ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Διάλεξη 1

Σύνολα
Οι πραγματικοί αριθμοί

Ε. Στεφανόπουλος

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Πατρών

1 Οκτωβρίου 2019

Διδάσκων:

Ευάγγελος Στεφανόπουλος

Φροντιστηριακές Ασκήσεις:

Βασιλική Λύκουρα

῞Ωρες Γραφείου:

Δευτέρα: 09:00 – 11:00, Τρίτη 13:00-14:00 (αν δεν υπάρχει συνέλευση), ή κατόπιν συνεννόησης.

Συγγράμματα:

- Βιβλίο (77107082): **Thomas Απειροστικός Λογισμός**, (George B. Thomas Jr.), Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D. Weir, (μετάφραση) Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- Βιβλίο (77109719): **Απειροστικός λογισμός**, Briggs William, Cochran Lyle, Gillett Bernard (μετάφραση), Εκδόσεις Κριτική .

• Η έννοια του **συνόλου** (set) είναι αρχική και δεν επιδέχεται ορισμού. Ωστόσο λέγοντας σύνολο εννοούμε μια συλλογή διακεκριμμένων αντικειμένων που αποτελούν ολότητα. Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των κορυφών ενός πολυγώνου, το σύνολο των σημείων ενός ευθυγράμμου τμήματος, το σύνολο των λέξεων στον πρώτο στίχο της Ιλιάδας.

• Τα σύνολα τα συμβολίζουμε, συνήθως, με κεφαλαία γράμματα $A, B, \ldots$. Ένα αντικείμενο που ανήκει στο σύνολο A λέγεται **στοιχείο** ή **σημείο** του A. Τα στοιχεία συνόλων τα συμβολίζουμε με μικρά γράμματα. Εάν το x είναι στοιχείο του A γράφουμε $x \in A$ και λέμε ότι το x **ανήκει** στο A ή ότι το x είναι στοιχείο του A. Εάν το x δεν είναι στοιχείο του A γράφουμε $x \notin A$.

• Εάν A και B είναι δύο σύνολα θα λέμε ότι το A είναι **υποσύνολο** (subset) του B και γράφουμε $A \subseteq B$ ή $B \supseteq A$ εάν κάθε στοιχείο του A περιέχεται στο σύνολο B. Παρατηρούμε ότι για κάθε σύνολο A ισχύει $A \subseteq A$. Μερικές φορές θέλοντας να δηλώσουμε ότι το A είναι **γνήσιο υποσύνολο** του B, υπάρχει δηλαδή στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A γράφουμε $A \subsetneq B$.

• Λέμε ότι δύο σύνολα A και B είναι **ίσα** και γράφουμε $A = B$ εάν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Εάν τα A και B δεν είναι ίσα γράφουμε $A \neq B$.

Θεώρημα

Έστω A και B να είναι δύο σύνολα. Εάν $A = B$ τότε $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$.

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι $A = B$ και δείχνουμε ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Έστω $x \in A$ τότε $x \in B$, γιατί $A = B$, άρα $A \subseteq B$. Όμοια εάν $x \in B$ τότε $x \in A$, άρα $B \subseteq A$. Υποθέτουμε τώρα ότι $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και κάθε στοιχείο του B είναι και του A. Άρα $A = B$. $\square$

Ένα σύνολο μπορεί να δηλωθεί με **αναγραφή** των στοιχείων του, για παράδειγμα εάν A είναι το σύνολο των φωνηέντων του ελληνικού αλφαβήτου, τότε γράφουμε

$$A = \{\text{α}, \text{ε}, \text{η}, \text{ι}, \text{ο}, \text{υ}, \text{ω}\},$$

ή με **περιγραφή** των στοιχείων του όπου για το ίδιο παράδειγμα θα έχουμε

$$A = \{x : x \text{ είναι φωνήεν του ελληνικού αλφαβήτου}\}.$$

Παράδειγμα

Εάν D είναι το σύνολο των λέξεων μήκους τρία που παράγονται με αλφάβητο το $\{0,1\}$, τότε

$$D = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}, \quad \text{ή}$$
$$D = \{xyz : x \in \{0,1\},\ y \in \{0,1\},\ z \in \{0,1\}\}$$
$$\text{πλήθος στοιχείων του } D = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 2^3.$$

• Το σύνολο που περιέχει κανένα στοιχείο λέγεται **κενό σύνολο** (empty set ή null set) και συμβολίζεται με $\varnothing$. Σημειώνουμε ότι εάν A είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο τότε $\varnothing \subseteq A$ γιατί κάθε στοιχείο του $\varnothing$ περιέχεται στο A, ισοδύναμα δεν υπάρχει στοιχείο του $\varnothing$ που να μη περιέχεται στο A.

• Σε αρκετές περιπτώσεις τα σύνολα που χρησιμοποιούμε είναι ή θεωρούνται υποσύνολα ενός και του αυτού συνόλου το οποίο θα ονομάζουμε **βασικό σύνολο**, ή **σύμπαν** (universe). Συνήθως το συμβολίζουμε με Ω. Παρατηρούμε ότι για κάθε υποσύνολο A του Ω έχουμε $\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$.

Πράξεις μεταξύ συνόλων

Έστω A και B υποσύνολα του Ω.

1. Η **ένωση** (union) των A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα A και B. Συμβολίζεται με $A \cup B$, έτσι
$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}. \tag{1}$$
2. Η **τομή** (intersection) των A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B. Συμβολίζεται με $A \cap B$, έτσι
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}. \tag{2}$$
3. Η **διαφορά** (difference) του A από το B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του A που δεν ανήκουν στο B. Συμβολίζεται με $A \smallsetminus B$, έτσι
$$A \smallsetminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}. \tag{3}$$

Παρατηρούμε ότι $A \cup B = B \cup A$ και $A \cap B = B \cap A$, ενώ $A \smallsetminus B \neq B \smallsetminus A$. Εάν $A \cap B = \varnothing$ τότε τα σύνολα A και B λέγονται **ξένα μεταξύ τους** ή **διαζευγμένα**.

4. Το **συμπλήρωμα** (complement) ενός συνόλου A ως προς το σύμπαν Ω είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο A. Συμβολίζεται με A^c, έτσι

$$A^c = \{x : x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}. \tag{4}$$

Συγκρίνοντας με την (3) βλέπουμε ότι

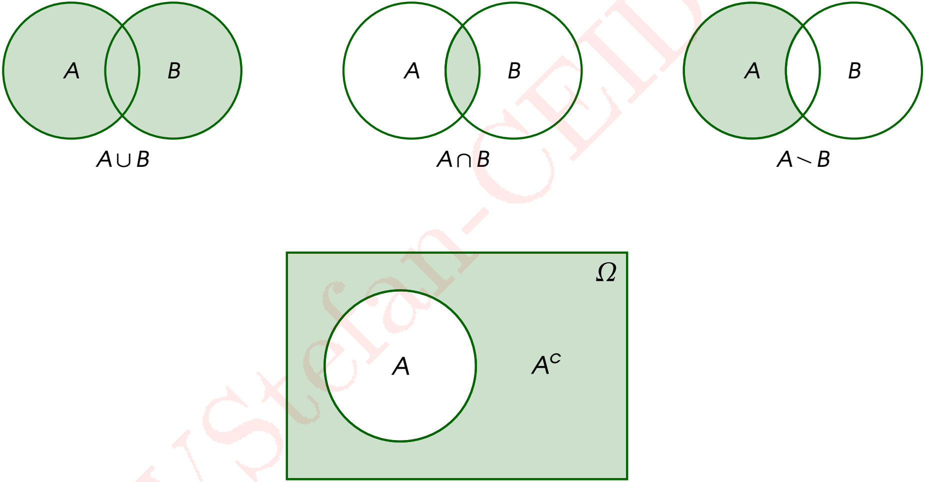
$$A^c = \Omega \smallsetminus A. \tag{5}$$

Επιπλέον ισχύουν οι νόμοι

$$A \cup A^c = \Omega, \qquad A \cap A^c = \varnothing, \qquad (A^c)^c = A. \tag{6}$$

Από την (3) επίσης έχουμε

$$A \smallsetminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\} = \{x : x \in A \text{ και } x \in B^c\} = A \cap B^c. \tag{7}$$



Σχήμα: Η ένωση $A \cup B$, η τομή $A \cap B$, η διαφορά $A \setminus B$ και το συμπλήρωμα συνόλου.

Ιδιότητες και συνέπειες των πράξεων

Εάν A, B, C είναι σύνολα, υποσύνολα του Ω, τότε ισχύουν οι ιδιότητες/νόμοι:

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing, \qquad A \setminus \varnothing = A, \tag{8}$$

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A, \qquad A \setminus A = \varnothing. \tag{9}$$

Αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A. \tag{10}$$

Προσεταιριστική ιδιότητα:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{11}$$

Επιμεριστική ιδιότητα:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{12}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{13}$$

Νόμοι του De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. \tag{14}$$

Ορισμός

Το **καρτεσιανό γινόμενο** (cartesian product) των μη κενών συνόλων A και B είναι το σύνολο όλων των στοιχείων της μορφής (a,b) όπου $a \in A$ και $b \in B$. Συμβολίζεται με $A \times B$, έτσι

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ και } b \in B\}. \tag{15}$$

Το στοιχείο (a,b) λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος** με πρώτο στοιχείο το a και δεύτερο το b.

Η ισότητα στο καρτεσιανό γινόμενο ορίζεται με τη σχέση

$$(a,b) = (a',b') \quad \text{εάν και μόνον εάν } a = a' \text{ και } b = b'. \tag{16}$$

Κατά συνέπεια $(a,b) \neq (b,a)$ εκτός εάν $a = b$. Εν γένει $A \times B \neq B \times A$. Εάν $A = B$ γράφουμε $A \times A = A^2$.

Ορισμός

Εάν A είναι ένα σύνολο με $\mathscr{P}(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Έτσι

$$\mathscr{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}. \tag{17}$$

Το σύνολο $\mathscr{P}(A)$ λέγεται **δυναμοσύνολο** (power set) του A.

Βλέπουμε αμέσως ότι $\varnothing \in \mathscr{P}(A)$ και $A \in \mathscr{P}(A)$. Τονίζουμε ότι τα στοιχεία του δυναμοσυνόλου είναι σύνολα.

Παράδειγμα

Εάν $A = \{0, 1, 2\}$, τότε

$$\mathscr{P}(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι εάν το A αποτελείται από n στοιχεία τότε το $\mathscr{P}(A)$ περιέχει 2^n στοιχεία.

Παρατήρηση

Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο τότε ισχύουν τα παρακάτω

$$\varnothing \neq \{\varnothing\}, \quad \varnothing \subseteq A, \quad \varnothing \subseteq \mathscr{P}(A), \quad \varnothing \in \mathscr{P}(A), \quad \{\varnothing\} \subseteq \mathscr{P}(A).$$

Να δοθεί παράδειγμα συνόλου A τέτοιου ώστε $\varnothing \in A$.

Παρατήρηση (Γενικεύσεις)

Ας θεωρήσουμε την οικογένεια συνόλων $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, τότε ορίζουμε

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ &= \{x : x \in A_k \text{ για ένα τουλάχιστον } k \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ \bigcap_{k=1}^{n} A_k &= A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \\ &= \{x : x \in A_k \text{ για κάθε } k \in \{1, 2, \dots, n\}\}\end{aligned}$$

Οι **φυσικοί** αριθμοί είναι οι αριθμοί που χρησιμοποιούμε για να μετράμε. Οι **ακέραιοι** αριθμοί είναι όλοι οι φυσικοί, το μηδέν, καθώς και οι αρνητικοί των φυσικών αριθμών, έτσι ώστε εάν m είναι ακέραιος, η εξίσωση $m+n=0$ έχει λύση στους ακεραίους, γεγονός που δεν συμβαίνει στους φυσικούς. Οι **ρητοί** αριθμοί είναι όλα τα κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακεραίους αριθμούς, όπου βέβαια ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδενός. Οι ρητοί αριθμοί περιέχουν τους ακεραίους μιας και εάν ο n είναι ακέραιος, τότε $n = n/1$, οπότε ο n είναι ρητός. Επιπλέον εάν $r \neq 0$ είναι ρητός η εξίσωση $rs = 1$ έχει λύση στους ρητούς, γεγονός που δεν συμβαίνει στους ακεραίους. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1,2,3,\dots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\} \\
\mathbb{Q} &= \{m/n : \text{ο } m \text{ είναι ακέραιος και ο } n \text{ φυσικός}\}
\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί λέγονται **άρρητοι**. Ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς να είναι

$$\mathbb{R} = \{x : \text{ο } x \text{ είναι είτε ρητός, είτε άρρητος}\}.$$

Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε δύο πράξεις, την πρόσθεση ``+'' και τον πολλαπλασιασμό ``$\cdot$'' ώστε αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $x + y \in \mathbb{R}$ και $x \cdot y \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι νόμοι

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $0 \in \mathbb{R}$ που λέγεται **μηδέν** ώστε $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός $x' \in \mathbb{R}$, ώστε $x + x' = 0$. Ο πραγματικός αριθμός x' λέγεται ο **αντίθετος** του x και συμβολίζεται με $-x$.
5. $x \cdot y = y \cdot x$.
6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
7. Υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $1 \in \mathbb{R}$ που λέγεται **ένα** ώστε $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
8. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 0$ υπάρχει μοναδικός $x'' \in \mathbb{R}$, ώστε $x \cdot x'' = 1$. Ο πραγματικός αριθμός x'' λέγεται ο **αντίστροφος** του x και συμβολίζεται με x^{-1}, ή $1/x$.
9. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Παρατήρηση

Εάν x και y, είναι πραγματικοί αριθμοί ο πραγματικός αριθμός $x+y$ λέγεται **άθροισμα** των x και y, ενώ ο $x \cdot y$ λέγεται **γινόμενο** των x και y. Συνήθως το γινόμενο γράφεται xy. Ορίζουμε τη πράξη της **αφαίρεσης** με τη σχέση

$$y - x = y + (-x).$$

Παρόμοια εάν x και y, είναι πραγματικοί αριθμοί και $x \neq 0$ ορίζουμε το **πηλίκο** του y δια x με τη σχέση

$$\frac{y}{x} = yx^{-1} = y\frac{1}{x}.$$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ορίζεται μία σχέση η **διάταξη** ``$\leq$'' τέτοια ώστε

10. Εάν $x \leq y$ και $y \leq z$ τότε $x \leq z$.
11. $x \leq y$ και $y \leq x$ εάν και μόνον εάν $x = y$.
12. Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί τότε ή $x \leq y$ ή $y \leq x$.
13. Εάν $x \leq y$ τότε $x + z \leq y + z$ για κάθε πραγματικό αριθμό z.
14. Εάν $0 \leq x$ και $0 \leq y$ τότε $0 \leq x \cdot y$.

Παρατήρηση

Εάν $x \leq y$ γράφουμε $y \geq x$. Επίσης εάν $x \leq y$ και $y - x \neq 0$ γράφουμε $x < y$, ή $y > x$. Ένας αριθμός x λέγεται **θετικός** εάν $x > 0$ και **αρνητικός** εάν $x < 0$.

Ορισμός

Αν $S \subset \mathbb{R}$ για το οποίο υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \leq x$, το σύνολο S λέγεται **άνω φραγμένο** και το x λέγεται ένα **άνω φράγμα** του S. Εάν $s \in \mathbb{R}$ είναι ένα άνω φράγμα του S τέτοιο ώστε $s \leq x$ για κάθε άνω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **ελάχιστο άνω φράγμα** ή supremum του S και συμβολίζεται με $\sup S$.

15. Εάν S είναι ένα άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών, τότε υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του S.

Παρατήρηση

Εάν A είναι ένα τυχαίο σύνολο εφοδιασμένο με δύο εσωτερικές πράξεις $\oplus$ και $\odot$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες/αξιώματα 1–9 με $\oplus$ στη θέση του $+$ και $\odot$ στη θέση του $\cdot$, τότε η τριάδα $(A, \oplus, \odot)$ λέγεται **σώμα**. Άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τις γνωστές πράξεις αποτελούν σώμα. Ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 10–14 λέγεται **διατεταγμένο σώμα**, ενώ εάν επιπλέον ικανοποιεί και το αξίωμα 15 λέγεται **πλήρως διατεταγμένο σώμα**, άρα οι πραγματικοί αριθμοί με τη γνωστή διάταξη αποτελούν ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα. Αποδεικνύεται ότι το σώμα των πραγματικών αριθμών είναι κατά κάποιο τρόπο μοναδικό, με την έννοια ότι κάθε σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15 είναι ταυτόσημο με το $\mathbb{R}$, **ίσομορφο** με το $\mathbb{R}$ στη γλώσσα της άλγεβρας.

Αυτό σημαίνει (θεωρώντας ότι γνωρίζουμε τα βασικά για συναρτήσεις) ότι εάν $(A, \oplus, \odot, \preccurlyeq)$ είναι ένα σώμα που ικανοποιεί τα αξιώματα 1–15, είναι δηλαδή ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα, τότε υπάρχει μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ ένα προς ένα και επί τέτοια ώστε εάν x και y είναι στοιχεία του A, τότε

$$f(x \oplus y) = f(x) + f(y), \qquad f(x \odot y) = f(x)f(y), \qquad x \preccurlyeq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y).$$

- Εάν ο n είναι φυσικός αριθμός και ο x είναι πραγματικός αριθμός γράφουμε

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n} = (\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n})x$$

και ορίζουμε

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n}.$$

Συμφωνούμε ότι για $x \neq 0$ να γράφουμε $x^0 = 1$.

Ορισμός

Εάν x είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **απόλυτη τιμή** του x με τη σχέση

$$|x| = \begin{cases} x & \text{εάν } x \geq 0 \\ -x & \text{εάν } x < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $|x| \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άμεση συνέπεια του ορισμού είναι η ανισότητα

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Θεώρημα (Ιδιότητες της απόλυτης τιμής)

Εάν x και y είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες της απόλυτης τιμής:

1. $|x| \geq 0$ *και* $|x| = 0$, *εάν και μόνον εάν* $x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x/y| = |x|/|y|, \quad y \neq 0$
4. $|x| = |-x|$
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *Η ανισότητα αυτή είναι η* ***τριγωνική ανισότητα***
6. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Ορισμός

Εάν $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την **τετραγωνική ρίζα** του x, $\sqrt{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^2 = x$, δηλαδή

$$\sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x.$$

Ειδικά

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Γενικότερα αν n είναι **άρτιος** φυσικός αριθμός και $x \geq 0$ είναι ένας πραγματικός αριθμός ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο (μοναδικός) πραγματικός αριθμός $y \geq 0$ για τον οποίο ισχύει $y^n = x$, δηλαδή

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x. \tag{18}$$

Αν n είναι **περιττός** φυσικός αριθμός και $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την ***n*-οστή ρίζα** του x, $\sqrt[n]{x}$ να είναι ο πραγματικός αριθμός y που ικανοποιεί την (18). Για τη n-οστή ρίζα του $x \in \mathbb{R}$, γράφουμε επίσης

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Δυνάμεις

Αν $x \neq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

Αν $x \geq 0$ (ή $x > 0$ όταν χρειάζεται) και $r = m/n \in \mathbb{Q}$ με $n > 0$ ορίζουμε

$$x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$$

ώστε $x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}$. Έτσι αν r και s είναι ρητοί αριθμοί και $x \geq 0$, $y \geq 0$, (ή αυστηρά θετικοί όπου χρειάζεται) είναι πραγματικοί αριθμοί τότε

Δ1. $x^{r+s} = x^r x^s$

Δ2. $x^{r-s} = \dfrac{x^r}{x^s}$

Δ3. $(x^r)^s = x^{rs}$

Δ4. $(xy)^r = x^r y^r$

Δ5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^r = \dfrac{x^r}{y^r}$.

Θεώρημα

Εάν $x < y$ τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός z τέτοιος ώστε $x < z$ και $z < y$.

Εάν $x < z$ και $z < y$ γράφουμε $x < z < y$. Το Θεώρημα εκφράζει την **πυκνότητα** των πραγματικών αριθμών.
Εάν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί με $a < b$, τότε με τα **διαστήματα**

$$(a,b), \qquad [a,b), \qquad (a,b], \qquad [a,b]$$

συμβολίζουμε αντίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x με

$$a < x < b, \qquad a \leq x < b, \qquad a < x \leq b, \qquad a \leq x \leq b.$$

Θεωρώντας τα σύμβολα $-\infty$ και $+\infty$, αντίστοιχα, **μείον άπειρο** και **σύν άπειρο**, ώστε $-\infty < x < +\infty$, $\forall x \in \mathbb{R}$, μπορούμε να γράφουμε $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Έτσι εάν $a \in \mathbb{R}$ με τα ημιάπειρα διαστήματα

$$(-\infty, a), \qquad (-\infty, a], \qquad (a, +\infty), \qquad [a, +\infty)$$

συμβολίζουμε ανίστοιχα τα σύνολα των πραγματικών αριθμών x με

$$x < a, \qquad x \leq a, \qquad x > a, \qquad x \geq a.$$

Παράδειγμα

Εάν $S=(1,2)$, τότε το 2 καθώς και κάθε πραγματικός αριθμός $x \geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S. Όμοια εάν $S=(1,2]$, τότε κάθε $x \geq 2$ είναι ένα άνω φράγμα του S. Παρατηρούμε ότι εάν $S=(1,2)$, τότε $\sup S=2$ και $\sup S \notin S$, ενώ αν $S=(1,2]$, τότε $\sup S=2$ και $\sup S \in S$, δηλαδή το ελάχιστο άνω φράγμα συνόλου μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο σύνολο. Παρατηρούμε ότι το $\sup(1,+\infty)$ δεν υπάρχει (γιατί;).

Άσκηση

Να βρεθεί το supremum του συνόλου

$$A=\left\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

• Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ λέγεται **κάτω φραγμένο** εάν υπάρχει πραγματικός αριθμός x τέτοιος ώστε για κάθε $y \in S$ να ισχύει $y \geq x$. Το x λέγεται ένα **κάτω φράγμα** του S. Εάν s είναι ένα κάτω φράγμα ώστε $s \geq x$ για κάθε κάτω φράγμα x του S, τότε ο s λέγεται **μέγιστο κάτω φράγμα** ή infimum του S και συμβολίζεται με $\inf S$.

Θεώρημα

Κάθε κάτω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Άσκηση

Εάν $S \subset \mathbb{R}$, τότε ορίζουμε $-S = \{-x : x \in S\}$, δηλαδή $-[1,2) = (-2,-1]$. Να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί:

- (α΄) Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι κάτω φραγμένο.
- (β΄) Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο εάν και μόνον εάν το $-S$ είναι άνω φραγμένο. **Υπόδειξη**: $-(-S) = S$.
- (γ΄) $\sup S = -\inf(-S)$ και $\inf S = -\sup(-S)$.

Θεώρημα (Ύπαρξη του ακεραίου μέρους πραγματικού αριθμού)

Εάν $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος m_x ώστε $m_x \leq x < m_x + 1$.

Ορισμός

Εάν $x \in \mathbb{R}$, ο μοναδικός ακέραιος, την ύπαρξη του οποίου εξασφαλίζει το προηγούμενο Θεώρημα, λέγεται **ακέραιο μέρος** του x και συμβολίζεται με $[x]$, έτσι $[x] \in \mathbb{Z}$ και $[x] \leq x < [x] + 1$.

Για παράδειγμα $[0.75] = 0$, $[3] = 3$, $[-1.3] = -2$. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $x - 1 < [x] \leq x$.

Θεώρημα (Αξίωμα του Αρχιμήδη)

Εάν x και y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $y < nx$.

Θεώρημα (Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς)

Εάν x και y είναι άρρητοι αριθμοί με $x < y$, τότε υπάρχει ρητός αριθμός r τέτοιος ώστε $x < r < y$.