

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

27 Ιανουαρίου 2022

+1/22/.....

Στοιχεία Εξεταζόμενου/ης		
ΕΠΩΝΥΜΟ :	ΟΝΟΜΑ :	
ΑΡ. ΜΗΤΡΩΟΥ :	ΕΤΟΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ :	
ΑΙΘΟΥΣΑ :	ΣΤΗΛΗ :	ΒΑΘΜΟΣ :

Οδηγίες/Επεξηγήσεις

Στο διαγώνισμα υπάρχουν τριών ειδών ερωτήματα.

1. Ερωτήματα με την ένδειξη ■. Σε αυτά πρέπει να δώσετε μόνο την απάντηση δίχως αιτιολόγηση.
2. Ερωτήματα με την ένδειξη ○. Αυτά είναι ερωτήματα του τύπου σωστό/λάθος και καλείσθε να γράψετε στον κύκλο "Σ" για σωστό ή "Λ" για λάθος.
3. Ένα ερώτημα στο οποίο καλείσθε να δώσετε μια πλήρη αλλά "οικονομική απόδειξη-λύση" για το ζητούμενο.

Σε όλες τις περιπτώσεις συστήνεται να "δουλέψετε" κάθε ερώτημα ή υποερώτημα στο πρόχειρο ώστε η απάντησή σας να μην είναι τυχαία.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1 ώρα και 30 λεπτά. Η παράδοση των γραπτών αρχίζει 1 ώρα και 15 λεπτά μετά από την έναρξη της εξέτασης.

Καλή Επιτυχία!

Λύσεις πρώτου μέρους
όλες οι εκδοχές

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \sqrt{1+2x}$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/2 < x < 1/2$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α) $P_2(x) =$

(β) $R_2(x) =$

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \sqrt{1+3x}$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/3 < x < 1/3$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α) $P_2(x) =$

(β) $R_2(x) =$

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \ln(1+2x)$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/2 < x < 1/2$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α) $P_2(x) =$

(β) $R_2(x) =$

Θ1. ■ Εάν $f(x) = \ln(1-2x)$, και $f(x) = P_2(x) + R_2(x)$ στο $-1/2 < x < 1/2$, όπου P_2 είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 και R_2 είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο, τότε

(α) $P_2(x) =$

(β) $R_2(x) =$

Λύση

Σε όλες τις περιπτώσεις το διάστημα είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, οπότε το κάθε πολυώνυμο και το κάθε υπόλοιπο είναι με κέντρο το μηδέν. Έτσι

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \quad \text{και} \quad R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3$$

Για την

$$f(x) = \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{1/2}$$

υπολογίζουμε

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2} \cdot 2 = (1+2x)^{-1/2} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-3/2} \cdot 2 = -(1+2x)^{-3/2} \Rightarrow f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}(1+2x)^{-5/2} \cdot 2 = 3(1+2x)^{-5/2}$$

συνεπώς

$$P_2(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 \quad \text{και} \quad R_2(x) = \frac{3(1+2\xi)^{-5/2}}{3!}x^3 = \frac{x^3}{2(1+2\xi)^{5/2}}$$

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις οι υπολογισμοί είναι ανάλογοι.

Θ2. Συμπληρώστε την απάντηση ή γράψτε Σ για σωστό ή Λ για λάθος στο λευκό κυκλάκι.

⊙ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_0^L e^{ax} dx \leq \int_0^L e^{bx} dx$, για κάθε $L > 0$.

⊙ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_1^L \ln(ax) dx \leq \int_1^L \ln(bx) dx$, για κάθε $L > 1$.

⊙ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_1^L \ln(a+x) dx \leq \int_1^L \ln(b+x) dx$, για κάθε $L > 1$.

⊙ Αν $0 < a < b$, τότε $\int_1^L \ln(1+ax) dx \leq \int_1^L \ln(1+bx) dx$, για κάθε $L > 1$.

Σε όλες τις περιπτώσεις η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι αύξουσα και η τιμή της συνάρτησης στο αριστερό μέλος είναι μικρότερη της τιμής στο δεξιό μέλος.

■ $\sup_{-\infty < x < \infty} e^{-x^2} = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{e^0} = 1$

■ $\sup_{-\infty < x < \infty} (1+x^2)^{-1} = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0} = 1$

■ $\sup_{-\infty < x < \infty} e^{-|x|} = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{e^{|x|}} = \frac{1}{e^0} = 1$

■ $\sup_{-\infty < x < \infty} (1+e)^{-x^2} = \sup_{-\infty < x < \infty} \frac{1}{(1+e)^{x^2}} = \frac{1}{(1+e)^0} = 1$

Το supremum, ελάχιστο άνω φράγμα, συμβαίνει εκεί που ο παρονομαστής γίνεται ελάχιστος.

⊙ Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{a_n}}{1+2|a_n|}$ συγκλίνει.

Ενώ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n}}{1+2|a_n|} = \frac{e^0}{1+0} = 1 \neq 0$.

⊙ Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2|a_n|}{1+e^{a_n}}$ συγκλίνει.

$\frac{2|a_n|}{1+e^{a_n}} \leq 2|a_n|$, οπότε $0 \leq \sum_{n=0}^N \frac{2|a_n|}{1+e^{a_n}} \leq \sum_{n=0}^N 2|a_n| = 2 \sum_{n=0}^N |a_n| \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ για κάθε N .

⊙ Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+\ln(1+|a_n|)}$ συγκλίνει.

$\frac{|a_n|}{1+\ln(1+|a_n|)} \leq |a_n|$, οπότε η δεύτερη σειρά συγκλίνει κατ' απόλυτη τιμή, άρα συγκλίνει.

Ⓐ Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, τότε και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{a_n}}{1 + \ln(1 + |a_n|)}$ συγκλίνει.

Ενώ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, είναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{a_n}}{1 + \ln(1 + |a_n|)} = \frac{e^0}{1 + \ln 1} = \frac{1}{1 + 0} = 1 \neq 0$.

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = e^{1/2}$

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2$

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n = e^{-1/2}$

■ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^n = e^{-3/2}$

Σε όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

⊕ $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{21} dx = 0$.

⊕ $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{23} dx = 0$.

⊕ $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{25} dx = 0$.

⊕ $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{27} dx = 0$.

Σε όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε $\int_{a-1}^{a+1} (a-x)^{2k+1} dx = \int_1^{-1} -y^{2k+1} dy = \int_{-1}^1 y^{2k+1} dy = 0$, αφού η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή.

■ Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1^2 = 1$

■ Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n - 1} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}$

■ Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n)^3 = (1 - 2)^3 = (-1)^3 = -1$

■ Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n)^3 = (1 - 3)^3 = (-2)^3 = -8$

Ⓐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q + 1}$ συγκλίνει αν $q > p$.

$\frac{n^p}{2n^q} \leq \frac{n^p}{n^q + 1} \leq \frac{n^p}{n^q}$, κατά συνέπεια η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^q} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ συγκλίνει, και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $q - p > 1$, ισοδύναμα $q > p + 1$.

Ⓐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^q}{n^p + 1}$ συγκλίνει αν $q < p$. Το σωστό είναι, βλέπε προηγούμενο, $p > q + 1$.

Ⓐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + 1}{n^q + 1}$ συγκλίνει αν $p > q + 1$. Το σωστό είναι, βλέπε προηγούμενο, $q > p + 1$.

$$\frac{1}{2} \frac{n^p}{n^q} \leq \frac{n^p}{n^q + 1} \leq \frac{n^p + 1}{n^q + 1} \leq \frac{2n^p}{n^q + 1} \leq 2 \frac{n^p}{n^q}$$

Ⓐ Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + 1}{n^q + 1}$ συγκλίνει αν $p < q + 1$. Το σωστό είναι, βλέπε προηγούμενο, $q > p + 1$.

■ $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n/2} =$

■ $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/2} =$

■ $\sum_{n=0}^{\infty} \pi^{-n/3} =$

■ $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/3} =$

Όλες οι περιπτώσεις κωδικοποιούνται ως $\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n/k}$, με $a = \pi, e$ και $k = 2, 3$, και η σειρά είναι **γεωμετρική**, επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-n/k} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{a}} \right)^n = \frac{1}{1 - 1/\sqrt[k]{a}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{a} - 1},$$

αφού $\sqrt[k]{a} > 1$, οπότε $0 < \frac{1}{\sqrt[k]{a}} < 1$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^{1/p}} dx, \quad p \neq 0.$$

- Η ακολουθία είναι αύξουσα.
- Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.
- Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < p < 1$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^p} dx, \quad p \in \mathbb{R}.$$

- Η ακολουθία είναι αύξουσα.
- Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.
- Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^{2/p}} dx, \quad p \neq 0.$$

- Η ακολουθία είναι αύξουσα.
- Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.
- Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $0 < p < 2$.

Θ3. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με

$$a_n = \int_0^n (1+x)^p dx, \quad p \neq 0.$$

- Η ακολουθία είναι αύξουσα.
- Αν $p > 0$ η ακολουθία είναι φραγμένη.
- Η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν $p < -1$.

Λύση

Σε όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = \int_0^n \frac{1}{(1+x)^r} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{t^r} dt$$

Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι θετική, οπότε μεγαλώνοντας το διάστημα αυξάνεται η τιμή του ολοκληρώματος, επομένως η ακολουθία είναι **αύξουσα**. Το ολοκλήρωμα $\int_1^\infty 1/t^r dt$ συγκλίνει αν και μόνο αν $r > 1$, ισοδύναμα η ακολουθία είναι φραγμένη και συγκλίνει αν και μόνο αν $r > 1$. Έτσι οι απαντήσεις σε όλες τις περιπτώσεις είναι **Σωστό, Λάθος, Σωστό**.

Θ4. ■ Εάν $z = -i$, τότε

(α) $\arg z = \left\{ 2k\pi + \frac{3\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$

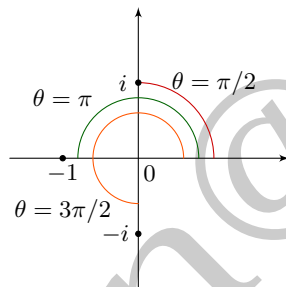
(β) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$, αφού $|z| = 1$

(γ) $(1+z)^{24} = (1-i)^{24} = \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^{24} = 2^{12} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)^{24} =$
 $2^{12} \left(\cos 24 \frac{7\pi}{4} + i \sin 24 \frac{7\pi}{4} \right) = 2^{12} (\cos 42\pi + i \sin 42\pi) = 2^{12}$

(δ) Μία από τις τρίτες ρίζες $((-i)^{1/3})$ του z είναι η $w = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ (για $k = 0$).

$$(-i)^{1/3} = \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)^{1/3} = \left[\cos \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right) \right]^{1/3}$$

$$= \cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{2}}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$



Το ανάλογο ισχύει και για τις υπόλοιπες εκδοχές.

Θ4. ■ Εάν $z = i$, τότε

(α) $\arg z =$

(β) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z =$

(γ) $(1+z)^{28} =$

(δ) Μία από τις τρίτες ρίζες $((i)^{1/3})$, του z είναι η $w =$

Θ4. ■ Εάν $z = -1$, , τότε

(α) $\arg z =$

(β) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z =$

(γ) $(z+i)^{24} =,$

(δ) Μία από τις μη πραγματικές τρίτες ρίζες $((-1)^{1/3})$ του z είναι η $w =$

Θ4. ■ Εάν $z = i$, τότε

(α) $\arg z =$

(β) Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z =$

(γ) $(-1-z)^{24} =$

(δ) Μία από τις μη πραγματικές τρίτες ρίζες $((i)^{1/3})$ του z είναι η $w =$