ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διάλεξη 2

Οι φυσικοί αριθμοί, Μαθηματική επαγωγή
Οι μιγαδικοί αριθμοί

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

19 Οκτωβρίου 2019

Το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ ορίζεται μοναδικά από τα αξιώματα του Peano (1858–1932).

- **Αξίωμα 1** Ο 1 είναι φυσικός αριθμός.
- **Αξίωμα 2** Για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει μοναδικός επόμενος φυσικός αριθμός n^+.
- **Αξίωμα 3** Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n με $n^+ = 1$.
- **Αξίωμα 4** Εάν m και n είναι φυσικοί αριθμοί με $m^+ = n^+$, τότε $m = n$.
- **Αξίωμα 5** Εάν A είναι ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις ιδιότητες: (i) $1 \in A$ και (ii) για κάθε $n \in A$, ο $n^+ \in A$, τότε $A = \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $1^+ = 2$, $2^+ = 3$, $3^+ = 4$, και τα λοιπά, οπότε $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Θεώρημα (Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής)

Έστω $p(n)$ να είναι μία πρόταση που διατυπώνεται για τον τυχαίο φυσικό αριθμό n, και είναι τέτοια ώστε:

(1) *Η $p(1)$ είναι αληθής*

(2) *Για κάθε φυσικό αριθμό k όταν η $p(k)$ είναι αληθής, τότε και η $p(k^+)$ είναι αληθής.*

Τότε η πρόταση $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η $p(n)$ είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ακολουθούμε τα βήματα:

(Β$_1$) Αποδεικνύουμε ότι η $p(1)$ είναι αληθής.

(Β$_2$) Υποθέτουμε ότι η $p(k)$ είναι αληθής και δείχνουμε ότι η $p(k+1)$ είναι αληθής.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι το άθροισμα των n πρώτων φυσικών αριθμών $1, 2, \dots, n$ ισούται με $n(n+1)/2$, δηλαδή

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1}$$

(Β$_1$) Για $n=1$ η (1) γίνεται

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

που ισχύει. Άρα η (1) είναι αληθής για $n=1$.

(Β$_2$) Υποθέτουμε ότι για κάποιο φυσικό k είναι

$$1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}, \tag{2}$$

και αποδεικνύουμε ότι

$$1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}. \tag{3}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+(k+1) &= 1+2+3+\cdots+k+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \qquad \text{(από την υπόθεση (2))} \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

που είναι η (3).

Συμπέρασμα: Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή της μαθηματικής επαγωγής η (1) είναι αληθής για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Εάν A είναι ένα σύνολο που περιέχει ένα πεπερασμένο αριθμό στοιχείων με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του. Εάν $|A| = n$ μπορούμε να γράφουμε $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Παρατηρούμε ότι εάν A και B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, συγκεκριμμένα $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Παράδειγμα

Έστω ότι A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $\mathscr{P}(A)$ το δυναμοσύνολο του A. Εάν $|A| = n$, τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^n$, όπου $n \in \mathbb{N}$.

(B$_1$) Αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό για $n = 1$. Έστω A ένα σύνολο με ένα στοιχείο, δηλαδή έστω $A = A_1 = \{a_1\}$. Τότε $\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, A\}$, οπότε

$$|\mathscr{P}(A)| = 2 = 2^1.$$

(B$_2$) Δεχόμαστε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k$, υποθέτουμε δηλαδή ότι εάν $|A| = k$ τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^k$. Με αυτή την υπόθεση αποδεικνύουμε ότι ο ισχυρισμός είναι σωστός για $n = k + 1$, δηλαδή εάν A είναι ένα σύνολο με $k + 1$ στοιχεία τότε $|\mathscr{P}(A)| = 2^{k+1}$. Έστω λοιπόν ότι

$$A = A_{k+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}\}$$

Τότε όμως

$$A = A_k \cup \{a_{k+1}\}, \qquad \text{όπου} \qquad A_k = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Έτσι θα έχουμε

$$\mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(A_k) \cup \{B \cup \{a_{k+1}\} : B \in \mathscr{P}(A_k)\}$$

(γιατί;). Αρα

$$|\mathscr{P}(A)| = |\mathscr{P}(A_k)| + |\mathscr{P}(A_k)| = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.
Έτσι ο ισχυρισμός είναι σωστός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε εδώ ότι εάν $A = \emptyset$, τότε $|A| = 0$, και $\mathscr{P}(A) = \{\emptyset\}$, οπότε $|\mathscr{P}(A)| = 1 = 2^0$, δηλαδή η πρόταση: Εάν $|A| = n$, τότε $\mathscr{P}(A)| = 2^n$ είναι αληθής για $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αρκετές φορές γράφουμε

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}. \tag{4}$$

Παράδειγμα (Η ανισότητα του Bernoulli)

Εάν $a \geq -1$, να αποδειχθεί ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει

$$(1+a)^n \geq 1+na. \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι για $a=-1$ η ανισότητα ισχύει τετριμμένα αφού $0 \geq 1-n$.

(B$_1$) Αποδεικνύουμε ότι η ανισότητα ισχύει για $n=1$. Πραγματικά

$$(1+a)^1 = 1+a,$$

άρα η (5) ιχύει σαν ισότητα.

(B$_2$) Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η (5) ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$$(1+a)^k \geq 1+ka$$

και αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$, δηλαδή

$$(1+a)^{k+1} \geq 1+(k+1)a.$$

Θα έχουμε

$$\begin{aligned}
(1+a)^{k+1} &= (1+a)(1+a)^k \\
&\geq (1+a)(1+ka) && (\text{από την υπόθεση, αφού } 1+a \geq 0) \\
&= 1+ka+a+ka^2 \\
&= 1+(k+1)a+ka^2 \\
&\geq 1+(k+1)a && (ka^2 \geq 0)
\end{aligned}$$

που είναι η ανισότητα που θέλουμε.
Άρα η (5) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ορισμός

Εάν $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τον αριθμό ***n* παραγοντικό**, $n!$ με τη σχέση

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Έτσι $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, κοκ. Ορίζουμε επίσης $0! = 1$. Για κάθε $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ και $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ορίζουμε τον **δυωνυμικό συντελεστή** n ανά k με τη σχέση

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ιδιότητες των δυωνυμικών συντελεστών

Εάν $n = 0, 1, 2, \dots$ και $k = 0, 1, 2, \dots, n$, τότε ισχύουν οι ταυτότητες

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

Θεώρημα (Το Δυωνυμικό Θεώρημα)

Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n \qquad (6)$$

για κάθε φυσικό αριθμό n.

Πόρισμα

Εάν n είναι φυσικός αριθμός, τότε

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \qquad (7)$$

Η εξίσωση

$$x^2 + 1 = 0$$

δεν έχει λύση στους πραγματικούς αριθμούς αφού για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x^2 \geq 0$. Διατυπώνεται λοιπόν το ερώτημα κατά πόσον υπάρχει ένα σύστημα αριθμών που κατά κάποια έννοια επεκτείνει τους πραγματικούς αριθμούς και είναι τέτοιο ώστε η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ να έχει λύση. Αποδεικνύεται ότι ένα τέτοιο σύστημα υπάρχει και αυτό είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών. Σε αυτό το σύστημα οι λύσεις της $x^2 + 1 = 0$ δεν θα μπορούσαν να είναι άλλες από τις

$$x = \sqrt{-1}, \qquad \text{και} \qquad x = -\sqrt{-1}.$$

Στη συνέχεια με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών, με $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων και με $\mathbb{Q}$ το σύνολο τν ρητών αριθμών.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Στο σύνολο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, όπου

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{και} \quad y_1 = y_2,$$

με τη γνωστή πρόσθεση

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{8}$$

ορίζουμε την πράξη του πολαπλασιασμού με τη σχέση

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{9}$$

Παρατηρούμε ότι για $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y) \tag{10}$$

$$(x, y) + (-x, -y) = (0, 0) \tag{11}$$

$$(x, y)(1, 0) = (x, y), \tag{12}$$

δηλαδή το $(0,0)$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, δηλαδή το μηδέν, το $(-x,-y)$ είναι το αντίθετο του (x,y), ενώ το $(1,0)$ είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, η μονάδα. Εξετάζοντας εάν υπάρχει το αντίστροφο του (x,y), δηλαδή εκείνο το (x',y') για το οποίο

$$(x,y)(x',y') = (1,0)$$

και παρατηρώντας ότι

$$(0,0)(x',y') = (0,0) \tag{13}$$

υποθέτουμε ότι $(x,y) \neq (0,0)$. Εάν (a,b) είναι το αντίστροφο στοιχείο του (x,y), εάν αυτό υπάρχει, τότε θα πρέπει

$$(x,y)(a,b) = (xa - yb, xb + ya) = (1,0).$$

Λύνοντας αυτό το σύστημα $xa - yb = 1$ και $xb + ya = 0$ βρίσκουμε

$$a = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad b = \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

Οι αριθμοί a και b υπάρχουν, καθόσον $x^2+y^2>0$ οποτεδήποτε $(x,y)\neq(0,0)$, επομένως το αντίστροφο του (x,y) το οποίο συμβολίζουμε με $(x,y)^{-1}$ είναι το

$$(x,y)^{-1}=\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right). \tag{14}$$

Το σύνολο των σημείων $z=(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις (8) και (9) συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$ και τα στοιχεία του καλούμε *μιγαδικούς αριθμούς* (complex numbers).

Το σώμα των μιγαδικών αριθμών

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{C}$ είναι σώμα, ικανοποιούνται δηλαδή οι νόμοι

- M1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.
- M2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
- M3. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{0} = (0,0)$, έτσι ώστε $z + \mathbf{0} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- M4. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός $-z$, έτσι ώστε $z + (-z) = \mathbf{0}$.
- M5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, για κάθε z_1, z_2 στο $\mathbb{C}$.
- M6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.
- M7. Υπάρχει ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός $\mathbf{1} = (1,0)$, έτσι ώστε $z \cdot \mathbf{1} = z$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$.
- M8. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός z^{-1} έτσι ώστε $z \cdot z^{-1} = \mathbf{1}$.
- M9. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, για κάθε z_1, z_2, z_3 στο $\mathbb{C}$.

Απόρροια των πράξεων (8) και (9) είναι ότι

$$(x,y) = (x,0) + (0,y)$$
$$(0,1)(y,0) = (0,y)$$

έτσι κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0). \tag{15}$$

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, σημείο της ευθείας, μπορεί να ταυτοποιηθεί με το $(x,0)$, σημείο του επιπέδου. Επιπλέον παρατηρούμε ότι

$$(x_1,0) + (x_2,0) = (x_1 + x_2, 0), \qquad (x_1,0)(x_2,0) = (x_1 x_2, 0),$$

δηλαδή το σώμα των μιγαδικών αριθμών επεκτείνει κατά φυσιολογικό τρόπο το σώμα των πραγματικών αριθμών, και υπό το πρίσμα της ταυτοποίησης $x \equiv (x,0)$ μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Στη συνέχεια θα γράφουμε 0 αντί για **0** και 1 αντί για **1**. Θέτοντας $i = (0,1)$ σύμφωνα με την παραπάνω ταυτοποίηση η (15) γράφεται

$$(x,y) = x + iy. \tag{16}$$

Ο μιγαδικός αριθμός i λέγεται *φανταστική μονάδα* (imaginary unit) για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω. Εάν $z = (x, y)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός από εδώ και στο εξής θα γράφουμε $z = x + iy$. Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι μιγαδικοί αριθμοί τότε το άθροισμα $z_1 + z_2$ και το γινόμενο $z_1 z_2$ δίνονται, μέσω των (8) και (9), από τις σχέσεις

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{17}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{18}$$

Όπως και στους πραγματικούς αριθμούς, επαγωγικά ορίζουμε $z^{n+1} = z^n z$, για κάθε φυσικό αριθμό n. Παρατηρούμε ότι

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1,$$

σύμφωνα με την ταυτοποίηση, γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία φανταστική μονάδα. Επειδή $-i = (0,-1)$ θα είναι

$$(-i)^2 = (0,-1)(0,-1) = (-1,0) = -1.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι $i^2 + 1 = 0$ και $(-i)^2 + 1 = 0$.

Παρατήρηση

Ας θεωρήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$. Από τον αντιμεταθετικό νόμο (νόμος M5) έχουμε $iy = yi$ οπότε ο μπορούμε να γράφουμε

$$z = x + iy, \qquad \text{ή} \qquad z = x + yi.$$

Επίσης από την μοναδικότητα του αντίθετου μιγαδικού αριθμού έπεται ότι

$$i(-y) = (-1)iy = -iy.$$

Έτσι από τις (16), (11) και (14) έπεται ότι οι $-z$ και z^{-1}, εφόσον $z \neq 0$, δίνονται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$-z = -x + i(-y) = -x - iy \tag{19}$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \tag{20}$$

Παρατήρηση

Έστω $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, τότε κάνοντας χρήση του νόμου M9 (επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&= x_1(x_2 + iy_2) + iy_1(x_2 + iy_2) && \text{(νόμος M9)} \\
&= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 && \text{(νόμος M9)} \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 && \text{(νόμος M5)} \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 && (i^2 = -1) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) && \text{(νόμος M9)}
\end{aligned}$$

που είναι η (18). Ο πολλαπλασιασμός δηλαδή, μιγαδικών αριθμών μπορεί να εκτελεσθεί με χρήση της οικείας, από τους πραγματικούς αριθμούς, επιμεριστικής ιδιότητας.

Παρατήρηση

Εάν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπως στους πραγματικούς αριθμούς, η αφαίρεση και το πηλίκο ορίζονται, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 + iy_1) + (-x_2 + i(-y_2)) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{21}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = (x_1 + iy_1)\left(\frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{22}$$

Παρατηρούμε ότι για $z_1 = 1 = 1 + i0$ και $z_2 = z = x + iy$ από την τελευταία σχέση έπεται

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = z^{-1}. \tag{23}$$

Επακόλουθο της τελευταίας αυτής σχέσης είναι η

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{1}{z_2}. \tag{24}$$

• Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$, τότε $x \in \mathbb{R}$ και $y \in \mathbb{R}$. O x λέγεται *πραγματικό μέρος* (real part) του z και γράφουμε $x = \operatorname{Re} z$, και ο y λέγεται *φανταστικό μέρος* (imaginary part) του z και γράφουμε $y = \operatorname{Im} z$. Έτσι εάν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\operatorname{Re} z = z$ και $\operatorname{Im} z = 0$, ενώ εάν $z = iy$, με $y \in \mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re} z = 0$ και $\operatorname{Im} z = -iz$.

• Οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι *ίσοι* και γράφουμε $z_1 = z_2$, εάν και μόνον εάν $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$, ισοδύναμα $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ και $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

• Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ αποτελεί μία φυσιολογική επέκταση των πραγματικών αριθμών, όπου στο σύστημα αυτό η εξίσωση $z^2 + 1 = 0$ έχει λύση.

• Παρατήρηση. Δεν υπάρχει στο $\mathbb{C}$ μία διάταξη που να είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και να επεκτείνει τη γνωστή διάταξη του $\mathbb{R}$. Πράγματι αν υποθέσουμε ότι μία τέτοια υπάρχει και αν τη συμβολίσουμε με '$\leq$', τότε θα πρέπει να ισχύει $0 \leq 1$, όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Επίσης ένα από τα δύο είναι αληθές: είτε $0 \leq i$, είτε $0 \geq i$. Εάν $0 \leq i$, τότε πολλαπλασιάζοντας με i παίρνουμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι άτοπο. Όμοια εάν $0 \geq i$ τότε πολλαπλασιάζοντας πάλι με i θα είχαμε $0i \leq i^2$, ή ισοδύναμα $0 \leq -1$, ή ισοδύναμα $0 \geq 1$ που είναι επίσης άτοπο.