Mathematics I

Lecture 0
Complex Numbers

Dr Athanasios Andrikopoulos
aandriko@ceid.upatras.gr

John Gounaridis
igounaridis@upatras.gr

University of Patras, Dept. Computer Engineering and Informatics

November 2, 2020

Table of contents I

Table of contents II

Μιγαδικοί αριθμοί

Θεωρούμε την εξίσωση $\mathbf{x^2 + 1 = 0}$
Αυτό μπορεί να γραφτεί ως $\mathbf{x^2 = -1}$ or $\mathbf{x} = \pm\sqrt{-1}$

Γι' αυτό

Ορισμός

Κάθε αριθμός z που μπορεί να γραφτεί με τη μορφή $\mathbf{z = a + bi}$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{i^2 = -1}$ και $z \in \mathbb{C}$, ονομάζεται μιγαδικός αριθμός

Γνωρίζουμε ότι

$$i^3 = i^2 i = -1(i) = -i \qquad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$$
$$i^5 = (i^2)^2 i = 1(i) = i \qquad i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$$
$$i^7 = (i^2)^3 (i) = -i \qquad i^8 = (i^2)^4 = 1$$

Γι'αυτό, παρατηρούμε ότι όλες οι μεγαλύτερες δυνάμεις του i μπορούν να εκφραστούν με τη μορφή μιας έως τεσσάρων τιμών $i, -1, -i, 1$. Εάν n θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $n > 4$,τότε για να βρούμε το i^n, διαιρούμε αρχικά το n με 4.

Έστω m το πηλίκο και r το υπόλοιπο.
Τότε $\quad n = 4m + r$ όπου $0 \leq r < 4$
Γι' αυτό, $i^n = i^{(4m+r)} = i^{4m} i^r = (i^4)^m i^r = i^r$ αν και $i^4 = 1$

Απόλυτη τιμή

Μια εναλλακτική επιλογή για τις συντεταγμένες στο σύστημα συντεταγμένων είναι το **πολικό σύστημα συντεταγμένων** που χρησιμοποιεί την απόσταση του σημείου z του **origin** O, και την γωνία που περιέχεται ανάμεσα στον **θετικό άξονα των πραγματικών** και το ευθύγραμμο τμήμα Oz in a counterclockwise sense. Αυτό μας δίνει την πολική μορφή των σύνθετων αριθμών.

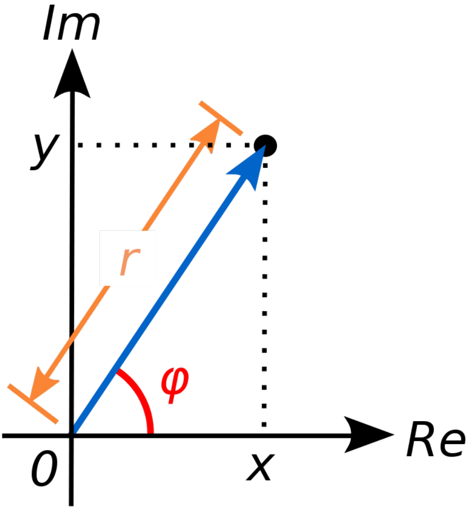
Ορισμός

Η **απόλυτη τιμή** (ή *m*odulus ή *m*agnitude) of ενός μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ είναι

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Εάν z είναι πραγματικός αριθμός (δηλαδή, εαν $y = 0$), τότε $r = |x|$. Αυτό σημαίνει ότι η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ισούται με την απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού.

Από το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**, η απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού είναι η απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων που αναπαριστά τον σύνθετο αριθμό στο **σύστημα συντεταγμένων**.



Modulus and argument I

Ορισμός

Το argument του z (σε πολλές εφαρμογές αναφέρεται ως φάση ϕ είναι η γωνία μεταξύ της ακτίνας Oz και του θετικού άξονα των πραγματικών, και γράφεται ωςarg$_($ z). Όσον αφορά το υπόλοιπο, το argument μπορούμε να το υπολογίσουμε από την τετραγωνική μορφή $x + yi$ εφαρμόζοντας την αντίστροφη εφαπτομένη στο πηλίκο των imaginary-by-real μελών. Με τη χρήση της half-angle ταυτότητας ενός μόνο branch της αντίστροφης εφαπτομένης αρκεί για να καλύψουμε το εύρος τηςarg -συνάρτησης, $(-\pi, \pi]$, και αποφεύγουμε την περίπτωση της ανάλυσης κατά περίπτωση .

Modulus and argument II

Το *arctan*(y/x), είναι η κλίση και το *arctan* μετατρέπει την κλίση σε γωνία θεωρώντας κλίση το y/x. Αυτό ισχύει μόνο όταν $x > 0$, οπότε ο λόγος αυτός ορίζεται και η γωνία βρίσκεται μεταξύ $-\pi/2$ και $\pi/2$. Ο ορισμός επεκτείνεται σε περιπτώσεις όπου το x δεν είναι θετικό. Συγκεκριμένα, μπορεί κανείς να ορίσει την κύρια τιμή του στα δύο ημιεπίπεδα $x > 0$ και $x < 0$ (χωρισμένα σε δύο τεταρτημόρια εάν κάποιος επιθυμεί μια περικοπή κλάδου στον αρνητικό $x-$ άξονα $y > 0, y < 0$).

$$\varphi = \arg(x+iy) = \arctan 2(y,\, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

Angle - Phase

Κανονικά επιλέγεται η principal value στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.Οι τιμές στο εύρος $(-0, 2\pi]$ προκύπτουν προσθέτοντας το 2π εαν η τιμή είναι αρνητική. Η τιμή φ εκγράζεται ως rad .Μπορεί να αυξηθεί από κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και να προκύπτει πάλι η ίδια γωνία, όπως περιορίζεται από τις ακτίνες του θετικού άξονα των πραγματικών και από την αρχή των αξόνων από το z. Ως εκ τούτου, η συνάρτηση arg μερικές φορές θεωρείται πολύτιμη . Η πολική γωνία για τον σύνθετο αριθμό 0 είναι αόριτστη, αλλά είναι συνηθισμένη η αυθαίρετη επιλογή της γωνίας 0.

Η τιμή της φ ισούται με το αποτέλεσμα arctan 2:

$$\varphi = \operatorname{arctan2}\left(\operatorname{Im}(z), \operatorname{Re}(z)\right).$$

Τριγωνομετρική μορφή I

Ορισμός

Οι r και φ δίνουν έναν άλλον τρόπο αναπαράστασης των σύνθετων αριθμών, την **πολική μορφή**, ως συνδυασμό του υπολοίπου και του για να καθορίσουν τη θέση ενός σημείου στο σύστημα συντεταγμένων. Η ανάκτηση των τετραγωνικών συντεταγμένων από την πολική μορφή γίνεται με τον τύπο που ονομάζεται τριγωνομετρική μορφή.

$$\mathbf{z} = \mathbf{r}(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi).$$

Με την χρήση του **τύπου του Euler** αυτό μπορεί να γραφτεί ως:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Τριγωνομετρική μορφή II

Με την χρήση της συνάρτησης **cis** ,παίρνουμε εν συντομία:

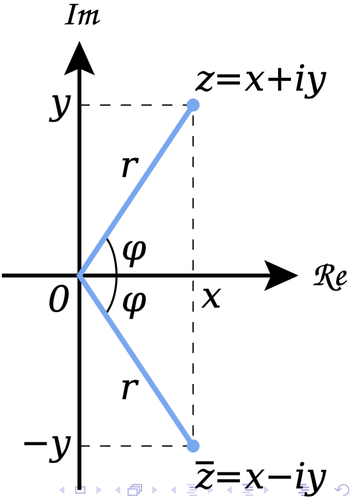
$$z = r \operatorname{cis} \varphi.$$

Σχετικά με την textcolorblueσημειολογία γωνιών, χρησιμοποιείται συχνά στον τομέα των *ηλεκτρονικών* για την αναπαράσταση του εύρους r και φάσης φ, με την μορφή:

$$z = r\angle\varphi.$$

Συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού

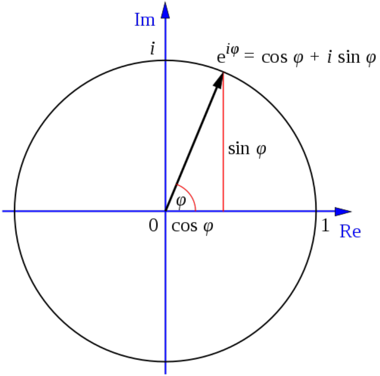
Εστω $z = x + yi$ ένας σύνθετος αριθμός. Έστω δυο κάθετες γραμμές xox' and yoy' στους άξονες $x - axis$ και $y - axis$ αντίστοιχα, με O την αρχή των αξόνων.
Συνεπώς,



Ο τύπος του Euler

Εάν θεωρήσουμε τον μη-μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ ως το σημείο (a, b) στο σύστημα αξόνων xy,γνωρίζουμε επίσης ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτό το σημείο από τις πολικές συντεταγμένες (r, φ), όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων και φ η γωνία σε ακτίνια, από τον άξονα των θετικών x έως την ακτίνα που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο αυτό . Συνεπώς,

$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\ \sin\varphi$$



Η σχέση με την τριγωνομετρία

Ο τύπος του Euler δίνει μια ισχυρή σχέση μεταξύ της **ανάλυσης** και της **τριγωνομετρίας**,και δίνει μια ερμηνεία των ημιτονοειδών και συνημιτονοειδ συναρτήσεων ως

$$\cos x = \mathrm{Re}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{1}$$

$$\sin x = \mathrm{Im}\left(e^{ix}\right) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{2}$$

Οι δυο αυτές εξισώσεις προκύπτουν προσθέτωντας η αφαιρώντας τους τύπους του Euler και λύνοντας είτε για ημίτονο ή συνημίτονο:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \tag{3}$$

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\sin(-x) = \cos x - i\sin x \tag{4}$$

Αυτοί οι τύποι μπορούν επίσης να φανούν χρήσιμοι και για τον ορισμό τριγωνομετρικών συναρτήσεων για σύνθετες μεταβλητέςx.Για παράδειγμα, για $x = iy$, παίρνουμε:

$$\cos(iy) = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh(y), \tag{5}$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right) = i\sinh(y). \tag{6}$$

Σύνθετοι εκθετικοί μπορούν να απλοποιήσουν την τριγωνομετρία ,επειδή είναι είναι πιο εύχρηστοι από τα ημιτονοειδή συστατικά τους.Μια τεχνική είναι η μετατροπή των ημιτονοειδών στις ισοδύναμες εκφράσεις με την μορφή εκθετικών. Έπειτα το απλοποιημένο αποτέλεσμα είναι η πραγματική τιμή.

Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
\cos x \cdot \cos y &= \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} && (7)\\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i(x+y)}+e^{i(x-y)}+e^{i(-x+y)}+e^{i(-x-y)}}{2} && (8)\\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}}{2}}_{\cos(x+y)} + \underbrace{\frac{e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}}{2}}_{\cos(x-y)}\right). && (9)
\end{aligned}$$

Μια άλλη τεχνική είναι η αναπαράσταση των ημιτονοειδών με τη μορφή της σύνθετης έκφρασης **πραγματικό μέρος** του a και μετατροπές πάνω στην σύνθετη έκφραση.

Για παράδειγμα:

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \mathrm{Re}\left(e^{inx}\right) && (10)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(n-1)x}\cdot e^{ix}\right) && (11)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(n-1)x}\cdot\left(\underbrace{e^{ix}+e^{-ix}}_{2\cos x}-e^{-ix}\right)\right) && (12)\\
&= \mathrm{Re}\left(e^{i(n-1)x}\cdot 2\cos x - e^{i(n-2)x}\right) && (13)\\
&= \cos[(n-1)x]\cdot[2\cos(x)] - \cos[(n-2)x]. && (14)
\end{aligned}$$

Αυτός ο τύπος χρησιμοποιείται για την ανδρομική δημιουργία του $\cos nx$ για ακέραιες τιμές του n και αυθαίρετο x (σε ακτίνια).

Τοπολογική ερμηνεία

Στην **τοπολογία**,σύμφωνα με τον τύπο του Euler η φανταστική εκθετική συνάρτηση $t \mapsto e^{it}$ είναι (surjective) **μορφισμός** του **τοπολογικές ομάδες** από την πραγματική ευθεία$\mathbb{R}$ στον κύκλο ένωσης $\mathbb{S}^1$. Στην πραγματικότητα, αυτό εκτίθεται $\mathbb{R}$ **ωςχώρος που καλύπτει** του $\mathbb{S}^1$. Ομοιώς, **η ταυτότητα του Euler** λέει οτι το **kernel** αυτής της μεταφοράς $\tau\mathbb{Z}$, όπου $\tau = 2\pi$. Αυτές οι παρατηρήσεις μπορούν να συνδυαστούν και να συνοψιστούν στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "e^{i-}"] \arrow[d] & \mathbb{S}^1 \\
\mathbb{R}/\tau\mathbb{Z} \arrow[ur, dashed, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Πρόσθεση και αφαίρεση

Δυο σύνθετοι αριθμοί a και b προστίθενταιεύκολα εαν προσθέσουμε χωριστά τα πραγματικά και φανταστικά τους μέρη . Δηλαδή:

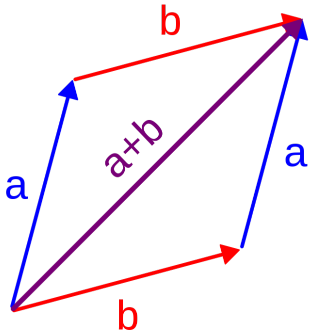
$$a + b = (x + yi) + (u + vi) = (x + u) + (y + v)i.$$

Ομοίως,πραγματοποιείται η αφαίρεση :

$$a - b = (x + yi) - (u + vi) = (x - u) + (y - v)i.$$

Εαν χρησιμοποιήσουμε οπτικοποίηση για τους μιγαδικούς αριθμούς στο σύστημα αξόνων,η πρόσθεση έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία : το άθροισμα δυο σύνθετων αριθμών a και b,εαν αναπαρασταθεί ως σημεία στο σύστημα αξόνων, είναι το σημείο που περιέχεται από το **παραλληλόγραμμο** από τις τρεις κάθετες O, και τα σημεία από τα βέλη με ετικέτα a και b (εφόσον δεν είναι στην ίδια ευθεία).

Έτσι, ονομάζουμε αυτά τα σημεία A, B αντίστοιχα και το τέταρτο σημείο του παραλληλογράμμου X τα τρίγωνα OAB και XBA είναι **συγκλίνοντα**. Για να οπτικοποιήσουμε την αφαίρεση προσθέτουμε τους αρνητικούς αφαιρετέους.



Πολλαπλασιασμός I

Εφόσον τοπραγματικό και το φανταστικό μέρος,και το indeterminate i σε ένα σύνθετο αριθμό θεωρούνται όλα αριθμοί, δυο σύνθετοι αριθμοί,

$$z = x + yi \qquad w = u + vi$$

πολλαπλασιάζονται με επιμεριστική ιδιότητα, οι αντιμεταθετική ιδιότητα και η ιδιότητα

$$i^2 = -1$$

Ως εξης:

Πολλαπλασιασμός II

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (x+yi)\cdot(u+vi) && \\
&= x(u+vi)+yi(u+vi) && \text{επιμεριστική ιδιότητα (δεξιά)}\\
&= xu+xvi+yiu+yivi && \text{επιμεριστική ιδιότητα (αριστερά)}\\
&= xu+yivi+xvi+yiu && \text{επιμεριστική ιδιότητα της πρόσθεσης}\\
&= xu+yvi^2+xvi+yui && \text{επιμεριστική ιδιότητα του πολ/σμού}\\
&= (xu+yvi^2)+(xvi+yui) && \text{προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης}\\
&= (xu-yv)+(xvi+yui) && \text{συνεταιριστική ιδιοκτησία του i}\\
&= (xu-yv)+(xv+yu)i && \text{επιμεριστική ιδιότητα.}
\end{aligned}$$

Αντιστροφή και διαίρεση

Με τη χρήση των συζυγών αριθμών ο αντίθετος ενός μη- μηδενικού μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$ μπορεί πάντα να γραφτεί ως

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i,$$

εφόσον"μη- μηδενικός" σημαίνει οτι$x^2 + y^2$ είναι μεγαλύτερος του μηδενός.

Αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε την έκφραση της διαίρεσης ενός αυθαίρετου μιγαδικού αριθμού $w = u + vi$ από ένα μη-μηδενικό σύνθετο αριθμό z ως

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = (u + vi) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i \right) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left((ux + vy) + (vx - uy)i \right).$$

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση σε πολική μορφή I

Η διαίρεση και η ύψωση σε δύναμη είναι πιο απλές στην πολική μορφή από τις αντίστοιχες στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Έστω δυο σύνθετοι αριθμοί $z_1 = r_1 \cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1$ και $z_2 = r_2 \cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2$.

Λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας:

$$\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) = \cos(a+b)$$

$$\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) = \sin(a+b)$$

Πολλαπλασιασμός και διαίρεση σε πολική μορφή II

Από τα παραπάνω μπορούμε να αντλήσουμε τα εξής:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Έτσι, οι απόλυτες τιμές πολλαπλασιάζονται και οι μεταβλητές προστίθενται για να αποδώσουν την πολική μορφή του αποτελέσματος. Για παράδειγμα, πολλαπλασιάζοντας με i που αντιστοιχεί με ένα quarter-turn counter-clockwise, το οποίο επιστρέφει $i^2 = 1$.

Πολλαπλασιασμός σε πολική μορφή

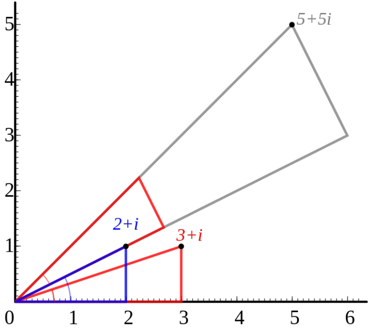
Η εικόνα στα δεξιά δείχνει τον πολλαπλασιασμό του

$$(2+i)(3+i) = 5+5i.$$

Από την στιγμή που το πραγματικό και φανταστικό μέρος του $5+5i$ είναι ίσα, η μεταβλητή αντιστοιχεί σε 45 μοίρες, ή $\frac{\pi}{4}$ (σε rad). Επίσης είναι και το άθροισμα των γωνιών στην αρχή των αξόνων (τα μπλε και κόκκινα τρίγωνα).

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3},$$

αντίστοιχα.



Διαίρεση σε πολική μορφή

Έστω ο τύπος

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

που περικλείει

Η arctan συνάρτηση, μπορεί να προσεγγιστεί πολύ αποδοτικά, τύποι σαν αυτόν –γνωστοί ως Machin-like formulas – χρησιμοποιούνται για υψηλής ακρίβειας προσεγγίσεις του π. Ομοίως η διαίρεση δίνεται από

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Τετραγωνική ρίζα

Οι τετραγωνικές ρίζες του $a + bi$ (με $b \neq 0$) είναι $\pm(\gamma + \delta i)$, όπου

$$\gamma = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \qquad \delta = \operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

όπου sgn είναι η signum συνάρτηση.Αυτό φαίνεται εαν υψώσουμε στο τετράγωνο $\pm(\gamma + \delta i)$ για να πάρουμε$a + bi$. Εδώ $\sqrt{a^2 + b^2}$ καλείται το υπόλοιπο του $a+bi$,και η τετραγωνική ρίζα sign δηλώνει την τετραγωνική ρίζα με μη-αρνητικό πραγματικό μέρος,και καλείται **principal square root; και** $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, **όπου** $z = a + bi$**.**

Ύψωση σε δύναμη I

Ο τύπος του Euler , δίνει για κάθε πραγματικό αριθμό x,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

, όπου e είναι η βάση του φυσικού λογαρίθμου.Αυτό αποδεικνύεται εαν παρατηρήσουμε

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1, & i^1 = i, & i^2 = -1, & i^3 = -i, \\ i^4 = 1, & i^5 = i, & i^6 = -1, & i^7 = -i, \end{array}$$

κλπ,και λαμβάνοντας υπ'όψιν τις σειρές Taylor επεκτάσεις του e^{ix}, $\cos x$ και $\sin x$:

Ύψωση σε δύναμη II

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\
&= \cos x + i \sin x\,.
\end{aligned}
$$

Όλες οι σειρές είναι absolutely convergent.

Φυσικός λογάριθμος I

Από τον τύπο του Eulerπροκύπτει οτι ,για κάθε σύνθετο αριθμό z γραμμένο σε πολική μορφή,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

όπου r είναι μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός,μια πιθαν΄λη τιμή για τον σύνθετο λογάριθμο του z είναι

$$\ln(z) = \ln(r) + \varphi i.$$

Επειδή το ημίτονο και το συνημίτονο είναι περιοδικές συναρτήσεις,μπορούν να προκύψουν και άλλες πιθανές τιμές.Για παράδειγμα, $e^{i\pi} = e^{3i\pi} = -1$, είναι και τα δυο $i\pi$ και $3i\pi$ δυο πιθανές τιμές για τον φυσικό λογάριθμο του -1.

Φυσικός λογάριθμος II

Για να διαχειριστούμε την ύπαρξη περισσότερων από μιας πιθανών τιμών για κάθε δοσμένη είσοδο,ο σύνθετος λογάριθμος μπορεί να θεωρηθεί πολύτιμη συνάρτηση με

$$\ln(z) = \{\ln(r) + (\varphi + 2\pi k)i \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Εναλλακτικά ένα branch cut μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει μονότιμη ”branch” του μιγαδικού αλγορίθμου.

Ακέραιοι και κλασματικοί εκθέτες I

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\ln(a^b) = b \ln a$$

για να καθορίσουμε την ύψωση σε δύναμη σύνθετων αριθμών, που με αυτόν τον τρόπο παίρνει πολλές τιμές:

$$\begin{aligned}
\ln(z^n) &= \ln((r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n) \\
&= n\ln(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) \\
&= \{n(\ln(r) + (\varphi + k2\pi)i) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{n\ln(r) + n\varphi i + nk2\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Ακέραιοι και κλασματικοί εκθέτες II

Όταν ο n είναι ακέραιος, αυτό απλοποιείται σε ο τύπος του Moivre:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Οι nth ρίζες του z δίνονται από

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

για κάθε ακέραιο k ικανοποιώντας την $0 \leq k \leq n-1$. Εδώ $\sqrt[n]{r}$ είναι η συνήθης(θετική) nth ρίζα του θετικού πραγματικού αριθμού r.Όσο η nth ρίζα ενός θετικού πραγματικού αριθμού r επιλέγεται να είναι θετικός πραγματικός αριθμός c ικανοποιώντας την $c^n = r$,δεν υπάρχει

Ακέραιοι και κλασματικοί εκθέτες III

φυσικός τρόπος να διαχωρίσουμε μια συγκεκριμένη σύνθετη ρίζα nth ενός μιγαδικού αριθμού.
Συνεπώς,η nth ρίζα του z θεωρείται πολύτιμη συνάρτηση (σε z), σε αντίθεση με μια συνηθισμένη συνάρτηση f, όπου $f(z)$ μοναδικά ορισμένος αριθμός. Τύποι όπως ο:

$$\sqrt[n]{z^n} = z$$

(για θετικούς πραγματικούς αριθμούς), δεν χρησιμοποιούνται για τους μιγαδικούς αριθμούς.