Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 7

Παράγωγοι Συναρτήσεων

Ε. Στεφανόπουλος

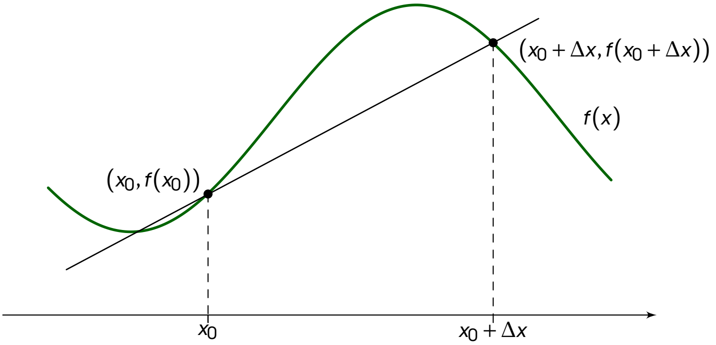
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

21 Νοεμβρίου 2019

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$ το πηλίκο διαφορών

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} := \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{(x_0+\Delta x)-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

εκφράζει τη μέση μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής $y = f(x)$ προς την ανεξάρτητη x στο x_0 καθώς αυτή μεταβάλεται από x_0 σε $x_0+\Delta x$. Γεωμετρικά το πηλίκο αυτό είναι η κλίση της ευθείας δια των $(x_0, f(x_0))$ και $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.



Ορισμός

Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$ θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο $x = x_0$ αν το όριο

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει, είναι δηλαδή πραγματικός αριθμός. Το όριο $f'(x_0)$ λέγεται **παράγωγος της f στο x_0**. Εάν το όριο αυτό δεν υπάρχει ή είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$ θα λέμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Θεώρημα

Αν η f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a,b) και είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ τότε είναι συνεχής στο x_0.

Ορισμός (Πλευρικές παράγωγοι)

Αν f είναι μια συνάρτηση ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a,b) και $x_0 \in (a,b)$, η **παράγωγος από αριστερά** της f στο x_0 ορίζεται να είναι το όριο

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

εφόσον αυτό υπάρχει. Όμοια η **παράγωγος από δεξιά** της f στο x_0 ορίζεται να είναι το όριο

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

εφόσον αυτό υπάρχει.

- Σημειώνουμε ότι η παράγωγος της f στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Αν η f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό αν είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και οι πλευρικές παράγωγοι $f'_+(a)$ και $f'_-(b)$ υπάρχουν, σαν πραγματικοί αριθμοί.

- Εάν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο ενός διαστήματος (a, b) θα λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** ή **διαφορίσιμη** στο διάστημα (a, b). Στη περίπτωση αυτή η σχέση

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

παράγει μια νέα συνάρτηση την f' η οποία ορίζεται σε κάθε σημείο του (a, b) και λέγεται **παράγωγος της f στο (a, b)**.

Παράδειγμα

Να βρεθεί, αν αυτή υπάρχει, η παράγωγος της $f(x) = x^2$ στο $x = x_0$.

Η f ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε διαμορφώνοντας το πηλίκο διαφορών

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{h(2x_0+h)}{h} = 2x_0 + h$$

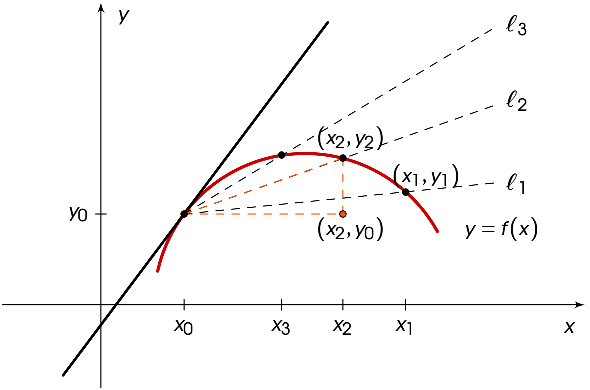
βλέπουμε ότι το όριο καθώς $h \to 0$ υπάρχει και

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0,$$

συνεπώς $f'(x_0) = 2x_0$.
Επειδή το x_0 είναι τυχαίο συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και $f'(x) = 2x$, ισοδύναμα $(x^2)' = 2x$.

Γεωμετρική σημασία της παραγώγου

Από τον ορισμό της παραγώγου έπεται ότι η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ στο γράφημα της $y = f(x)$.



Σχήμα: Η εφαπτόμενη ευθεία στη γραφική παράσταση της f στο (x_0, y_0), σαν όριο των ευθειών $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots$ με κλίσεις, αντίστοιχα, $(y_k - y_0)/(x_k - x_0)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Γεωμετρική σημασία της παραγώγου (συνέχεια)

Έτσι αν (x, y) είναι ένα σημείο της ευθείας αυτής τότε

$$f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$$

κατά συνέπεια η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

Φυσική σημασία της παραγώγου

Το πηλίκο διαφορών στην (1) είναι πηλίκο μεταβολών κατά συνέπεια εκφράζει το μέσο ρυθμό μεταβολής. Έτσι αν το όριο του πηλίκου καθώς $\Delta x \to 0$ υπάρχει αυτό είναι ο ρυθμός μεταβολής ως πρός x στο x_0 της ποσότητας που περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = f(x)$.

Παράδειγμα

Η $f(x)=\sqrt{x}$ ορίζεται για $x \geq 0$. Εξετάζουμε κατά πόσον η f είναι παραγωγίσιμη.

Για $x>0$ και $x+h \geq 0$ υπολογίζουμε

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

έτσι

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

συνεπώς η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $f'(x)=1/(2\sqrt{x})$. Υπολογίζουμε την δεξιά παράγωγο της f στο $x=0$, $f'_+(0)$. Για $h>0$

$$\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\frac{\sqrt{h}}{h}=\frac{1}{\sqrt{h}} \Rightarrow f'_+(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty.$$

Συμπέρασμα: η εφαπτόμενη ευθεία στο γράφημα της f στο $(0,0)$ είναι κάθετη στον x-άξονα, είναι δηλαδή ο y-άξονας.

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι η $f(x) = \sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = \cos x$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \frac{\sin h}{h}. \end{aligned}$$

Τα όρια στο δεξί μέλος, καθώς $h \to 0$, υπάρχουν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως υπάρχει και αυτό στο αριστερό μέλος, κατά συνέπεια η $\sin x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον

$$\begin{aligned} \sin' x &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι η $f(x) = \exp x = e^x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) = e^x$, δηλαδή $\exp' x = \exp x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για x και h στο $\mathbb{R}$, διαμορφώνοντας το πηλίκο διαφορών

$$\frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h}$$

συμπεραίνουμε, βλέπε Παράδειγμα 8.16 από τις σημειώσεις, ότι το όριο του πηλίκου διαφορών καθώς $h \to 0$ υπάρχει και

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x 1 = e^x,$$

κατά συνέπεια $(e^x)' = e^x$.

Παράδειγμα 8.16. (Σημειώσεις)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Ένας άλλος συμβολισμός για την παράγωγο, ο οποίος υπαγορεύεται από την (1), είναι

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Το σύμβολο αυτό για την παράγωγο εισήγαγε ο Leibniz. Αν $y = f(x)$ γράφουμε επίσης

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

• Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 ή σε κάποιο διάστημα και η f' είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή σε κάποιο διάστημα την $(f')'(x_0)$, ή $(f')'$ λέμε **δεύτερη παράγωγο** της f και τη συμβολίζουμε, απλούστερα, με f''. Όμοια, εφόσον αυτή υπάρχει, η $f''' = (f'')'$ είναι η **τρίτη παράγωγος** της f. Γενικότερα η $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ είναι η ***k*-τάξης παράγωγος** της f. Ορίζουμε $f^{(0)} = f$. Με τον συμβολισμό του Leibniz γράφουμε για τις $f', f'', f''', \ldots$

$$\frac{df}{dx}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{d^2 f}{dx^2}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{df^2}{dx^2}\right) = \frac{d^3 f}{dx^3}, \qquad \ldots$$

Θεώρημα

Εάν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε εκεί που και οι δύο παράγωγοι υπάρχουν

1. $(\lambda f(x) + \mu g(x))' = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$, *για κάθε λ και μ στο $\mathbb{R}$.*
2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
3. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *εκεί όπου $g(x) \neq 0$.*

Θεώρημα (Κανόνας της αλυσίδας)

Εάν οι f και g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις και η $f \circ g$ ορίζεται τότε

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Θέτοντας $y = (f \circ g)(x)$ και $u = g(x)$ ο κανόνας της παραγώγου αποδίδεται σαν

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Θεώρημα

Εάν οι f είναι παραγωγίσιμη και η f^{-1} υπάρχει τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη και

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

εκεί όπου $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Παράδειγμα

Για $x > 0$, από το παραπάνω θεώρημα έχουμε

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

1. $\frac{d}{dx}c = 0, \qquad c = \text{σταθερά}.$
2. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$
3. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x.$
4. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$
5. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x.$
6. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x.$
7. $\frac{d}{dx}e^x = e^x.$
8. $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}.$
9. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \log a, \qquad a > 0, \quad a \neq 1.$
10. $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x}\frac{1}{\log a} = \frac{1}{x}\log_a e.$
11. $\frac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}, \qquad r \in \mathbb{R}, \quad x > 0.$
12. $\frac{d}{dx}x^x = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$
13. $\frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
15. $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}.$
16. $\frac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\frac{1}{1+x^2}.$

Παράδειγμα

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \log|x|$, $x \neq 0$. Δείχνουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και

$$\left(\log|x|\right)' = \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0.$$

Πράγματι αν $x > 0$, τότε $f(x) = \log x$ και $f'(x) = 1/x$.
Αν $x < 0$, τότε $f(x) = \log(-x)$ οπότε η f σαν σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, 0)$, επιπλέον από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$f'(x) = \left(\log'(-x)\right)(-x)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι πλήρης.

Παράδειγμα

Δείχνουμε ότι
$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad -1 < x < 1.$$
Η $y = \sin^{-1}x$ ορίζεται για $-1 \le x \le 1$ και είναι $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Από τον κανόνα της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης παίρνουμε
$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sin'(\sin^{-1}x)} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}$$
που ορίζεται για $\sin^{-1}x \neq \pm\pi/2$, κατά συνέπεια για $x \in (-1,1)$. Θέτοντας $\omega = \sin^{-1}x$, έχουμε $x = \sin\omega$ και
$$\cos\omega = \sqrt{1-\sin^2\omega} = \sqrt{1-x^2}$$
αφού $\omega \in (-\pi/2, \pi/2)$. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στον τύπο της παραγώγου παίρνουμε το ζητούμενο.

Πεπλεγμένη παραγώγιση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να λύσουμε το εξής πρόβλημα: Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2+y^2=8$ στο σημείο $(2,2)$. Σύμφωνα με ό,τι γνωρίζουμε πρέπει να βρούμε τη συνάρτηση $y=f(x)$ το γράφημα της οποίας είναι το τμήμα του κύκλου που μας ενδιαφέρει (ο κύκλος δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης) και έπειτα να υπολογίσουμε την παράγωγο της f στο σημείο $(2,2)$ η οποία θα μας δώσει την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας. Λύνοντας την εξίσωση ως προς y βρίσκουμε

$$y^2=8-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8-x^2}$$

απ΄ όπου επιλέγουμε $y=f(x)=\sqrt{8-x^2}$ αφού για $x=2$ πρέπει να είναι $y=2$. Έτσι βρίσκουμε

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{8-x^2}} \qquad \text{οπότε} \qquad f'(2)=-1$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y-2=-1(x-2) \Rightarrow y=4-x.$$

Πεπλεγμένη παραγώγιση (συνέχεια)

Προσπαθώντας να γενικεύσουμε το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που μας ενδιαφέρει δίνεται σε **πεπλεγμένη μορφή** μέσω μιας εξίσωσης $F(x,y)=0$, όπου $F(x,y)=x^2+y^2-8$. Υποθέτοντας ότι η μεταβλητή y είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x σε κάποιο διάστημα γύρω από το $x=2$ μπορούμε να παραγωγίσουμε την εξίσωση $x^2+y^2=8$ και από τη σχέση που θα προκύψει να βρούμε την παράγωγο στο $x=2$. Έτσι έχουμε

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}8 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \tag{3}$$

απ' όπου για $x=2$ και $y=2$ βρίσκουμε $4+4y'(2)=0$, δηλαδή $y'(2)=-1$, έτσι

$$y-2=-1(x-2), \qquad ή \qquad y=4-x.$$

Σημειώνουμε ότι από την (3) μπορούμε να γράψουμε, εκεί όπου $y\neq 0$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

Η διαδικασία που ακολουθήσαμε για να υπολογίσουμε την παράγωγο, λέγεται **πεπλεγμένη παραγώγιση**.

´Ασκηση

Να βρεθούν τα σημεία στο γράφημα της $3x^2 + 4y^2 + 3xy = 24$ *στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία είναι οριζόντια.*

´Ασκηση

Δείξτε ότι οι εφαπτόμενες ευθείες στα αντιδιαμετρικά σημεία της έλλειψης

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

είναι παράλληλες. **Υπόδειξη**: *Τα αντιδιαμετρικά σημεία της έλλειψης, όλα εκτός από ένα ζευγάρι, είναι τομές της ευθείας με εξίσωση* $y = m(x-p) + q$, $m \in \mathbb{R}$ *και της έλλειψης.*

´Ασκηση

Δείξτε ότι

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Ορισμός

Μια εξίσωση η οποία περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση όπως και παραγώγους αυτής λέγεται **(συνήθης) διαφορική εξίσωση**.

Για παράδειγμα η

$$(1+x^2)y' = k$$

όπου $k =$ σταθερά, είναι μια διαφορική εξίσωση. Οι συναρτήσεις y που ικανοποιούν την εξίσωση λέγεται λύση της εξίσωσης. Έτσι γράφοντας την εξίσωση ως

$$y' = \frac{k}{1+x^2}$$

από την προηγούμενη άσκηση βρίσκουμε

$$y' = k(\tan^{-1}(x))' \Rightarrow y = k\tan^{-1} x + c,$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Έτσι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι (άπειρες το πλήθος) $y = k\tan^{-1} x + c$, με $c \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $y' - ky = 0$, όπου $k =$ σταθερά.

Παράδειγμα

Να βρεθούν όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $yy' + kx = 0$, όπου $k =$ σταθερά.

Με χρήση των νόμων των παραγώγων η εξίσωση γράφεται

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' + k\left(\frac{x^2}{2}\right)' = 0$$

$$\left(\frac{y^2}{2} + k\frac{x^2}{2}\right)' = 0$$

επομένως

$$\frac{y^2}{2} + k\frac{x^2}{2} = c \quad \text{ή} \quad y^2 + kx^2 = C$$

όπου $C = 2c$ είναι μια σταθερά. Κατά συνέπεια οι λύσεις της εξίσωσης περιέχονται (πεπλεγμένα) στις ``καμπύλες'' $y^2 + kx^2 = C$.