

Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 9

Παράγωγοι Συναρτήσεων (2η συνέχεια)

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

12 Δεκεμβρίου 2019

Ορισμός

- Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **απόλυτο μέγιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$. Ο αριθμός $f(x_0)$ λέγεται **μέγιστη τιμή** της f . Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **απόλυτο ελάχιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in D(f)$ και ο αριθμός $f(x_0)$ θα λέγεται **ελάχιστη τιμή** της f .
- Θα λέμε ότι η συνάρτηση f έχει **τοπικό μέγιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x_0 και $f(x_0) \geq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Όμοια θα λέμε ότι η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της $D(f)$ αν υπάρχει ανοιχτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x_0 και $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in I$. Τα τοπικά μέγιστα και τοπικά ελάχιστα της f λέγονται **τοπικά ακρότατα** της f .

Θεώρημα (Fermat)

Εάν η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0 και η $f'(x_0)$ υπάρχει τότε $f'(x_0) = 0$.

Ορισμός

Ένα σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f λέγεται **κρίσιμο σημείο** της f αν $f'(x_0) = 0$, ή η $f'(x_0)$ δεν υπάρχει.

Θεώρημα (κριτήριο της πρώτης παραγώγου)

Έστω ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνεχούς συνάρτησης f .

- ❶ Εάν η f' αλλάζει από θετική σε αρνητική στο x_0 , τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .
- ❷ Εάν η f' αλλάζει από αρνητική σε θετική στο x_0 , τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .
- ❸ Εάν η f' δεν αλλάζει πρόσημο στο x_0 , τότε η f δεν έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 .

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1, \quad x > 0.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \log x \quad \text{και} \quad g(x) = x - 1 - \log x.$$

Η προς απόδειξη ανισότητα είναι ισοδύναμη με τις

$$f(x) \leq 0 \quad \text{και} \quad g(x) \geq 0, \quad x > 0.$$

Οι f και g ορίζονται στο $(0, +\infty)$, είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, και

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2} \quad \text{και} \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

- Αν $x < 1$ είναι $f'(x) > 0$ άρα η f είναι αύξουσα στο $(0, 1)$ ενώ αν $x > 1$ είναι $f'(x) < 0$ οπότε η f είναι φθίνουσα στο $(1, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο $x = 1$ η f έχει **μέγιστο**, έτσι

$$f(x) \leq f(1) \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} - \log x \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \log x, \quad (1)$$

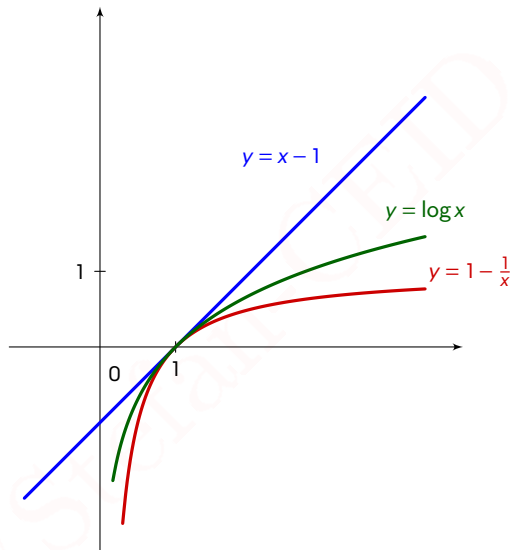
για κάθε $x > 0$.

- Αν $x < 1$ είναι $g'(x) < 0$ άρα η g είναι φθίνουσα στο $(0, 1)$ ενώ αν $x > 1$ είναι $g'(x) > 0$ οπότε η g είναι αύξουσα στο $(1, +\infty)$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στο $x = 1$ η g έχει **ελάχιστο**, έτσι δηλαδή

$$g(x) \geq g(1) \Rightarrow x - 1 - \log x \geq 0 \Rightarrow x - 1 \geq \log x, \quad (2)$$

για κάθε $x > 0$.

Το ζητούμενο έπεται από τις (1) και (2).



Σχήμα: $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$

Άσκηση

Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του a ώστε για κάθε $x > 0$ να ισχύει $\sqrt{x} \geq \log x + a$.

Άσκηση

Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

Άσκηση (Ανισότητα του Young)

Εάν a και b είναι μη αρνητικοί αριθμοί και $p, q > 1$ με $1/p + 1/q = 1$ δείξτε ότι

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Υπόδειξη: Εάν $ab = 0$ η ανισότητα ισχύει. Για $a > 0, b > 0$ θεωρήστε τη

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - bx, \quad x > 0.$$

Ορισμός (για παραγωγίσιμες συναρτήσεις)

Εάν το γράφημα μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτόμενη ευθεία (του γραφήματος) σε ένα διάστημα I θα λέγεται **κυρτή** στο I . Εάν το γράφημα της f βρίσκεται κάτω από κάθε εφαπτόμενη ευθεία (του γραφήματος) σε ένα διάστημα I θα λέγεται **κοίλη** στο I .

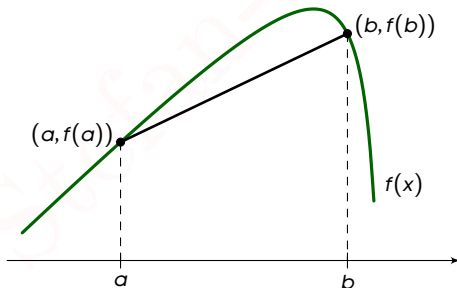
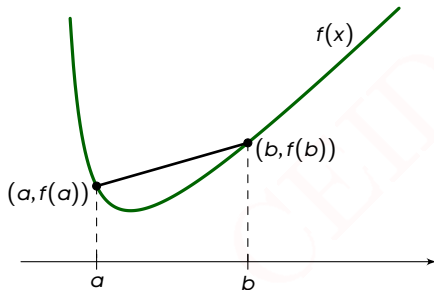
Θεώρημα (Κριτήριο κυρτότητας)

Έστω ότι για την συνάρτηση f η f'' υπάρχει σε κάποιο διάστημα I .

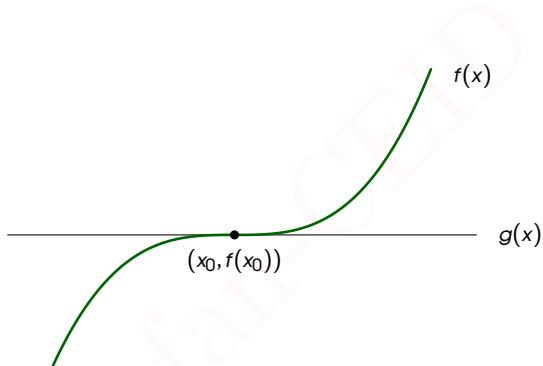
- ① Εάν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in I$, η f είναι κυρτή στο I .
- ② Εάν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in I$, η f είναι κοίλη στο I .

Ορισμός

Ένα σημείο στο γράφημα μιας συνάρτησης f λέγεται **σημείο καμψής** εάν η συνάρτηση στο σημείο αυτό αλλάζει από κυρτή σε κοίλη, ή από κοίλη σε κυρτή.



Σχήμα: Μια κυρτή συνάρτηση f , και μια κοίλη συνάρτηση f



Σχήμα: Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση συνάρτησης σε σημείο καμπής

Θεώρημα (Κριτήριο της δεύτερης παραγώγου)

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής σε κάποιο ανοιχτό διάστημα το οποίο περιέχει το σημείο x_0 .

- ① Εάν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .
- ② Εάν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Άσκηση

Να βρεθεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

Για καθένα από τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x) = 2$$

ενώ ο αριθμητής και ο παρονομαστής, και στα δύο, τείνει στο μηδέν τα όρια είναι διαφορετικά. Αυτό το αποτέλεσμα μας λέει ότι η πράξη $0/0$ δεν μπορεί να οριστεί, δηλαδή η μορφή $0/0$ είναι απροσδιόριστη. Άλλες απροσδιόριστες μορφές είναι οι ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . Πράγματι τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

είναι της μορφής $0 \cdot \infty$.

Θεώρημα (Ο κανόνας του L'Hospital)

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες και $g'(x) \neq 0$ σε κάθε σημείο ενός ανοικτού διαστήματος το οποίο περιέχει το σημείο x_0 , εκτός ίσως από το ίδιο το σημείο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty,$$

έχουμε δηλαδή απροσδιόριστη μορφή του τύπου $0/0$ ή ∞/∞ , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

εάν το όριο στο δεξί μέλος υπάρχει, ή είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Πράγματι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα του κανόνα του L'Hospital ισχύει αν το όριο $x \rightarrow x_0$ αντικατασταθεί με ένα από τα όρια $x \rightarrow x_0+$, $x \rightarrow x_0-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}.$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 1) = 2^0 - 1 = 0, \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

ο κανόνας του L'Hospital εφαρμόζεται, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \log 2}{1} = \log 2.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}.$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x) = \infty, \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

ο κανόνας του L'Hospital εφαρμόζεται, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x}$$

το οποίο είναι πάλι του τύπου ∞/∞ . Εφαρμόζοντας για άλλη μια φορά τον κανόνα του L'Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty.$$

Άσκηση

Δείξτε ότι για κάθε $r > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^r} = 0.$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x.$$

Το όριο είναι του τύπου $0 \cdot \infty$ οπότε μπορεί να μετασχηματιστεί σε $0 \cdot 1/0 = 0/0$ ή σε $1/\infty \cdot \infty = \infty/\infty$. Πράγματι

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{1/x} && \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x}.$$

Το όριο είναι του τύπου 1^∞ . Γράφοντας

$$(1 + \sin x)^{1/x} = e^{\log(1 + \sin x)^{1/x}} = e^{[\log(1 + \sin x)]/x}$$

βλέπουμε ότι καθώς $x \rightarrow 0$ ο εκθέτης είναι του τύπου $0/0$ οπότε από την συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης $\exp x = e^x$ έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \exp \frac{\log(1 + \sin x)}{x} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} \right) = \exp 1 = e, \end{aligned}$$

όπως περιμέναμε (γιατί);

Άσκηση

Να υπολογιστούν τα όρια

$$\textcircled{\alpha} \lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 5x)^{1/x}.$$

$$\textcircled{\beta} \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{3x} - 5x)^{1/x}.$$

Άσκηση

Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

Ας υποθέσουμε ότι η f είναι μια πραγματική συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = r \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = s.$$

Ορίζοντας τις ακολουθίες $a_n = f(n)$ και $b_n = f(1/n)$, επίσης ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = r \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s.$$

Έτσι αν ο κανόνας του L' Hospital εφαρμόζεται στη συνεχή περίπτωση, δηλαδή στην ανάλογη συνάρτηση f και δίνει το όριο της συνάρτησης, τότε αυτό το όριο είναι και το όριο της ακολουθίας. Για παράδειγμα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = 1.$$

Βέβαια η απόδειξη της ενδιάμεσης ισότητας δεν γίνεται με εφαρμογή του κανόνα του L' Hospital. Κάτι τέτοιο **δεν έχει έννοια σε ακολουθίες** (γιατί:).

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας $a_n = n(e^{1/n} - 1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Γράφοντας

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{1/n}$$

βλέπουμε ότι το όριο της a_n είναι το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x},$$

εφόσον αυτό υπάρχει. Το τελευταίο όριο είναι η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης στο $x = 0$, επομένως

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = e^0 = 1.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Τα ανάλογα όρια της συνεχούς περίπτωσης είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x}\right)^x, \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin x\right)^{1/x}.$$

Και τα δύο όρια είναι της μορφής 1^∞ . Στο Παράδειγμα 15, κάνοντας χρήση του κανόνα του L' Hospital υπολογίσαμε το δεύτερο όριο και δείξαμε ότι ισούται με e . Έτσι λοιπόν έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \sin x\right)^{1/x} = e.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \left(\frac{\log(n+1)}{n^p} \right)^q, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου p και q είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Εξετάζουμε πρώτα αν το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n^p}$$

υπάρχει. Θεωρώντας τη συνεχή περίπτωση με x στη θέση του n βλέπουμε ότι το όριο είναι της μορφής ∞/∞ , και ότι ο αριθμητής $\log(x+1)$ και ο παρονομαστής x^p είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, έτσι από τον κανόνα του L' Hospital παίρνουμε

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(x+1)}{px^{p-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{px^{p-1}(x+1)}.$$

Παράδειγμα (συνέχεια)

Αν $p \geq 1$ το παραπάνω όριο είναι ίσο με μηδέν, ενώ αν $0 < p < 1$ έχουμε για $x > 0$

$$0 \leq \frac{1}{px^{p-1}(x+1)} \leq \frac{1}{px^{p-1}x} = \frac{1}{px^p}.$$

Το δεξί μέλος της ανισότητας τείνει στο 0 καθώς $x \rightarrow +\infty$, αφού $p > 0$, έτσι τελικά έχουμε για $0 < p < 1$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{px^{p-1}(x+1)} = 0.$$

Έτσι τελικά και σε συνδυασμό με τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = a^x$, $a > 0$ παίρνουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log(n+1)}{n^p} \right)^q = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{n^p} \right)^q = 0^q = 0.$$