilon, \qquad \text{και} \qquad U(f,P_2) - L(f,P_2) < \epsilon$$

κατά συνέπεια η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, c]$ και στο $[c, b]$. Έτσι για $\epsilon > 0$ υπάρχει κοινό (γιατί;) $\delta > 0$ ώστε αν P_1, P_2 και P είναι διαμερίσεις των $[a, c]$, $[c, b]$ και $[a, b]$ αντίστοιχα, με $\|P_1\| < \delta$, $\|P_2\| < \delta$ και $\|P\| < \delta$, τότε

$$\left|S(f, P_1) - \int_a^c f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \left|S(f, P_2) - \int_c^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}, \qquad \left|S(f, P) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Αν λοιπόν P_1 και P_2 είναι διαμερίσεις των $[a, c]$ και $[c, b]$ με $\|P_1\| < \delta$ και $\|P_2\| < \delta$, τότε η $P = P_1 \cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ με $\|P\| < \delta$, και για κάθε άθροισμα Riemann ισχύει

$$S(f, P) = S(f, P_1) + S(f, P_2),$$

έτσι

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| \\
&\qquad \leq \left|\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx - S(f, P)\right| + \left|\int_a^b f(x)\,dx - S(f, P)\right| \\
&\qquad \leq \left|\int_a^c f(x)\,dx - S(f, P_1)\right| + \left|\int_c^b f(x)\,dx - S(f, P_2)\right| + \left|\int_a^b f(x)\,dx - S(f, P)\right| \\
&\qquad \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο αφού το ϵ είναι τυχόν. □

Θεώρημα 1.17. *Αν η f είναι μια μονότονη συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[a, b]$ με $f(a) < f(b)$, διαφορετικά η f θα ήταν σταθερή, άρα ολοκληρώσιμη. Αν $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$, τότε

$$M_k(f) = f(x_k) \qquad \text{και} \qquad m_k(f) = f(x_{k-1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, N$$

έτσι

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k \qquad L(f, P) = \sum_{k=1}^{N} f(x_{k-1})\Delta x_k$$

οπότε

$$\begin{aligned}
U(f, P) - L(f, P) &= \sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\Delta x_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\|P\| \\
&= [f(b) - f(a)]\|P\|.
\end{aligned}$$

Έτσι αν για $\epsilon > 0$ επιλέξουμε P_ϵ, με $\|P_\epsilon\| < \epsilon/(f(b) - f(a))$, από την τελευταία σχέση και το κριτήριο του Riemann έπεται το ζητούμενο. Η απόδειξη στην περίπτωση που η f είναι φθίνουσα είναι ανάλογη. $\square$

Σημείωση 1.3. Στα περισσότερα βιβλία Απειροστικού Λογισμού η έννοια της ολοκληρωσιμότητας ορίζεται μέσω των αθροισμάτων του Darboux. Συγκεκριμένα αν η f είναι μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$ και με $\mathcal{D}_{[a,b]}$ συμβολίσουμε το σύνολο των διαμερίσεων του διαστήματος $[a, b]$ θα λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ εάν

$$\sup_{P \in \mathcal{D}_{[a,b]}} L(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{D}_{[a,b]}} U(f, P)$$

και η κοινή αυτή τιμή είναι το ολοκλήρωμα Riemann της f στο $[a, b]$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Σημείωση 1.4. Ένας επίσης ισοδύναμος ορισμός της ολοκληρωσιμότητας είναι ο εξής. Μια συνάρτηση f ορισμένη και φραγμένη στο διάστημα $[a, b]$ λέγεται ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ εάν υπάρχει αριθμός $J(f)$, το ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$, ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a, b]$ τέτοια ώστε για κάθε διαμέριση P' με $P' \subseteq P$ ισχύει

$$|S(f, P') - J(f)| < \epsilon$$

για κάθε άθροισμα Riemann της f για την P'.

1.7 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Το ορισμένο ολοκλήρωμα, ή ολοκλήρωμα Riemann, μιας συνάρτησης f στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ ορίζεται όταν η συνάρτηση είναι φραγμένη στο $[a, b]$. Η έννοια του ολοκληρώματος επεκτείνεται σε περιπτώσεις όπου το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι πεπερασμένο ή η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι φραγμένη στο διάστημα ολοκλήρωσης.

Ορισμός 1.6. Το ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

λέγεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα** εάν

(1) Τουλάχιστον ένα από τα άκρα ολοκλήρωσης είναι άπειρο, δηλαδή $\alpha = -\infty$, ή $\beta = +\infty$, ή $\beta = -\alpha = +\infty$.

(2) Η f είναι μη φραγμένη σε ένα ή περισσότερα σημεία του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Ορισμός 1.7 (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου I).

(1) Εάν για κάθε $t \geq a$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,t]$ γράφουμε

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{1.29}$$

Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (1.29) υπάρχει ως πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

(2) Εάν για κάθε $t \leq a$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t,a]$ γράφουμε

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx. \tag{1.30}$$

Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (1.30) υπάρχει ως πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

(3) Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει εάν για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και τα δύο ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ συγκλίνουν. Στη περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Εάν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ αποκλίνει θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ αποκλίνει.

Παράδειγμα 1.27. Εξετάστε κατά πόσον το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

συγκλίνει.

Για $b > a$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_a^b xe^{-x}\,dx = \int_a^b -x(e^{-x})'\,dx = -xe^{-x}\Big]_a^b - \int_a^b (-x)'e^{-x}\,dx \\
= -xe^{-x}\Big]_a^b + \int_a^b e^{-x}\,dx \\
= -xe^{-x}\Big]_a^b - e^{-x}\Big]_a^b \\
= -\frac{b+1}{e^b} + \frac{a+1}{e^a}.
\end{aligned}$$

Υπολογίζοντας το όριο

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b xe^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{a+1}{e^a}-\frac{b+1}{e^b}\right) = \frac{a+1}{e^a} - \lim_{b\to+\infty}\frac{b+1}{e^b}$$

βρίσκουμε εφαρμόζοντας τον κανόνα του L'Hospital (∞/∞)

$$= \frac{a+1}{e^a} - \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} = \frac{a+1}{e^a}.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ συγκλίνει και

$$\int_a^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \frac{a+1}{e^a}.$$

Παράδειγμα 1.28. Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου p συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx.$$

και για αυτές που συγκλίνει να βρεθεί η τιμή του.

(i) Για $p=1$ και $T>1$ υπολογίζουμε

$$\int_1^T \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big]_1^T = \log T \to +\infty$$

καθώς $T\to+\infty$.

(ii) Για $p\neq 1$ και $T>1$ υπολογίζουμε

$$\int_1^T \frac{1}{x^p}\,dx = \int_1^T x^{-p}\,dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^T = \frac{T^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}.$$

Αν $p<1 \Leftrightarrow 1-p>0$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_1^T\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{1-p}\left(T^{1-p}-1\right) = +\infty.$$

Αν $p>1 \Leftrightarrow p-1>0$

$$\lim_{T\to+\infty}\int_1^T\frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{T^{p-1}}\right) = \frac{1}{p-1}.$$

Επομένως

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} +\infty & p\le 1,\\ \dfrac{1}{p-1} & p>1.\end{cases}$$

Άσκηση 1.11. Να βρεθούν οι τιμές των a και b έτσι ώστε

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{2x^2+bx+a}{x(x+a)}-2\right)dx = 1.$$

Παρατήρηση 1.8. Αν ένα ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, έστω

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = L,$$

τότε και το ειδικής μορφής όριο

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$$

υπάρχει και είναι ίσο με L, αφού

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{a} f(x)\,dx + \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,dx$$

για κάθε πραγματικό αριθμό a. Το αντίστροφο δεν ισχύει όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.29. Η συνάρτηση sin είναι συνεχής στο $(-\infty,+\infty)$.

(α΄) Δείξτε ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} \sin x\,dx = 0.$$

(β΄) Σε σχέση με το (α΄) εξάγεται κάποιο συμπερασμα για την σύγκλιση ή όχι του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx?$$

(α΄) Η συνάρτηση sin είναι περιττή συνάρτηση, $\sin(-x) = -\sin x$, κατά συνέπεια το ολοκλήρωμα της σε κάθε συμμετρικό διάστημα $[-t,t]$ είναι ίσο με μηδέν. Διαφορετικά για κάθε $t>0$

$$\int_{-t}^{t} \sin x\,dx = -\cos x]_{-t}^{t} = -\cos t - (-\cos(-t)) = -\cos t + \cos t = 0$$

απ΄ όπου έπεται το ζητούμενο.

(β΄) Το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$ συγκλίνει αν τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{a} \sin x\,dx$ και $\int_{a}^{+\infty} \sin x\,dx$, με $a\in\mathbb{R}$, συγκλίνουν και τα δύο, δηλαδή **τα όρια**

$$\lim_{s\to-\infty}\int_{s}^{a} \sin x\,dx, \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} \sin x\,dx,$$

υπάρχουν και τα δύο. Κατά συνέπεια από το αποτέλεσμα στο (α΄) δεν εξάγεται κάποιο συμπέρασμα για την σύγκλιση ή όχι του $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} \sin x\,dx = \lim_{t\to+\infty}[-\cos x]_{0}^{t} = \lim_{t\to+\infty}[1-\cos t]$$

το οποίο δεν υπάρχει (γιατί;). Επομένως το όριο $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x\,dx$ δεν υπάρχει.

Ορισμός 1.8 (Γενικευμένο ολοκλήρωμα τύπου II).

(1) Εάν για κάθε $t \in [a,b)$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,t]$, και μη φραγμένη στο b γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx. \tag{1.31}$$

και λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (1.31) υπάρχει ως πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

(2) Εάν για κάθε $t \in (a,b]$ η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t,b]$, και μη φραγμένη στο a γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)\,dx. \tag{1.32}$$

και λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ **συγκλίνει** εάν το όριο στην (1.32) υπάρχει ως πραγματικός αριθμός, διαφορετικά θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

(3) Εάν η f είναι μη φραγμένη μόνο στο στο $c \in (a,b)$ θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει εάν και τα δύο ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ συγκλίνουν. Στη περίπτωση αυτή ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.33}$$

Εάν τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα $\int_a^c f(x)\,dx$ και $\int_c^b f(x)\,dx$ αποκλίνει το $\int_a^b f(x)\,dx$ αποκλίνει. Σε περίπτωση που η f είναι μη φραγμένη σε περισσότερα από ένα σημεία ο ορισμός επεκτείνεται ανάλογα.

Την (1.33) μπορούμε εναλλακτικά να τη γράφουμε στη μορφή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0+} \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx.$$

Παράδειγμα 1.30. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

συγκλίνει και υπολογίστε την τιμή του.

Η συνάρτηση $f(x) = 1/\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty]$ και μη φραγμένη κοντά στο μηδέν, άρα για $\epsilon > 0$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\epsilon, 1]$, και

$$\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{x^{1-1/2}}{1-1/2}\Big]_\epsilon^1 = 2\left(1-\sqrt{\epsilon}\right).$$

Έτσι

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0} 2\left(1-\sqrt{\epsilon}\right) = 2.$$

Άσκηση 1.12. Εξετάστε για ποιές τιμές της παραμέτρου r συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{1}{x^r}\,dx$$

και για αυτές που συγκλίνει να βρεθεί η τιμή του.

Άσκηση 1.13. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \log x\,dx$$

συγκλίνει και υπολογίστε την τιμή του.

Κριτήρια σύγκλισης

Θεώρημα 1.18. *Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει*

(1) *$f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq a$.*

(2) *Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)\,dx$ υπάρχει για κάθε $b \geq a$.*

Τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνον αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq M \tag{1.34}$$

για κάθε $b \geq a$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση (2), η συνάρτηση

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx, \qquad t \geq a$$

ορίζεται για κάθε t στο $[a,+\infty)$, και μάλιστα είναι συνεχής (γιατί;). Από δε τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και την (1) έπεται ότι αν $a \leq s < t$, τότε

$$F(t) = \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^s f(x)\,dx + \int_s^t f(x)\,dx \geq \int_a^s f(x)\,dx = F(s),$$

είναι επομένως η F αύξουσα. Αν ισχύει η (1.34), τότε η F είναι επιπλέον φραγμένη, κατά συνέπεια το όριό της καθώς $t \to +\infty$ υπάρχει, ισοδύναμα το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει. Ατίστροφα αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, τότε από τη μονοτονία της F έπεται ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

για κάθε $b \ge a$, κατά συνέπεια η (1.34) ισχύει για οποιοδήποτε $M \ge \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. □

Θεώρημα 1.19 (Βασικό κριτήριο σύγκρισης). *Έστω ότι για τις συναρτήσεις f και g ισχύει*

(1) $0 \le f(x) \le g(x)$ *για κάθε* $x \ge a$.

(2) *Το ολοκλήρωμα* $\int_a^b f(x)\,dx$ *υπάρχει για κάθε* $b \ge a$.

Εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *συγκλίνει τότε και το* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *συγκλίνει και*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Από τις ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος και την (1) έπεται ότι για κάθε $b \ge a$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{1.35}$$

Η τελευταία σχέση παίζει τον ρόλο της (1.34) με $M = \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, κατά συνέπεια το συμπέρασμα όσον αφορά τη σύγκλιση του $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έπεται από το Θεώρημα 1.18. Από την (1.35) έπεται η

$$\sup_{b\ge a} \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \qquad \text{ή} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

□

Απόλυτη σύγκλιση και σύγκλιση υπό συνθήκη

Όπως και στις σειρές έτσι και στα γενικευμένα ολοκληρώματα έχουμε ότι

Ορισμός 1.9. Θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει απολύτως** αν το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει. Εάν το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει και το $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ αποκλίνει θα λέμε ότι το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

Θεώρημα 1.20. *Εάν η συνάρτηση f ορισμένη για $x \geq a$ είναι ολοκληρώσιμη σε διάστημα $[a,b]$ για κάθε $b \geq a$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, τότε και το $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, δηλαδή εάν ένα ολοκλήρωμα συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση, απλά παρατηρήστε ότι $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \geq a$, κατά συνέπεια

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

για κάθε $x \geq a$, και χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 1.19. □

1.7.1 Παραδείγματα και Ασκήσεις

Παράδειγμα 1.31. Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,dx = \frac{2}{a}.$$

Για $r > 0$ έχουμε

$$\int_0^r e^{-a|x|}\,dx = \int_0^r e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}\Big]_0^r = -\frac{1}{a}\left(e^{-ar} - 1\right),$$

έτσι

$$\int_0^{+\infty} e^{-a|x|}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-a|x|}\,dx = \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{e^{ar}}\right) = \frac{1}{a}.$$

Αν $s < 0$, τότε

$$\int_s^0 e^{-a|x|}\,dx = \int_s^0 e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\Big]_s^0 = \frac{1}{a}\left(1 - e^{as}\right),$$

οπότε

$$\int_{-\infty}^0 e^{-a|x|}\,dx = \lim_{s\to-\infty}\int_s^0 e^{-a|x|}\,dx = \lim_{s\to-\infty}\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{e^{-as}}\right) = \frac{1}{a}.$$

Κατά συνέπεια το $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}\,dx$ υπάρχει και

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-a|x|}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-a|x|}\,dx = \frac{2}{a}.$$

Παράδειγμα 1.32 (Το ολοκλήρωμα της παραγώγου της αντίστροφης εφαπτομένης). Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$$

συγκλίνει, και υπολογίστε την τιμή του.

Αν $f(x) = 1/(1+x^2)$, τότε $f(x) > 0$ και για κάθε $r > 0$ $\int_0^r f(x)\,dx$ είναι πεπερασμένο και θετικό. Για $L > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dx}{x^2+1} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_1^L \frac{dx}{x^2+1} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_1^L \frac{dx}{x^2} \end{aligned}$$

και

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \int_1^L \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{x}\Big]_1^L = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + 1 - \frac{1}{L} \to \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + 1.$$

Έτσι από το Θεώρημα 1.19 έπεται ότι το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει (ποιά είναι εδώ η συνάρτηση g;). Γνωρίζουμε ότι

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$$

οπότε

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{L\to+\infty} \int_0^L \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{L\to+\infty} \left(\tan^{-1} L - \tan^{-1} 0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Παράδειγμα 1.33. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}$$

συγκλίνει.

Παρατηρούμε ότι

$$x^2 - x + 1 = x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4},$$

άρα η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα ολοκλήρωσης. Επιπλέον έχουμε ότι

$$x^2 - x + 1 > \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 > 0$$

για κάθε $x \geq 0$. Έτσι για $L \geq 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{dx}{x^2 - x + 1} &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^L \frac{dx}{x^2 - x + 1} \\ &\leq \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \int_1^L \frac{2\,dx}{x^2} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} - \frac{2}{x}\Big]_1^L \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} + 2 - \frac{2}{L}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια για κάθε $L \geq 1$ είναι

$$\int_0^L \frac{dx}{x^2 - x + 1} \leq M + 2, \qquad \text{όπου} \quad M = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} < +\infty.$$

Η ποσότητα στο αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι μια αύξουσα συνάρτηση του L (γιατί;) η οποία, επιπλέον, είναι φραγμένη για κάθε $L \geq 1$. Κατά συνέπεια συγκλίνει καθώς $L \to +\infty$, ισοδύναμα το δοσμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Άσκηση 1.14. Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1}.$$

Υπόδειξη: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$

Παράδειγμα 1.34. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

συγκλίνει υπό συνθήκη.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0, \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, κατά συνέπεια για κάθε $a > 0$ το ολοκλήρωμα $\int_0^a f(x)\, dx$ υπάρχει. Επιπλέον για $a > 0$ και $0 < \epsilon < a$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x)\, dx &= \int_0^\epsilon f(x)\, dx + \int_\epsilon^a f(x)\, dx \\ &= \epsilon f(\xi) + \int_\epsilon^a \frac{\sin x}{x}\, dx, \qquad\qquad 0 < \xi < \epsilon \end{aligned}$$

από το Θεώρημα της μέσης τιμής, έτσι παίρνοντας το όριο του $\epsilon \to 0+$ βρίσκουμε αφού η f είναι φραγμένη

$$\int_0^a f(x)\, dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \epsilon f(\xi) + \lim_{\epsilon \to 0+} \int_\epsilon^a \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx$$

Έτσι γράφοντας

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin x}{x}\, dx &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_\pi^t \frac{\sin x}{x}\, dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx - \frac{\cos x}{x}\Big]_\pi^t - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx - \frac{1}{\pi} - \frac{\cos t}{t} - \int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\, dx \end{aligned}$$

παίρνουμε
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{1}{\pi} - \lim_{t\to+\infty}\int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx. \tag{1.36}$$
Επειδή
$$0 \le \int_\pi^t \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \le \int_\pi^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Big]_\pi^t = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{t} \le \frac{1}{\pi}$$
από το Θεώρημα 1.20 έπεται ότι το ολοκλήρωμα
$$\lim_{t\to+\infty}\int_\pi^t \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$
υπάρχει, επομένως από την (1.36) συνεπάγεται ότι το
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
συγκλίνει. Για την απόλυτη σύγκλιση και για $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το
$$\begin{aligned}\int_0^{(N+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{k=0}^{N}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \\ &\ge \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k},\end{aligned}$$
αφού (γιατί;)
$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|\,dx = \int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos x\Big]_0^\pi = -(-1)+1 = 2,$$
κατά συνέπεια
$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^{(N+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \ge \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}.$$
Επειδή η αρμονική σειρά, στο δεξί μέλος, αποκλίνει, έπεται ότι και το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος αποκλίνει.

Άσκηση 1.15 (Η συνάρτηση Γάμμα). Για $s > 0$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα
$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1}\,dt.$$

(α΄) Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε $s > 0$.
Υπόδειξη: αν $s \ge 1$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται
$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^p\,dt, \qquad p = s-1 \ge 0$$

αν $0 < s < 1$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{1}{t^p}\,dt, \qquad p = 1 - s > 0.$$

(β′) Δείξτε ότι $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ για $s > 0$.

(γ′) Δείξτε ότι $\Gamma(n+1) = n!$ για $n = 0, 1, 2, \dots$

Παράδειγμα 1.35 (Μετασχηματισμός Laplace). Αν η f είναι μια "καλή" συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$, και $s \in \mathbb{R}$ είναι μια παράμετρος η σχέση

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\,dx$$

ορίζει μια συνάρτηση του s, για όλες τις τιμές του s για τις οποίες το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Η $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, λέγεται **μετασχηματισμός Laplace** της f. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(x) = \sin ax$, $x \geq 0$, όπου $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\mathcal{L}\{\sin ax\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2 + a^2}, \qquad s > 0.$$

Για $L > 0$ και $s \neq 0$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx &= \int_0^L \Big(-\frac{e^{-sx}}{s}\Big)' \sin ax\,dx \\
&= -\frac{e^{-sx}\sin ax}{s}\Big]_0^L + \frac{a}{s}\int_0^L e^{-sx}\cos ax\,dx \\
&= -\frac{e^{-sx}\sin ax}{s}\Big]_0^L - a\frac{e^{-sx}\cos ax}{s^2}\Big]_0^L - \frac{a^2}{s^2}\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\Big(1 + \frac{a^2}{s^2}\Big)\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx &= -\frac{e^{-sx}\sin ax}{s}\Big]_0^L - a\frac{e^{-sx}\cos ax}{s^2}\Big]_0^L \\
&= -\frac{e^{-sL}\sin aL}{s} - a\frac{e^{-sL}\cos aL}{s^2} + \frac{a}{s^2},
\end{aligned}$$

επομένως

$$\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2 + a^2} - \Big[\frac{s\sin aL}{s^2 + a^2} + \frac{a\cos aL}{s^2 + a^2}\Big]\frac{1}{e^{sL}}.$$

Για $s > 0$ παίρνοντας το όριο $L \to +\infty$ προκύπτει, τελικά, ότι

$$\mathcal{L}\{\sin ax\} = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\sin ax\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_0^L e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

αφού

$$\Big|\frac{s\sin aL}{s^2 + a^2} + \frac{a\cos aL}{s^2 + a^2}\Big|\frac{1}{e^{sL}} \leq \frac{s + |a|}{s^2 + a^2}\,\frac{1}{e^{sL}} \to 0,$$

καθώς $L \to +\infty$. Για $s \leq 0$ το ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει.

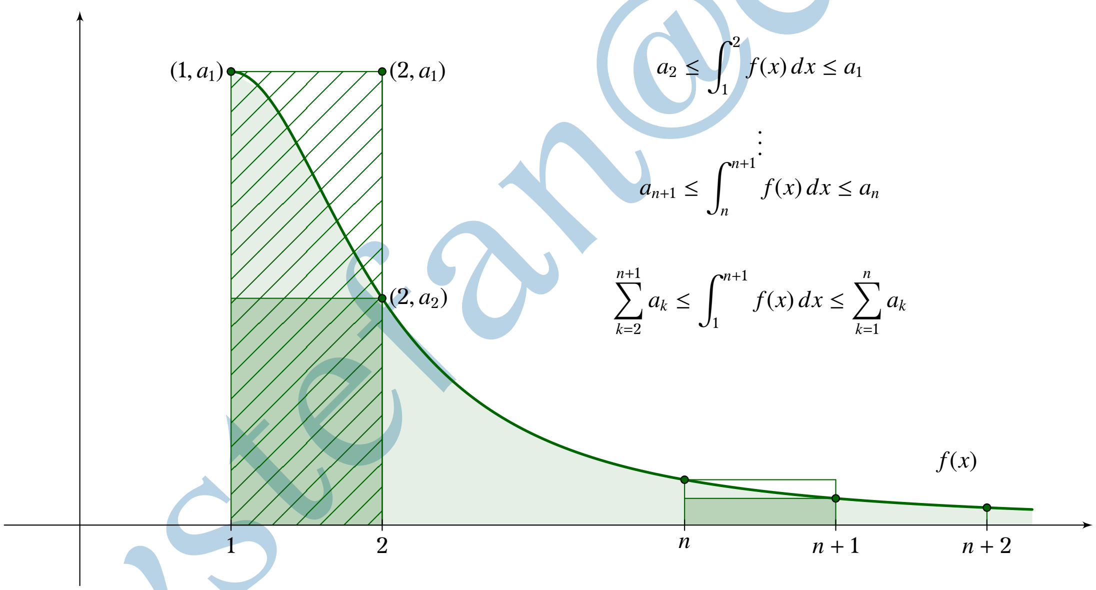
1.8 Το κριτήριο του ολοκληρώματος

Μια σειρά αριθμών $\sum_1^\infty a_n$ μπορεί να ειδωδεί ως γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ όπου η συνάρτηση f είναι τέτοια ώστε $f(x) = a_n$ όταν $n \le x < n+1$, για $n = 1, 2, 3, \ldots$. Κατά συνέπεια όσον αφορά στη σύγκλιση περιμένουμε ανάλογη συμπεριφορά για τη σειρά και το ολοκλήρωμα. Το επόμενο αποτέλεσμα εξασφαλίζει την από κοινού σύγκλιση ή απόκλιση σειράς και ολοκληρώματος στην περίπτωση όπου οι όροι της σειράς είναι οι $f(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Θεώρημα 1.21 (Κριτήριο ολοκληρώματος). *Έστω f μια συνάρτηση συνεχής, θετική και φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, και έστω $a_n = f(n)$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \tag{1.37}$$

Κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k$ συγκλίνει αν το ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει, και αποκλίνει αν το ολοκλήρωμα αποκλίνει.



Σχήμα 1.6: Το κριτήριο του ολοκληρώματος

Απόδειξη. Η f είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, επομένως σε κάθε διάστημα $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$, από τον ορισμό της ακολουθίας $(a_n)_{n=1}^\infty$, είναι

$$f(k+1) \le f(x) \le f(k) \Rightarrow a_{k+1} \le f(x) \le a_k.$$

Επειδή δε η f είναι συνεχής ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$a_{k+1} \le \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le a_k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.38}$$

απ΄ όπου αθροίζοντας για $k = 1, 2, \ldots, n-1$ παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k,$$

η οποία είναι η (1.37), και στη γλώσσα των μερικών αθροισμάτων

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1},$$

από την οποία αμέσως βλέπουμε ότι η σειρά και το ολοκλήρωμα είτε συγκλίνουν ταυτόχρονα, ή αποκλίνουν. □

Παρατήρηση 1.9 (Εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής). Όπως στην (1.38) παίρνουμε, βλέπε και Σχήμα 1.6,

$$\int_{k+1}^{k+2} f(x)\,dx \leq a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.39}$$

από την οποία υποθέτοντας ότι η σειρά συγκλίνει προκύπτει ότι

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{1.40}$$

Αν s είναι το όριο της σειράς και S_n είναι το μερικό άθροισμα της σειράς τότε η (1.40) γράφεται

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq s - S_n \leq \int_n^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{1.41}$$

οπότε η (1.41) δίνει μια εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής $E_n := s - S_n$ του αθροίσματος της σειράς. Από τη σχέση (1.41) προκύπτει ότι

$$S_n + \int_{n+1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq s \leq S_n + \int_n^{+\infty} f(x)\,dx, \tag{1.42}$$

που είναι μια εκτίμηση του ορίου της σειράς.

Παράδειγμα 1.36. Για $p > 0$ θεωρούμε την p-σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

Εξετάστε για ποιές τιμές του p η σειρά συγκλίνει.

Η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \qquad x > 0$$

είναι συνεχής, θετική, και φθίνουσα κατά συνέπεια σύμφωνα με το Θεώρημα 1.21 η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν το ολοκλήρωμα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

συγκλίνει. Έτσι από το Παράδειγμα 1.28 έπεται ότι η δοσμένη σειρά συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$.

Άσκηση 1.16. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

(α΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (β΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ (γ΄) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (δ΄) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} ne^{-n^2}$

Παράδειγμα 1.37. Θεωρούμε τη συγκλίνουσα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(α΄) Προσεγγίστε το άθροισμα της σειράς χρησιμοποιώντας τους δέκα πρώτους όρους της σειράς και εκτιμήστε το σφάλμα της προσέγγισης.

(β΄) Πόσοι όροι της σειράς απαιτούνται ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.0005;

(γ΄) Χρησιμοποιήστε την (1.42) με $n = 10$ για να εκτιμήσετε το όριο της σειράς.

Και στα δύο ερωτήματα είναι χρήσιμο το αποτέλεσμα

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

(α΄) Υπολογίζουμε

$$S_{10} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.197532$$

Σύμφωνα με την (1.41) το σφάλμα $E_{10} = s - S_{10}$ είναι το πολύ

$$\int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2(10^2)} = \frac{1}{200},$$

δηλαδή το σφάλμα είναι μικρότερο του 0.005.

(β΄) Για να είναι το σφάλμα το πολύ 0.0005 θα πρέπει

$$\int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2} \leq 0.0005 \Leftrightarrow \frac{1}{0.001} \leq n^2 \Leftrightarrow \sqrt{1000} \leq n.$$

Επειδή $\sqrt{1000} \approx 31.6$ έπεται ότι απαιτούνται 32 όροι ώστε να έχουμε την επιθυμητή ακρίβεια στην προσέγγιση.

(γ΄) Από την (1.42) παίρνουμε

$$S_{10} + \int_{11}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \le s \le S_{10} + \int_{10}^{+\infty} \frac{dx}{x^3} \Leftrightarrow S_{10} + \frac{1}{2(11^2)} \le s \le S_{10} + \frac{1}{2(10^2)}$$

οπότε από το (α΄) βρίσκουμε

$$1.201664 \le s \le 1.202532.$$

Έτσι αν προσεγγίσουμε το όριο s με το κέντρο του παραπάνω διαστήματος 1.2021, δηλαδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021$$

τότε το σφάλμα είναι το πολύ το μισό του μήκους του διαστήματος, δηλαδή < 0.0005.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα στα (β΄) και (γ΄) βλέπουμε ότι ενώ με την προσέγγιση $s \approx S_n$ απαιτούνται 32 όροι ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο του 0.0005 με χρήση της (1.42) πετυχαίνουμε το αποτέλεσμα αυτό μόνο με 10 όρους.

Παράδειγμα 1.38 (Η σταθερά του Euler). Αποδεικνύουμε ότι το όριο

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

υπάρχει.

Από τη μονοτονία της $f(x) = 1/x$ με $x > 0$, για κάθε $k = 1, 2, 3, \ldots$ βρίσκουμε

$$k \le x \le k+1, \qquad \frac{1}{k+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \le \frac{1}{k}$$

επομένως

$$\frac{1}{k+1} \le \log(k+1) - \log k \le \frac{1}{k} \tag{1.43}$$

κατά συνέπεια αθροίζοντας για $k = 1, 2, \ldots, N-1$ βρίσκουμε

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \le \sum_{k=1}^{N-1} \big(\log(k+1) - \log k\big) \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1}.$$

Επειδή

$$\sum_{k=1}^{N-1} \big(\log(k+1) - \log k\big) = \log N - \log 1 = \log N$$

από την τελευταία ανισότητα προκύπτει η

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \log N \le 0 \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N-1} - \log N. \tag{1.44}$$

Από την ανισότητα στα αριστερά της (1.44) προσθέτοντας 1 και στα δύο μέλη βρίσκουμε

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N \le 1,$$

ενώ από την ανισότητα στα δεξιά της (1.44) προσθέτοντας $1/N$ και στα δύο μέλη βρίσκουμε

$$\frac{1}{N} \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}-\log N,$$

έτσι για κάθε φυσικό αριθμό n έχουμε

$$\frac{1}{n} \le 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n \le 1. \tag{1.45}$$

Θέτοντας

$$t_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

η ακολουθία (t_n) είναι φραγμένη. Δείχνουμε ότι η ακολουθία είναι μονότονη. Θεωρώντας τη διαφορά

$$t_{n+1}-t_n = \frac{1}{n+1}-\log(n+1)+\log n = \frac{1}{n+1}-\log\frac{n+1}{n},$$

από την (1.43) βλέπουμε ότι $t_{n+1}-t_n \le 0$, δηλαδή η (t_n) είναι επιπλέον φθίνουσα, κατά συνέπεια συγκλίνει. Το όριο συμβολίζεται με γ και λέγεται **σταθερά του Euler**. Προσεγγιστικά μπορεί να υπολογισθεί $\gamma = 0.577215\ldots$. Είναι αξιοσημείωτο ότι παραμένει άγνωστο αν ο γ είναι ρητός ή άρρητος αριθμός.

Ασκήσεις

1. Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a,b]$ δείξτε ότι

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f(x)\,dx$$

   και συμπεράνατε ότι

   $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

2. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

   (α΄) $\displaystyle\int (x+1)\sin(x^2+2x+1)\,dx.$

   (β΄) $\displaystyle\int x\sin x\cos x\,dx.$

   (γ΄) $\displaystyle\int \cos^4 x\,dx.$

   (δ΄) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx.$

(ε′) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x^2-2x+4)^{3/2}}\,dx.$

(ς′) $\displaystyle\int \cos^9 x\,dx.$

(ζ′) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+2x+2)}\,dx.$

(η′) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^4+2x^2}\,dx.$

(θ′) $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx.$

(ι′) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{(2+x)(3-x)}}\,dx.$

3. Ένα άθροισμα $\sum_{k=1}^n a_k$ μπορεί να ιδωθεί τυπικά ως ένα άθροισμα Riemann,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\delta_k}\delta_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\delta_k \qquad \text{με} \qquad \lim_{n\to\infty}\delta_k = 0$$

για κατάλληλη συνάρτηση f, βλέπε Παράδειγμα 1.2. Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα κατά νου δείξτε ότι

(α′) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n} = e-1.$

(β′) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$

(γ′) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right) = \log(1+\sqrt{2}).$

(δ′) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{1+p}$, όπου $P > -1$.

(ε′) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{t}{n}+\sin\frac{2t}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)t}{n}\right) = \frac{1-\cos t}{t}$, όπου $t \neq 0$.

(ς′) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}.$

4. Δεδομένου ότι $\sec x = \cos x/(1-\sin^2 x)$ δείξτε ότι

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

5. Δείξτε ότι

(α′) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$. Θέστε $x = \pi - y$.

(β′) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$. Θέστε $x = \pi/2 - y$.

6. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int \tan^{-1} x\,dx,$$

θέτοντας $u = \tan^{-1} x$ και $v = x$.

7. **Το ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης.** Έστω ότι για τη συνάρτηση f υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. Αν $y = f^{-1}(x)$ δείξτε ότι

$$\int f^{-1}(x)\,dx = \int y f'(y)\,dy$$

κατά συνέπεια

$$\int f^{-1}(x)\,dx = yf(y) - \int f(y)\,dy. \tag{1.46}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.46) υπολογίστε και εκφράστε το αποτέλεσμα ως συνάρτηση του x καθένα από τα ολοκληρώματα

(α΄) $\displaystyle\int \log x\,dx.$ (β΄) $\displaystyle\int \sin^{-1} x\,dx.$ (γ΄) $\displaystyle\int \tan^{-1} x\,dx.$

8. **Αναδρομικοί τύποι.** Με ολοκλήρωση κατά μέρη αποδείξτε τις αναδρομικές σχέσεις

(α΄) $\displaystyle\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots,$

(β΄) $\displaystyle\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots,$

(γ΄) $\displaystyle\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx, \qquad n = 2, 3, \ldots,$

(δ΄) $\displaystyle\int \sec^n x\,dx = \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx, \qquad n = 2, 3, \ldots,$

(ε΄) $\displaystyle\int \log^n x\,dx = x\log^n x - n\int \log^{n-1} x\,dx, \qquad n = 2, 3, \ldots,$

(ϛ΄) $\displaystyle\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx, \qquad a \neq 0,$ και $n = 1, 2, \ldots,$

(ζ΄) $\displaystyle\int x^n \sin(ax)\,dx = -\frac{x^n \cos(ax)}{a} + \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cos(ax)\,dx, \qquad a \neq 0,$ και $n = 1, 2, \ldots,$

(η΄) $\displaystyle\int x^n \cos(ax)\,dx = \frac{x^n \sin(ax)}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sin(ax)\,dx, \qquad a \neq 0,$ και $n = 1, 2, \ldots.$

9. Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση.

(α΄) Δείξτε ότι

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

για κάθε φυσικό αριθμό n. Βλέπε Σχήμα 1.6 και Παράδειγμα 1.38.

(β΄) Επιλέγοντας $f = \log$ δείξτε ότι
$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$
για κάθε φυσικό αριθμό n και συμπεράνατε ότι
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

10. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τα ολοκληρώματα

(α΄) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx.$

(β΄) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^{3/2}}\,dx.$

(γ΄) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,dx.$

(δ΄) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$

11. Εξετάστε αν το ολοκλήρωμα
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{x^x}\,dx$$
συγκλίνει συγκρίνοντάς το με τη σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{n}\right)^n.$$

12. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\log n+1)^p}, \qquad p \in \mathbb{R}$$
για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου p.

13. Δείξτε ότι
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi}{8}.$$
Υπόδειξη: $x^4 + 4 = (x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$.

14. **Μετασχηματισμοί Laplace.** Δείξτε ότι

(α΄) $\displaystyle\mathcal{L}\{a\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} a\,dx = \frac{a}{s}, \quad s > 0.$

(β΄) $\displaystyle\mathcal{L}\{e^{ax}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}e^{ax}\,dx = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$

(γ΄) $\displaystyle\mathcal{L}\{x\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x\,dx = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$

(δ΄) $\displaystyle\mathcal{L}\{x^n\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n\,dx = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

(ε΄) $\displaystyle\mathcal{L}\{\cos ax\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cos ax\,dx = \frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0.$

Βιβλιογραφία

[1] Σ. Κ. Πηχωρίδης *Απειροστικός Λογισμός, Πρόχειρες Σημειώσεις*, Σάμος 2006.

[2] T. M. Apostol *Mathematical Analysis*, 2nd edition, Addison–Wesley, Reading, Massachusetts 1974.

[3] T. M. Apostol *Calculus*, Volume I, 2nd edition, Willey, New York 1991.

[4] R. G. Bartle *The Elements of Real Analysis*, 2nd edition, Wiley, New York 1976.

[5] R. G. Bartle & D. R. Sherbert *Introduction to Real Analysis*, 3rd edition, Wiley, New York 2000.

[6] R. Courant & F. John *Introduction to Calculus and Analysis*, Volume I, Springer-Verlag, New York 1989.

[7] P. R. Halmos *Naive Set Theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York 1974.

[8] A. G. Hamilton *Logic for Mathematicians*, Cambridge University Press, 1980.

[9] K. Knopp *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York 1956.

[10] J. R. Munkres *Topology, A first course*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1975.

[11] A. C. M. Van Rooij & W. H. Schikhof *A second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1982.

[12] G. F. Simmons *Introduction to Topology and modern Analysis*, McGraw–Hill, New York 1963.

[13] M. Spivak *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, μετάφραση της 4ης έκδοσης του πρωτότυπου, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2010.

[14] B. L. van der Waerden *Algebra*, Vol. 1, (3rd printing) Frederick Ungar, New York 1977.