Μαθηματικά Ι

Διάλεξη 2

Συναρτήσεις
Συναρτήσεις Πραγματικών μεταβλητών και Πραγματικές συναρτήσεις

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

10 Οκτωβρίου 2019

Ορισμός

Εάν A και B είναι δύο σύνολα μία **συνάρτηση** f από το A στο B είναι μία αντιστοιχία ή νόμος ώστε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχίζεται σε ένα και μόνο στοιχείο του B. Εάν f είναι μία συνάρτηση από το A στο B γράφουμε $f : A \to B$. Εάν $x \in A$ με $f(x)$ συμβολίζουμε το στοιχείο του B που αντιστοιχεί μέσω της f στο x. Λέμε ότι το $f(x)$ είναι η **εικόνα** του x μέσω της f.

Ορισμός

Έστω f να είναι είναι μία συνάρτηση από το A στο B, δηλαδή $f : A \to B$. Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού** (domain) της f και, συνήθως, συμβολίζεται με $D(f)$ ή D_f. Το σύνολο των $y \in B$ για τα οποία υπάρχουν $x \in A$ τέτοια ώστε $y = f(x)$ λέγεται **πεδίο τιμών** (range) της f και συμβολίζεται με $R(f)$ ή R_f. Εν γένει $R(f) \subseteq B$. Το υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

λέγεται **γράφημα** (graph) της f. Εναλλακτικά συμβολίζεται με G_f.

Παράδειγμα

Έστω $A = \{x, y, z\}$ και $B = \{a, b\}$ και ορίζουμε $f : A \to B$ με

$$f(x) = a, \qquad f(y) = b, \qquad f(z) = b.$$

Παράδειγμα

Έστω A και B δύο μη κενά σύνολα και έστω $b_0 \in B$. Η συνάρτηση $f : A \to B$ με τύπο $f(x) = b_0$, για κάθε $x \in A$, λέγεται **σταθερή** συνάρτηση (constant function).

Παράδειγμα

Έστω $A \neq \varnothing$. Η συνάρτηση $f : A \to A$ με τύπο $f(x) = x$, για κάθε $x \in A$, λέγεται **ταυτοτική** συνάρτηση (identity function) και συμβολίζεται με τ_A.

Παράδειγμα

Έστω $A \neq \varnothing$ και έστω $f : A \to B$. Εάν $A_0 \subseteq A$ η συνάρτηση $f|_{A_0} : A_0 \to B$ που ορίζεται από τη σχέση $f|_{A_0}(x) = f(x)$, για κάθε $x \in A_0$, λέγεται **ο περιορισμός** της f στο A_0 (restriction of f on A_0).

• Έστω $f : A \to B$. Εάν $A_0 \subseteq A$ με $f(A_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των εικόνων των στοιχείων του A_0. Το σύνολο αυτό λέγεται η **εικόνα** (image) του A_0 μέσω της f. Έτσι

$$f(A_0) = \{y \in B : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι $f(A_0) \subseteq B$. Εάν $B_0 \subseteq B$ με $f^{-1}(B_0)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων του A των οποίων οι εικόνες μέσω της f ανήκουν στο B_0. Το σύνολο αυτό λέγεται η **αντίστροφη εικόνα** (preimage) του B_0 μέσω της f. Έτσι

$$f^{-1}(B_0) = \{x \in A : f(x) \in B_0\}.$$

Παρατηρούμε ότι $f^{-1}(B_0) \subseteq A$. Μπορεί να δειχθεί ότι

$$A_0 \subseteq A \Rightarrow f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0 \tag{1}$$

$$B_0 \subseteq B \Rightarrow f(f^{-1}(B_0)) \subseteq B_0 \tag{2}$$

Ορισμός

Έστω $f : A \longrightarrow B$.

1. Η f λέγεται **ένα-προς-ένα** (injective ή one--to--one) εάν για κάθε ζευγάρι διακριτών στοιχείων του $D(f)$ οι εικόνες τους διαφέρουν μεταξύ τους, δηλαδή
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$
Ισοδύναμα
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$
2. Η f λέγεται **επί** (surjective ή onto) του B εάν κάθε στοιχείο του B είναι εικόνα κάποιου στοιχείου του A, δηλαδή
$$y \in B \Rightarrow y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A.$$
Ισοδύναμα $R(f) = B$.
3. Εάν η f είναι ένα-προς-ένα και επί θα λέγεται **ένα-προς-ένα αντιστοιχία** μεταξύ των A και B.

• Εάν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ ορίζουμε τη συνάρτηση $g \circ f : A \to C$ με τη σχέση $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Η $g \circ f$ λέγεται **σύνθεση** (composite) των f και g. Η $g \circ f$ ορίζεται όταν το πεδίο τιμών της f περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g, σχηματικά $R(f) \subseteq D(g)$.

• Εάν $f : A \to B$ είναι μία ένα προς ένα αντιστοιχία του A με το B, τότε σε κάθε στοιχείο $y \in B$ αντιστοιχεί ένα και μόνο στοιχείο $x \in A$ τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Έτσι μπορεί να ορισθεί η **αντίστροφη** συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ της f από τη σχέση $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Παράδειγμα

Για $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b, c\}$ και $C = \{p, q\}$ ορίζουμε

$$f(x) = a, \quad f(y) = f(z) = b, \qquad g(a) = g(b) = p, \quad g(c) = q$$

τότε $R(f) = \{a, b\} \subsetneq B$ και $R(g) = C$, και

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(a) = p, \quad g \circ f(y) = g(f(y)) = g(b) = p, \quad g \circ f(z) = p$$

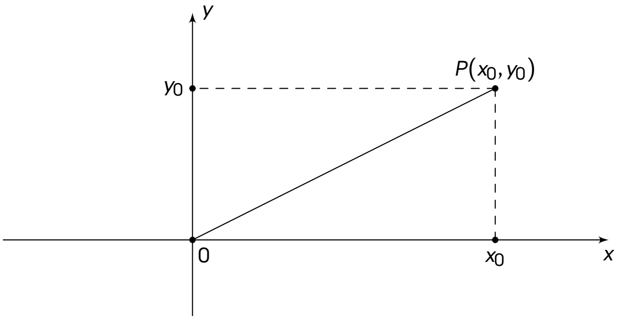
Με $\mathbb{R}$ συμβολίζουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{R}^2$ το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση, τότε το γράφημα

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$$

είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Το $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με ένα **ορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0,0)$ θα το λέμε **καρτεσιανό επίπεδο**, ή **πραγματικό επίπεδο** ή διδιάστατο πραγματικό χώρο. Τον οριζόντιο άξονα τον λέμε συνήθως x-άξονα και τον κατακόρυφο y-άξονα. Κάθε σημείο P του επιπέδου αντιστοιχεί σε μοναδικό ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε ζευγάρι (x_0, y_0) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του επιπέδου. Έτσι γράφουμε $P(x_0, y_0)$ για να δηλώσουμε αυτή την ένα προς ένα αντιστοιχία.



Σχήμα: Το καρτεσιανό επίπεδο.

Το σημείο x_0 στον x-άξονα το λέμε x **συντεταγμένη** του σημείου P, και το y_0 στον y-άξονα το λέμε y **συντεταγμένη** του P.

Όμοια το καρτεσιανό γινόμενο

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

εφοδιασμένο με ένα **τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων**, δηλαδή εφοδιασμένο με τρεις ευθείες ανά δύο κάθετες μεταξύ τους, καθεμιά από τις οποίες αναπαριστάνει την πραγματική ευθεία, με σημείο τομής το $(0,0,0)$ θα το λέμε **τριδιάστατο πραγματικό χώρο**. Κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί σε μοναδική τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών, και αντίστροφα κάθε τριάδα (x, y, z) πραγματικών αριθμών παριστάνει ένα μοναδικό σημείο του χώρου. Γενικότερα για $n \in \mathbb{N}$ έχουμε τον n-διάστατο πραγματικό χώρο

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_j \in \mathbb{R},\ j = 1, 2, \dots, n\}.$$

Αναλογικά, μπορούμε να έχουμε συναρτήσεις

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

με $m, n \in \mathbb{N}$.

• Το εμβαδόν A που περικλείει κύκλος ακτίνας r είναι ίσο με πr^2, άρα

$$A(r) = \pi r^2, \qquad A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

• Ο όγκος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης r και ύψος h είναι ίσος με $\pi r^2 h$, έτσι ο όγκος V είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών r και h, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

• Αν ένα σώμα κινείται στο χώρο $\mathbb{R}^3$ ώστε κάθε χρονική στιγμή t η θέση του είναι γνωστή, τότε η κίνηση περιγράφεται από μια συνάρτηση $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, ώστε

$$w(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

όπου οι x, y, z είναι συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$.

• Αν P είναι σημείο στην ατμόσφαιρα της γης, $p(P), q(P), h(P)$ είναι αντίστοιχα η ατμοσφαιρική πίεση, η θερμοκρασία, και η υγρασία στο P, υποθέτοντας ότι το κέντρο της γης βρίσκεται στην αρχή ενός τρισορθογωνίου συστήματος αξόνων, τότε $P = P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, οπότε η πληροφορία που μας ενδιαφέρει κωδικοποιείται με μια συνάρτηση $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$M(x,y,z) = (p(x,y,z), q(x,y,z), h(x,y,z)).$$

Ορισμός

Εάν $A \neq \varnothing$, κάθε συνάρτηση ορισμένη στο A με τιμές στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $f : A \to \mathbb{R}$, λέγεται **πραγματική** συνάρτηση. Συνήθως το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που θα μας απασχολήσουν είναι το $\mathbb{R}$ ή κάποιο υποσύνολο αυτού.

Οι πραγματικές συναρτήσεις συνήθως δίνονται με κάποιο τύπο, για παράδειγμα

$$f(x) = \sqrt{3x+1}.$$

Στην περίπτωση αυτή απαιτείται η εύρεση του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. Πρέπει να είναι

$$3x+1 \geq 0 \Rightarrow D(f) = [-1/3, +\infty).$$

Παρατηρούμε ότι $f(-1/3) = 0$, και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x > -1/3$ ώστε $\sqrt{3x+1} = y$. Πράγματι ``επιλύοντας'' την τελευταία εξίσωση, ισοδύναμα, παίρνουμε

$$3x+1 = y^2 \Leftrightarrow x = y^2/3 - 1/3 > -1/3, \qquad \text{άρα} \qquad R(f) = [0, +\infty).$$

Ορισμός (Μονοτονία)

Μια πραγματική συνάρτηση f η οποία διατηρεί ή αντιστρέφει τη διάταξη των πραγματικών αριθμών λέγεται **μονότονη**. Ειδικότερα η f λέγεται

1. **Αύξουσα** (increasing) αν $f(s) \leq f(t)$, οποτεδήποτε $s < t$, και αυστηρά ή γνησίως αύξουσα (strictly increasing) αν $f(s) < f(t)$.
2. **Φθίνουσα** (decreasing) αν $f(s) \geq f(t)$, οποτεδήποτε $s < t$ και αυστηρά ή γνησίως φθίνουσα (strictly dencreasing)αν $f(s) > f(t)$.

Ορισμός

Μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη σ΄ ένα κατάλληλο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ λέγεται

1. **΄Αρτια** (even) αν $f(-x) = f(x)$.
2. **Περιττή** (odd) αν $f(-x) = -f(x)$.

Ορισμός (Πράξεις συναρτήσεων)

Εάν f και g είναι πραγματικές συναρτήσεις, για κάθε $x \in D(f) \cap D(g)$, ορίζουμε το **άθροισμα** $f+g$, τη **διαφορά** $f-g$, το **γινόμενο** $f \cdot g$, και το **πηλίκο** f/g, των f και g, αντίστοιχα, με τις σχέσεις

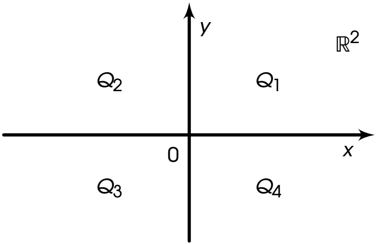
1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, για $g(x) \neq 0$.

Οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων όπως και η σύνθεση επιτρέπουν τη δημιουργία νέων συναρτήσεων από τις σχετικά απλές υπάρχουσες συναρτήσεις. Επιπλέον οι αντίστροφες συναρτήσεις, γνωστών συναρτήσεων, εφόσον αυτές υπάρχουν, εμπλουτίζουν τη συλλογή των πραγματικών συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν και εμφανίζονται στις διάφορες εφαρμογές.

Αν f είναι μια πραγματική συνάρτηση ως γράφημα της f ορίσαμε το σύνολο $G(f) = \{(x, y) : y = f(x)\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
Η αποτύπωση του γραφήματος μιας συνάρτησης στο επίπεδο, δηλαδή η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης παρέχει συνήθως ένα σχετικά μεγάλο ποσοστό της πληροφορίας που θα θέλαμε να έχουμε για τη συνάρτηση. ΄Αρα η όσο το δυνατό πιστή αποτύπωση του γραφήματος της συνάρτησης είναι ένας από τους στόχους μας. Προκειμένου να πετύχουμε αυτό το στόχο πρέπει να αναπτύξουμε την κατάλληλη ``τεχνολογία΄΄. Η τεχνολογία αυτή αναπτύσσεται σταδιακά. Επιπλέον ο αυστηρός ορισμός κάποιων συναρτήσεων όπως είναι οι τριγωνομετρικές, η εκθετική, ο λογάριθμος και άλλες μπορεί να δοθεί αφότου έχουμε αναπτύξει την ανάλογη θεωρία. Εκμεταλευόμενοι όμως τη σχετική γνώση που έχουμε από το Λύκειο, θα θεωρήσουμε ότι γνωρίζουμε τη συμπεριφορά, τις ιδιότητες και τη γραφική παράσταση πολλών από τις συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν.
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$ είναι το σύνολο όλων των σημείων (x, y) του επιπέδου με $y = f(x)$. ΄Ετσι αποτυπώνοντας πολλά (πόσα;) σημεία $(x, f(x))$ στο καρτεσιανό επίπεδο μπορούμε να καταλάβουμμε-εικάσουμε τη μορφή της γραφικής παράστασης.

Το ορθογώνιο σύστημα αξόνων χωρίζει το καρτεσιανό επίπεδο σε τέσσερα ξένα μεταξύ τους σύνολα τα οποία λέμε πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο τεταρτημόριο (quadrants). Αυτά είναι αντίστοιχα τα

$$Q_1 = \{(x, y) : x > 0 \text{ και } y > 0\}, \qquad Q_2 = \{(x, y) : x < 0 \text{ και } y > 0\},$$
$$Q_3 = \{(x, y) : x < 0 \text{ και } y < 0\}, \qquad Q_4 = \{(x, y) : x > 0 \text{ και } y < 0\}.$$

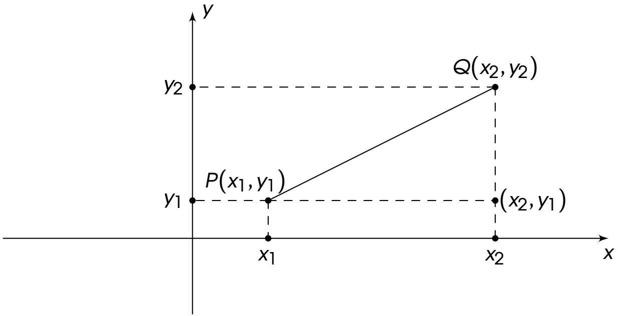


Απόσταση στο επίπεδο

- $P = (x_1, y_1)$ και $Q = (x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου
- Αν $d(P, Q)$ είναι η απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q

τότε από το σχετικό ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία (x_1, y_1), (x_2, y_2) και (x_2, y_1) προκύπτει ότι

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Εξίσωση του κύκλου

Αν το (x, y) είναι σημείο του κύκλου κέντρου (a, b) και ακτίνας $r \geq 0$, τότε

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \tag{3}$$

Έτσι η (3) είναι η **εξίσωση του κύκλου** με κέντρο το (a, b) και ακτίνα r. Για παράδειγμα η εξίσωση

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

γράφεται

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

κατά συνέπεια η εξίσωση παριστάνει κύκλο κέντρου $(1, -1)$ και ακτίνας 2.

´Ασκηση

Η ***έλλειψη*** *είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, τις* ***εστίες*** *της έλλειψης, είναι σταθερό. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης με εστίες στα σημεία* $(-c, 0)$ *και* $(c, 0)$ *και άθροισμα αποστάσεων ίσο με* $2a$*, όπου* $a > c > 0$.

Μήκος περιφέρειας και εμβαδόν δίσκου

$C(O,r)$: κύκλος κέντρου O και ακτίνας r
$D(O,r)$: η περιοχή που περικλείει ο κύκλος $C(O,r)$ την οποία θα λέμε **δίσκο** κέντρου O και ακτίνας r. Γράφουμε επίσης C_r για τον κύκλο και D_r για το δίσκο.
Πρόβλημα 1: Τι μπορούμε να ορίσουμε σαν μήκος της περιφέρειας του κύκλου και πόσο είναι αυτό;
Πρόβλημα 2: Με τί ισούται το εμβαδόν του δίσκου;

Θεώρημα (Εύδοξος (408-355 π.Χ.))

Ο λόγος του μήκους της περιφέρειας προς τη διάμετρο του κύκλου είναι ίδιος για όλες τις ακτίνες.

Ορισμός

Αν $L(C_r)$ είναι το μήκος της περιφέρειάς του κύκλου C_r, ορίζουμε

$$\frac{L(C_r)}{2r} = \pi.$$

Ιστορία: Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν για τον αριθμό π από τον 5ο π.Χ. αιώνα. Ο Ιπποκράτης ο Χίος φαίνεται ότι γνώριζε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος του Ευδόξου από το 430 π.Χ. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.) απέδειξε ότι $3+10/71 < \pi < 3+1/7$, οπότε $\pi \approx 3.14\ldots$. Το 1761 ο Lambert απέδειξε ότι ο αριθμός π είναι άρρητος. Το 1882 ο Lindemann απέδειξε ότι ο π είναι **υπερβατικός**, δεν προκύπτει δηλαδή σαν λύση κάποιας αλγεβρικής εξίσωσης με ρητούς συντελεστές. Συνεπώς δεν μπορεί να βρεθεί η θέση του π (να κατασκευαστεί) με χάρακα και διαβήτη επάνω στην πραγματική ευθεία, κατά συνέπεια το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με χάρακα και διαβήτη είναι αδύνατο.

Έτσι το μήκος της περιφέρειας κύκλου ακτίνας r είναι

$$L(C_r) = 2\pi r \tag{4}$$

και το εμβαδόν δίσκου ακτίνας r αποδεικνύεται ότι είναι

$$A(D_r) = \frac{1}{2}L(C_r)r = \pi r^2. \tag{5}$$

Ειδικά

$$L(C_1) = 2\pi, \qquad A(D_1) = \pi.$$

Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Θυμίζουμε ότι μια γωνία με κορυφή στο κέντρο ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη γωνία**. Θυμίζουμε επίσης ότι το τμήμα ενός δίσκου το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών μιας επίκεντρης γωνίας και της περιφέρειας λέγεται **κυκλικός τομέας**. Αν στον κύκλο $C(O,r)$ θεωρήσουμε τον κυκλικό τομέα AOB, τότε σε αναλογία με την (4) το μήκος s του τόξου AB είναι

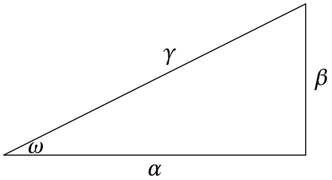
$$s = s_1 r$$

όπου s_1 είναι μια υποδιαίρεση του 2π. Επίσης σε αναλογία της (5) το εμβαδόν του κυκλικού τομέα AOB θα είναι

$$A = \frac{1}{2}sr = \frac{1}{2}s_1 r^2 \tag{6}$$

όπου s είναι το μήκος του τόξου AB, και $s = s_1 r$ με $0 \leq s_1 \leq 2\pi$. Μπορούμε έτσι να σκεφτόμαστε ότι το s_1 είναι το μήκος του τόξου στη μοναδιαία περιφέρεια το οποίο αποκόπτει η επίκεντρη γωνία.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω ορθογωνίου τριγώνου



$$\sin\omega = \frac{\beta}{\gamma} \qquad \cos\omega = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\tan\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} \qquad \cot\omega = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

$$\sec\omega = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{\cos\omega} \qquad \csc\omega = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{\sin\omega}$$

Άμεσες συνέπειες του ορισμού των τριγωνομετρικών αριθμών γωνίας είναι

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1, \quad \tan\omega = \frac{1}{\cot\omega}, \quad \sec^2\omega - \tan^2\omega = 1, \quad \csc^2\omega - \cot^2\omega = 1.$$

Μια γωνία με κορυφή στο κέντρο ενός κύκλου αποκόπτει ένα τόξο της περιφέρειας. Είναι λογικό να θελήσουμε να μετρήσουμε τη γωνία μετρώντας το αντίστοιχο τόξο. Όμως το ``μήκος του τόξου'' εξαρτάται από την ακτίνα του κύκλου. Ξεπερνάμε τη δυσκολία με δύο τρόπους.

Πρώτος τρόπος: Διαιρώντας την περιφέρεια σε 360 ισομήκη τόξα ορίζουμε σαν μια μονάδα μέτρησης γωνιών την **μοίρα** (degree) να είναι ίση με ένα από αυτά τα τόξα. Αντί για 1 μοίρα γράφουμε 1°, έτσι $1^\circ = 1/360$ της περιφέρειας. Έτσι η περιφέρεια αντιστοιχεί σε γωνία 360°. Η μονάδα αυτή είναι ανεξάρτητη της ακτίνας του κύκλου, για παράδειγμα η γωνία 90° αντιστοιχεί στο $1/4$ της περιφέρειας, αφού 90=360/4, κατά συνέπεια η γωνία 90° είναι ορθή.

Δεύτερος τρόπος: Θεωρούμε ένα κύκλο ακτίνας 1 και ορίζουμε τη μονάδα **ακτίνιο** (radian) να είναι εκείνο το μήκος τόξου ώστε το μήκος της περιφέρειας του (μοναδιαίου) κύκλου να είναι 2π ακτίνια, επομένως

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Leftrightarrow 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.2957795...^\circ$$

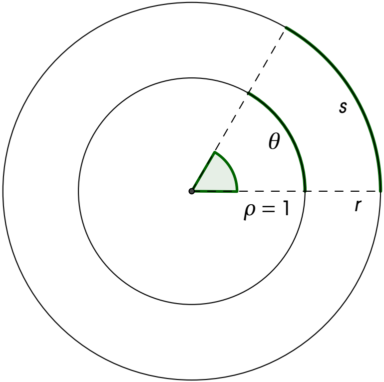
Έτσι

$$30^\circ = \frac{\pi}{6}, \qquad 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \qquad 60^\circ = \frac{\pi}{3}, \qquad 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \qquad \cdots$$

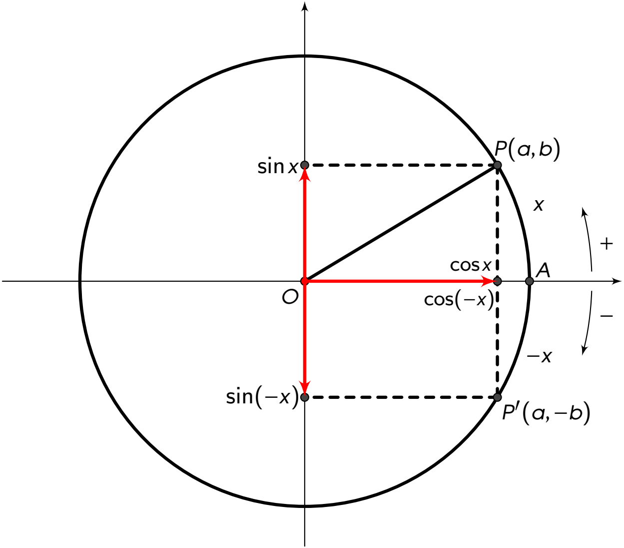
Απόρροια του ορισμού του ακτινίου είναι ότι αν s είναι το μήκος ενός τόξου κύκλου ακτίνας $\rho = r$ και θ είναι το μέτρο σε ακτίνια της επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί στο τόξο, τότε

$$s = \theta r.$$

Το γεγονός αυτό συμφωνεί με το γνωστό αποτέλεσμα ότι το μήκος της περιφέρειας ακτίνας r είναι ίσο με $2\pi r$.



Θεωρούμε ένα σύστημα αξόνων κάθετων μεταξύ τους, έναν οριζόντιο και έναν κατακόρυφο, και έναν κύκλο ακτίνας 1 με κέντρο στην αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια ορίζουμε προσανατολισμό στον κύκλο. Θεωρούμε σαν αρχή μέτρησης το σημείο $(1,0)$ της περιφέρειας, το σημείο A στο Σχήμα. Ορίζουμε σαν **θετική φορά** διαγραφής εκείνη κατά την οποία η κίνηση γίνεται αντίθετα από αυτήν των δεικτών του ρολογιού, και **αρνητική φορά** την αντίθετη, δηλαδή εκείνη κατά την οποία η κίνηση ακολουθεί αυτήν των δεικτών. Τον προσανατολισμένο μοναδιαίο κύκλο ονομάζουμε **τριγωνομετρικό κύκλο**.



Σχήμα: Ο τριγωνομετρικός κύκλος Ι

Έστω x ένας πραγματικός αριθμός ώστε $-\pi \le x \le \pi$. Έστω P το σημείο πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο έτσι ώστε το τόξο AP να είναι ίσο με x rad. Εννοείται ότι αν $x < 0$, τότε το τόξο AP έχει μήκος $|x|$ και η μετάβαση από το A στο P γίνεται κατά την αρνητική φορά. Αν (a, b) είναι οι συντεταγμένες του σημείου P ορίζουμε

$$\cos x = a \qquad \text{και} \qquad \sin x = b.$$

Σημειώνουμε ότι αν $x = \pi$ ή $x = -\pi$, τότε $P = (-1, 0)$. Μια άμεση συνέπεια του ορισμού είναι ότι

$$\cos(-x) = \cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x. \tag{7}$$

Επεκτείνοντας τον ορισμό για $-\pi \le x \le \pi$ και $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \text{και} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin x.$$

Έτσι ορίζουμε πρακτικά τις **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** $\cos x$ και $\sin x$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Παρατηρούμε ότι

$$-1 \le \cos x \le 1 \qquad \text{και} \qquad -1 \le \sin x \le 1 \tag{8}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις σχέσεις

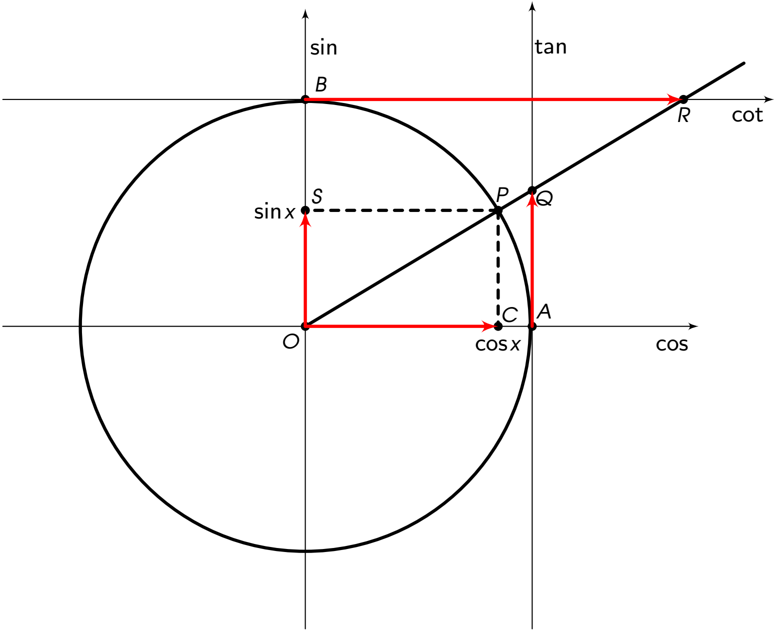
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Οι κλασματικές αυτές συναρτήσεις ορίζονται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από τις διακριτές τιμές του x για τις οποίες μηδενίζεται ο παρονομαστής. Συγκεκριμένα, επειδή

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad \text{και} \qquad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

έπεται ότι τα πεδία ορισμού αυτών των συναρτήσεων είναι

$$D(\tan) = D(\sec) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi + \pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$$
$$D(\cot) = D(\csc) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$


sin
tan
B
R
cot
S
P
Q
sin x
C
A
O
cos x
cos

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
2. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
3. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
4. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$.
5. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$.
6. $\sin x - \sin y = 2\cos \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$.
7. $\cos x - \cos y = -2\sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$.

´Ασκηση

Για $x \in \mathbb{R}$ δείξτε ότι

(α΄) $\cos(\pi \pm x) = -\cos x$.

(β΄) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \mp \sin x$.

(γ΄) $\sin(\pi \pm x) = \pm \sin x$.

(δ΄) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm x\right) = \cos x$.

Έστω $0 < x < \pi/2$ και έστω P το σημείο στον τριγωνομετρικό κύκλο ώστε το μήκος του τόξου AP να είναι x. Η ημιευθεία από το κέντρο O του κύκλου δια του P τέμνει τον άξονα των εφαπτομένων στο Q, βλέπε Σχήμα. Αν C είναι η προβολή του P στον οριζόντιο άξονα, τότε

$$\text{Εμβαδόν τριγώνου } POC \leq \text{Εμβαδόν τομέα } POA \leq \text{Εμβαδόν τριγώνου } QOA$$

$$\frac{1}{2}(\cos x)(\sin x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x$$

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Επειδή

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

και η $\cos x$ είναι άρτα συνάρτηση έπεται ότι

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{\cos x}, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Αν στο Σχήμα θεωρήσουμε το ευθύγραμμο τμήμα PA, τότε αφενός $PC < AP$, αφού η AP είναι η υποτείνουσα στο τρίγωνο PCA, και αφετέρου $AP <$ τόξο AP (γιατί;) έτσι ισχύει η ανισότητα

$$0 < \sin x < x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

επιπλέον από την απόδειξη της (9)

$$0 < \sin x < x \leq \tan x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

οπότε και

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

Άμεση συνέπεια της (10) είναι η

$$|\sin x| \leq |x|, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$