ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διάλεξη 1

Οι πραγματικοί αριθμοί
Το καρτεσιανό επίπεδο

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

12 & 14 Οκτωβρίου 2021

Διδάσκων:

Ευάγγελος Στεφανόπουλος

Ώρες Γραφείου:

Πέμπτη 10:00-12:00, ή κατόπιν συνεννόησης.

Σύνδεσμος eclass:

`https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1133/`

Συγγράμματα:

- Βιβλίο (77107082): **Thomas Απειροστικός Λογισμός**, (George B. Thomas Jr.), Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D. Weir, (μετάφραση) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Βιβλίο (77109719): **Απειροστικός λογισμός**, Briggs William, Cochran Lyle, Gillett Bernard (μετάφραση), Εκδόσεις Κριτική.

Οι **φυσικοί** αριθμοί είναι οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε για να μετράμε.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Οι **ακέραιοι** αριθμοί είναι όλοι οι φυσικοί, το μηδέν, καθώς και οι αρνητικοί των φυσικών αριθμών, έτσι ώστε εάν m είναι ακέραιος, η εξίσωση $m + n = 0$ έχει λύση στους ακεραίους, γεγονός που δεν συμβαίνει στους φυσικούς.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Οι **ρητοί** αριθμοί είναι όλα τα κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακεραίους αριθμούς, όπου βέβαια ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Οι ρητοί αριθμοί περιέχουν τους ακεραίους μιας και εάν ο n είναι ακέραιος, τότε $n = n/1$, οπότε ο n είναι ρητός. Επιπλέον εάν $r \neq 0$ είναι ρητός η εξίσωση $rs = 1$ έχει λύση στους ρητούς, γεγονός που δεν συμβαίνει στους ακεραίους. Γράφουμε

$$\mathbb{Q} = \{m/n : \text{ο } m \text{ είναι ακέραιος και ο } n \text{ φυσικός}\}$$

Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί λέγονται **άρρητοι**. Ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς να είναι

$$\mathbb{R} = \{x : \text{ο } x \text{ είναι είτε ρητός, είτε άρρητος}\}.$$

Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε δύο πράξεις, την πρόσθεση ``+'' και τον πολλαπλασιασμό ``·'' ώστε αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $x + y \in \mathbb{R}$ και $x \cdot y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι νόμοι

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $0 \in \mathbb{R}$ που λέγεται **μηδέν** ώστε $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $x' \in \mathbb{R}$, ώστε $x + x' = 0$. Ο πραγματικός αριθμός x' λέγεται ο **αντίθετος** του x και συμβολίζεται με $-x$.
5. $x \cdot y = y \cdot x$.
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
7. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $1 \in \mathbb{R}$ που λέγεται **ένα** ώστε $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
8. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει μοναδικός $x'' \in \mathbb{R}$, ώστε $x \cdot x'' = 1$. Ο πραγματικός αριθμός x'' λέγεται ο **αντίστροφος** του x και συμβολίζεται με x^{-1}, ή $1/x$.
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Παρατήρηση

Εάν x και y, είναι πραγματικοί αριθμοί ο πραγματικός αριθμός $x+y$ λέγεται **άθροισμα** των x και y, ενώ ο $x \cdot y$ λέγεται **γινόμενο** των x και y. Συνήθως το γινόμενο γράφεται xy. Ορίζουμε τη πράξη της **αφαίρεσης** με τη σχέση

$$y - x = y + (-x).$$

Παρόμοια εάν x και y, είναι πραγματικοί αριθμοί και $x \neq 0$ ορίζουμε το **πηλίκο** του y δια x με τη σχέση

$$\frac{y}{x} = yx^{-1} = y\frac{1}{x}.$$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται μία σχέση η **διάταξη** ``$\leq$'' τέτοια ώστε

10. Εάν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$.
11. $x \leq y$ και $y \leq x$ εάν και μόνον εάν $x = y$.
12. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ή $x \leq y$ ή $y \leq x$.
13. Εάν $x \leq y$ τότε $x + z \leq y + z$ για κάθε πραγματικό αριθμό z.
14. Εάν $0 \leq x$ και $0 \leq y$ τότε $0 \leq x \cdot y$.

Παρατήρηση

Εάν $x \leq y$ γράφουμε $y \geq x$. Επίσης εάν $x \leq y$ και $y - x \neq 0$ γράφουμε $x < y$, ή $y > x$. Ένας αριθμός x λέγεται **θετικός** εάν $x > 0$ και **αρνητικός** εάν $x < 0$.

Ορισμός

Αν $S \subset \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \leq x$, το σύνολο S λέγεται **άνω φραγμένο** και το x λέγεται ένα **άνω φράγμα** του S. Εάν $s \in \mathbb{R}$ είναι ένα άνω φράγμα του S τέτοιο ώστε $s \leq x$ για κάθε άνω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα** ή supremum του S και συμβολίζεται με $\sup S$.

15. Εάν S είναι ένα άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του S.

Παράδειγμα

$$\sup\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = ;$$

Παρατήρηση

Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $\oplus$ και $\odot$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες/αξιώματα 1–9 με $\oplus$ στη θέση του $+$ και $\odot$ στη θέση του $\cdot$, τότε η τριάδα $(A, \oplus, \odot)$ λέγεται **σώμα**. Άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τις γνωστές πράξεις αποτελούν σώμα. Ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 10–14 λέγεται **διατεταγμένο σώμα**, ενώ εάν επιπλέον ικανοποιεί και το αξίωμα 15 λέγεται **πλήρως διατεταγμένο σώμα**, άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τη γνωστή διάταξη αποτελούν ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Αποδεικνύεται ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι κατά κάποιο τρόπο μοναδικό, με την έννοια ότι κάθε σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15 είναι ταυτόσημο με το $\mathbb{R}$, **ίσομορφο** με το $\mathbb{R}$ στη γλώσσα της άλγεβρας.

Αυτό σημαίνει (θεωρώντας ότι γνωρίζουμε τα βασικά για συναρτήσεις) ότι εάν $(A, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ είναι ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15, είναι δηλαδή ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ένα προς ένα και επί τέτοια ώστε εάν x και y είναι στοιχεία του A, τότε

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \odot y) = f(x)f(y), \qquad x \preccurlyeq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

Θεώρημα

Εάν $x < y$ τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός z τέτοιος ώστε $x < z$ και $z < y$.

Εάν $x < z$ και $z < y$ γράφουμε $x < z < y$. Το Θεώρημα εκφράζει την **πυκνότητα** των πραγματικών αριθμών.
Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, τότε με τα **διαστήματα**

$$(a,b), \qquad [a,b), \qquad (a,b], \qquad [a,b]$$

συμβολίζουμε αντίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x με

$$a < x < b, \qquad a \leq x < b, \qquad a < x \leq b, \qquad a \leq x \leq b.$$

Θεωρώντας τα σύμβολα $-\infty$ και $+\infty$, αντίστοιχα, **μείον άπειρο** και **συν άπειρο**, ώστε $-\infty < x < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$, μπορούμε να γράφουμε $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Έτσι εάν $a \in \mathbb{R}$ με τα ημιάπειρα διαστήματα

$$(-\infty, a), \qquad (-\infty, a], \qquad (a, +\infty), \qquad [a, +\infty)$$

συμβολίζουμε ανίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x με

$$x < a, \qquad x \leq a, \qquad x > a, \qquad x \geq a.$$

Παράδειγμα

Εάν $S=(1,2)$, τότε το 2 καθώς και κάθε πραγματικός αριθμός $x \geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S. Όμοια εάν $S=(1,2]$, τότε κάθε $x \geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S. Παρατηρούμε ότι εάν $S=(1,2)$, τότε $\sup S = 2$ και $\sup S \notin S$, ενώ αν $S=(1,2]$, τότε $\sup S = 2$ και $\sup S \in S$, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα συνόλου μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο. Παρατηρούμε ότι το $\sup(1,+\infty)$ δεν υπάρχει (γιατί;).

Άσκηση

Να βρεθεί το supremum του συνόλου

$$A=\left\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$0<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\cdots<1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}<\cdots<1$$

• Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ λέγεται **κάτω φραγμένο** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \geq x$. Το x λέγεται ένα **κάτω φράγμα** του S. Εάν s είναι ένα κάτω φράγμα ώστε $s \geq x$ για κάθε κάτω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα** ή infimum του S και συμβολίζεται με $\inf S$.

Θεώρημα

Κάθε κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Άσκηση

Εάν $S \subset \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $-S = \{-x : x \in S\}$, δηλαδή $-[1,2) = (-2,-1]$. Να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί:

(α') Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι κάτω φραγμένο.

(β') Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι άνω φραγμένο. **Υπόδειξη**: $-(-S) = S$.

(γ') $\sup S = -\inf(-S)$ και $\inf S = -\sup(-S)$.

Θεώρημα (Ύπαρξη του ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού)

Εάν $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος m_x ώστε $m_x \leq x < m_x + 1$.

Ορισμός

Εάν $x \in \mathbb{R}$, ο μοναδικός ακέραιος, την ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζει το προηγούμενο Θεώρημα, λέγεται **ακέραιο μέρος** του x και συμβολίζεται με $[x]$, έτσι $[x] \in \mathbb{Z}$ και $[x] \leq x < [x] + 1$.

Για παράδειγμα $[0.75] = 0$, $[3] = 3$, $[-1.3] = -2$. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $x - 1 < [x] \leq x$.

Θεώρημα (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς)

Εάν x και y είναι άρρητοι αριθμοί με $x < y$, τότε υπάρχει ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε $x < r < y$.

- Εάν ο n είναι φυσικός αριθμός και ο x είναι πραγματικός αριθμός γράφουμε

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n} = (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n})x$$

και ορίζουμε

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}.$$

Συμφωνούμε ότι για $x \neq 0$ να γράφουμε $x^0 = 1$.

Ορισμός

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** του x με τη σχέση

$$|x| = \begin{cases} x & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι η ανισότητα

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Θεώρημα (Ιδιότητες της απόλυτης τιμής)

Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της απόλυτης τιμής:

1. $|x| \geq 0$ *και* $|x| = 0$, *εάν και μόνον εάν* $x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x/y| = |x|/|y|, \quad y \neq 0$
4. $|x| = |-x|$
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *Η ανισότητα αυτή είναι η* ***τριγωνική ανισότητα***
6. $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Ορισμός

Εάν $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **τετραγωνική ρίζα** του x, $\sqrt{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^2 = x$, δηλαδή

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x.$$

Ειδικά

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Γενικότερα αν n είναι **άρτιος** φυσικός αριθμός και $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^n = x$, δηλαδή

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x. \tag{1}$$

Αν n είναι **περιττός** φυσικός αριθμός και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο πραγματικός αριθμός y που ικανοποιεί την (1). Για τη n-οστή ρίζα του $x \in \mathbb{R}$, γράφουμε επίσης

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Δυνάμεις

Αν $x \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

Αν $x \geq 0$ (ή $x > 0$ όταν χρειάζεται) και $r = m/n \in \mathbb{Q}$ με $n > 0$ ορίζουμε

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

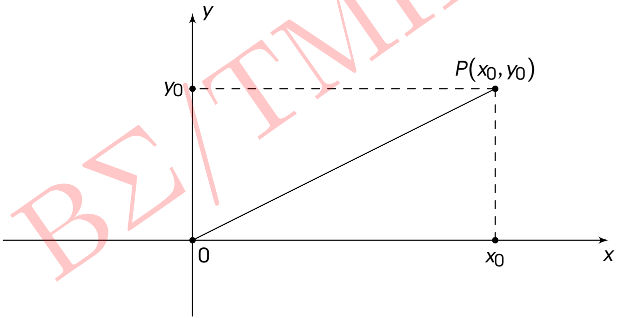
ώστε $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$. Έτσι αν r και s είναι ρητοί αριθμοί και $x \geq 0$, $y \geq 0$, (ή αυστηρά θετικοί όπου χρειάζεται) είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

- Δ1. $x^{r+s} = x^r x^s$
- Δ2. $x^{r-s} = \dfrac{x^r}{x^s}$
- Δ3. $(x^r)^s = x^{rs}$
- Δ4. $(xy)^r = x^r y^r$
- Δ5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$.

Με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{R}^2$ το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με ένα **ορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0,0)$ θα το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**, ή **πραγματικό επίπεδο** ή διδιάστατο πραγματικό χώρο.



Σχήμα: Το καρτεσιανό επίπεδο.

Τον οριζόντιο άξονα τον λέμε συνήθως x-άξονα και τον κατακόρυφο y-άξονα. Κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί σε μοναδικό ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου. Γράφουμε $P(x_0, y_0)$ για να δηλώσουμε αυτή την ένα προς ένα αντιστοιχία. Το σημείο x_0 στον x-άξονα το λέμε x **συντεταγμένη** του σημείου P, και το y_0 στον y-άξονα το λέμε y **συντεταγμένη** του P.

Όμοια το καρτεσιανό γινόμενο

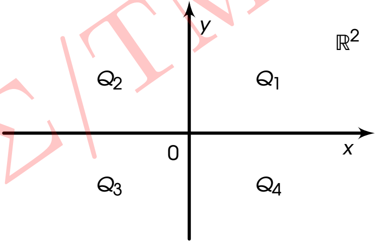
$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιασμένο με ένα **τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με τρεις ευθείες ανά δύο κάθετες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0,0,0)$ θα το λέμε **τριδιάστατο πραγματικό χώρο**. Κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί σε μοναδική τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του χώρου. Γενικότερα για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τον n-διάστατο πραγματικό χώρο

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Το ορθογώνιο σύστημα αξόνων χωρίζει το καρτεσιανό επίπεδο σε τέσσερα ξένα μεταξύ τους σύνολα τα οποία λέμε πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο (quadrants). Αυτά είναι αντίστοιχα τα

$$Q_1 = \{(x,y) : x > 0 \text{ και } y > 0\}, \qquad Q_2 = \{(x,y) : x < 0 \text{ και } y > 0\},$$
$$Q_3 = \{(x,y) : x < 0 \text{ και } y < 0\}, \qquad Q_4 = \{(x,y) : x > 0 \text{ και } y < 0\}.$$

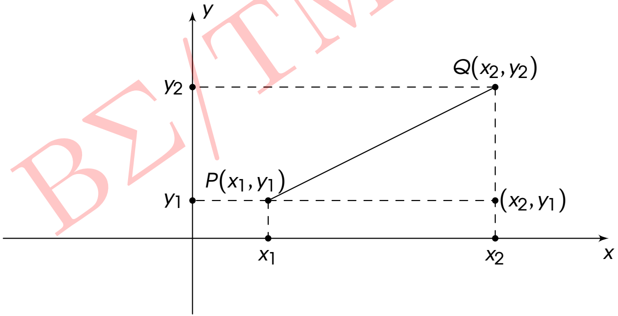


Απόσταση στο επίπεδο

- $P = (x_1, y_1)$ και $Q = (x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου
- Αν $d(P, Q)$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q

τότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_2, y_1) προκύπτει ότι

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Εξίσωση του κύκλου

Αν το (x,y) είναι σημείο του κύκλου κέντρου (a,b) και ακτίνας $r \geq 0$, τότε

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{2}$$

Έτσι η (2) είναι η **εξίσωση του κύκλου** με κέντρο το (a,b) και ακτίνα r. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

γράφεται

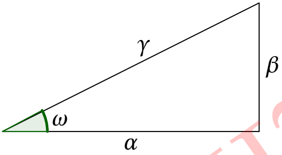
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

κατά συνέπεια η εξίσωση παριστάνει κύκλο κέντρου $(1,-1)$ και ακτίνας 2.

Άσκηση

Η **έλλειψη** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, τις **εστίες** της έλλειψης, είναι σταθερό. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στα σημεία $(-c,0)$ και $(c,0)$ και άθροισμα αποστάσεων ίσο με $2a$, όπου $a > c > 0$.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε ορθογώνιο τρίγωνο



$$\sin\omega = \frac{\beta}{\gamma} \qquad \cos\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\tan\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \qquad \cot\omega = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

$$\sec\omega = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\cos\omega} \qquad \csc\omega = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{\sin\omega}$$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας είναι

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1, \quad \tan\omega = \frac{1}{\cot\omega}, \quad \sec^2\omega - \tan^2\omega = 1, \quad \csc^2\omega - \cot^2\omega = 1.$$

Μήκος περιφέρειας και εμβαδόν δίσκου

$C(O,r)$: κύκλος κέντρου O και ακτίνας r
$D(O,r)$: η περιοχή που περικλείει ο κύκλος $C(O,r)$ την οποία θα λέμε **δίσκο** κέντρου O και ακτίνας r. Γράφουμε επίσης C_r για τον κύκλο και D_r για το δίσκο.
Πρόβλημα 1: Τι μπορούμε να ορίσουμε σαν μήκος της περιφέρειας του κύκλου και πόσο είναι αυτό;
Πρόβλημα 2: Με τί ισούται το εμβαδόν του δίσκου;

Θεώρημα (Εύδοξος (408-355 π.Χ.))

Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου είναι ίδιος για όλες τις ακτίνες.

Ορισμός

Αν $L(C_r)$ είναι το μήκος της περιφέρειάς του κύκλου C_r, ορίζουμε

$$\frac{L(C_r)}{2r} = \pi.$$

Ιστορία: Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν για τον αριθμό π από τον 5ο π.Χ. αιώνα. Ο Ιπποκράτης ο Χίος φαίνεται ότι γνώριζε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Ευδόξου από το 430 π.Χ. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) απέδειξε ότι $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$, οπότε $\pi \approx 3.14\dots$. Το 1761 ο Lambert απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι άρρητος. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι ο π είναι **υπερβατικός**, δεν προκύπτει δηλαδή σαν λύση κάποιας αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Συνεπώς δεν μπορεί να βρεθεί η θέση του π (να κατασκευαστεί) με χάρακα και διαβήτη επάνω στην πραγματική ευθεία, κατά συνέπεια το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με χάρακα και διαβήτη είναι αδύνατο.

Έτσι το μήκος της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r είναι

$$L(C_r) = 2\pi r \tag{3}$$

και το εμβαδόν δίσκου ακτίνας r αποδεικνύεται ότι είναι

$$A(D_r) = \frac{1}{2}L(C_r)r = \pi r^2. \tag{4}$$

Ειδικά

$$L(C_1) = 2\pi, \qquad A(D_1) = \pi.$$

Μια γωνία με κορυφή στο κέντρο ενός κύκλου αποκόπτει ένα τόξο της περιφέρειας. Είναι λογικό να θελήσουμε να μετρήσουμε τη γωνία μετρώντας το αντίστοιχο τόξο. Όμως το ``μήκος του τόξου'' εξαρτάται από την ακτίνα του κύκλου. Ξεπερνάμε τη δυσκολία με δύο τρόπους.

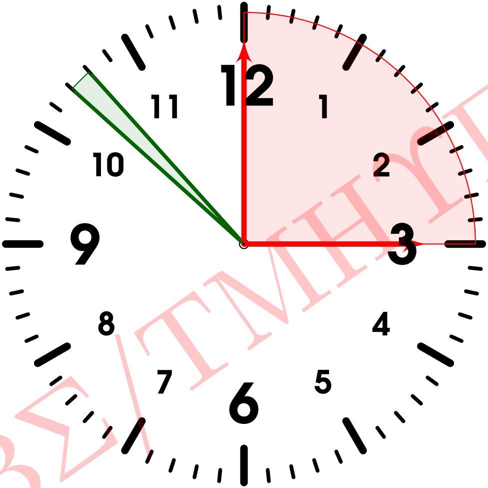
Πρώτος τρόπος: Διαιρώντας την περιφέρεια σε 360 ισομήκη τόξα ορίζουμε σαν μια μονάδα μέτρησης γωνιών την **μοίρα** (degree) να είναι ίση με ένα από αυτά τα τόξα. Αντί για 1 μοίρα γράφουμε 1°, έτσι $1^\circ = 1/360$ της περιφέρειας, οπότε η περιφέρεια αντιστοιχεί σε γωνία 360°. Η μονάδα αυτή είναι ανεξάρτητη της ακτίνας του κύκλου, για παράδειγμα η γωνία 90° αντιστοιχεί στο $1/4$ της περιφέρειας, αφού 90=360/4, κατά συνέπεια η γωνία 90° είναι ορθή.

Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε ένα κύκλο ακτίνας 1 και ορίζουμε τη μονάδα **ακτίνιο** (radian) να είναι εκείνο το μήκος τόξου ώστε το μήκος της περιφέρειας του (μοναδιαίου) κύκλου να είναι 2π ακτίνια, επομένως

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795...^\circ$$

Έτσι

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}, \qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \qquad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \qquad \cdots$$

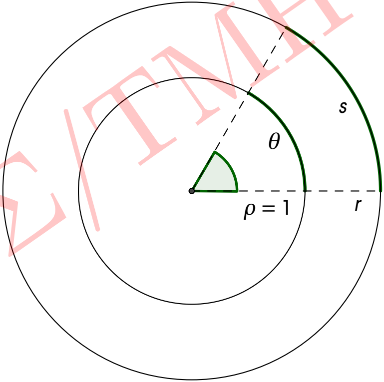


Σχήμα: Η πράσινη γωνία είναι $360^\circ/60 = 6^\circ$, ή $2\pi/60 = \pi/30$ ακτίνια, και η κόκκινη είναι $360^\circ/4 = 90^\circ$, ή $2\pi/4 = \pi/2$ ακτίνια

Απόρροια του ορισμού του ακτινίου είναι ότι αν s είναι το μήκος ενός τόξου κύκλου ακτίνας $\rho = r$ και θ είναι το μέτρο σε ακτίνια της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί στο τόξο, τότε

$$s = \theta r.$$

Το γεγονός αυτό συμφωνεί με το γνωστό αποτέλεσμα ότι το μήκος της περιφέρειας ακτίνας r είναι ίσο με $2\pi r$.



Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Θυμίζουμε ότι μια γωνία με κορυφή στο κέντρο ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη γωνία**. Θυμίζουμε επίσης ότι το τμήμα ενός δίσκου το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών μιας επίκεντρης γωνίας και της περιφέρειας λέγεται **κυκλικός τομέας**. Αν στον κύκλο $C(O,r)$ θεωρήσουμε τον κυκλικό τομέα AOB, τότε σε αναλογία με την (3) ($L=2\pi r$) το μήκος s του τόξου AB είναι

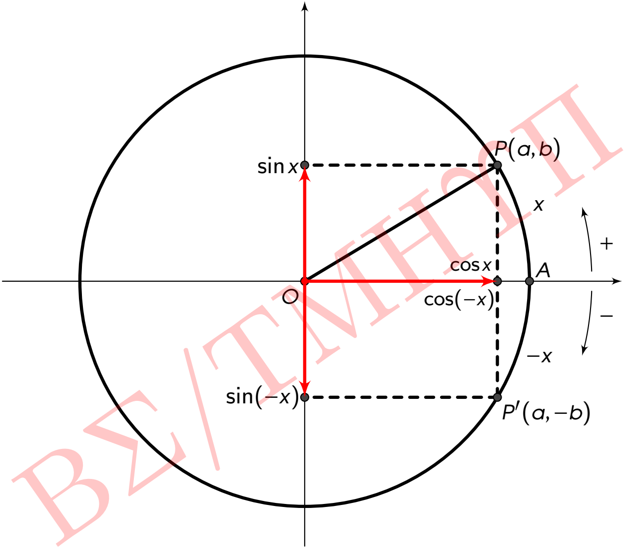
$$s=\theta r$$

όπου θ είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας σε ακτίνια. Επίσης σε αναλογία της (4) ($A=Lr/2$) το εμβαδόν του κυκλικού τομέα AOB θα είναι

$$A=\frac{1}{2}sr=\frac{1}{2}\theta r^2 \tag{5}$$

όπου s είναι το μήκος του τόξου AB, και $0\leq\theta\leq 2\pi$. Το θ είναι το μήκος του τόξου στη μοναδιαία περιφέρεια το οποίο αποκόπτει η επίκεντρη γωνία.

Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων κάθετων μεταξύ τους, έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο, και έναν κύκλο ακτίνας 1 με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια ορίζουμε προσανατολισμό στον κύκλο. Θεωρούμε σαν αρχή μέτρησης το σημείο $(1,0)$ της περιφέρειας, το σημείο A στο Σχήμα. Ορίζουμε σαν **θετική φορά** διαγραφής εκείνη κατά την οποία η κίνηση γίνεται αντίθετα από αυτήν των δεικτών του ρολογιού, και **αρνητική φορά** την αντίθετη, δηλαδή εκείνη κατά την οποία η κίνηση ακολουθεί αυτήν των δεικτών. Τον προσανατολισμένο μοναδιαίο κύκλο ονομάζουμε **τριγωνομετρικό κύκλο**.



Σχήμα: Ο τριγωνομετρικός κύκλος Ι

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός ώστε $-\pi \leq x \leq \pi$. Έστω P το σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο έτσι ώστε το τόξο AP να είναι ίσο με x rad. Εννοείται ότι αν $x < 0$, τότε το τόξο AP έχει μήκος $|x|$ και η μετάβαση από το A στο P γίνεται κατά την αρνητική φορά. Αν (a, b) είναι οι συντεταγμένες του σημείου P ορίζουμε

$$\cos x = a \qquad \text{και} \qquad \sin x = b.$$

Σημειώνουμε ότι αν $x = \pi$ ή $x = -\pi$, τότε $P = (-1, 0)$. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x. \tag{6}$$

Επεκτείνοντας τον ορισμό για $-\pi \leq x \leq \pi$ και $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \text{και} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

Έτσι ορίζουμε πρακτικά τις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $\cos x$ και $\sin x$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Παρατηρούμε ότι

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \qquad \text{και} \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \tag{7}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις σχέσεις

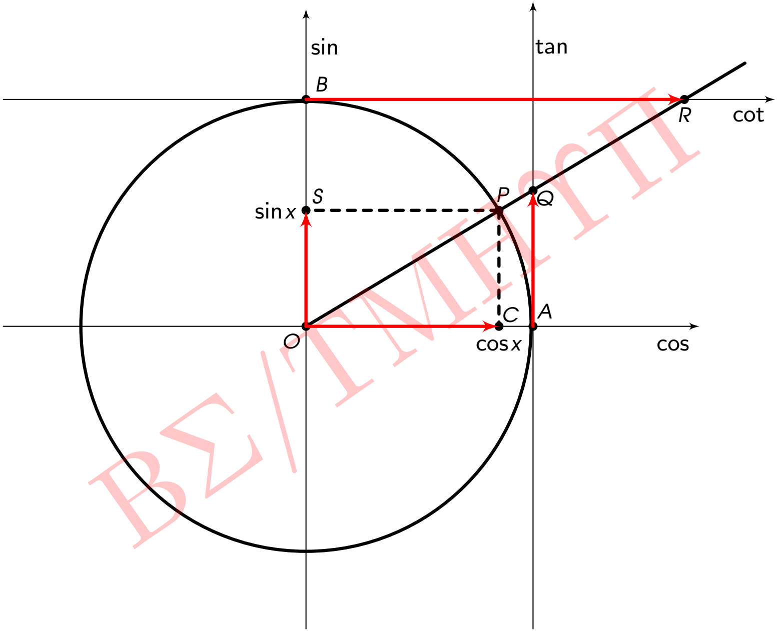
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Οι κλασματικές αυτές συναρτήσεις ορίζονται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τις διακριτές τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής. Συγκεκριμένα, επειδή

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \text{και} \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

έπεται ότι τα πεδία ορισμού αυτών των συναρτήσεων είναι

$$D(\tan) = D(\sec) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$D(\cot) = D(\csc) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$


sin
tan
B
R
cot
S
P
Q
sin x
C
A
O
cos x
cos

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
5. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.
6. $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.
7. $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$.

΄Ασκηση

Για $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι

(α΄) $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$.

(β΄) $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$.

(γ΄) $\sin(\pi \pm x) = \pm \sin x$.

(δ΄) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$.

Έστω $0 < x < \pi/2$ και έστω P το σημείο στον τριγωνομετρικό κύκλο ώστε το μήκος του τόξου AP να είναι x. Η ημιευθεία από το κέντρο O του κύκλου δια του P τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων στο Q, βλέπε Σχήμα. Αν C είναι η προβολή του P στον οριζόντιο άξονα, τότε

$$\text{Εμβαδόν τριγώνου } POC \leq \text{Εμβαδόν τομέα } POA \leq \text{Εμβαδόν τριγώνου } QOA$$

$$\frac{1}{2}(\cos x)(\sin x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x$$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Επειδή

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

και η $\cos x$ είναι άρτια συνάρτηση έπεται ότι

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \tag{8}$$

Αν στο Σχήμα θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα PA, τότε αφενός $PC < AP$, αφού η AP είναι η υποτείνουσα στο τρίγωνο PCA, και αφετέρου $AP <$ τόξο AP (γιατί;) έτσι ισχύει η ανισότητα

$$0 < \sin x < x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

επιπλέον από την απόδειξη της (8)

$$0 < \sin x < x \leq \tan x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

οπότε και

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Άμεση συνέπεια της (9) είναι η

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$