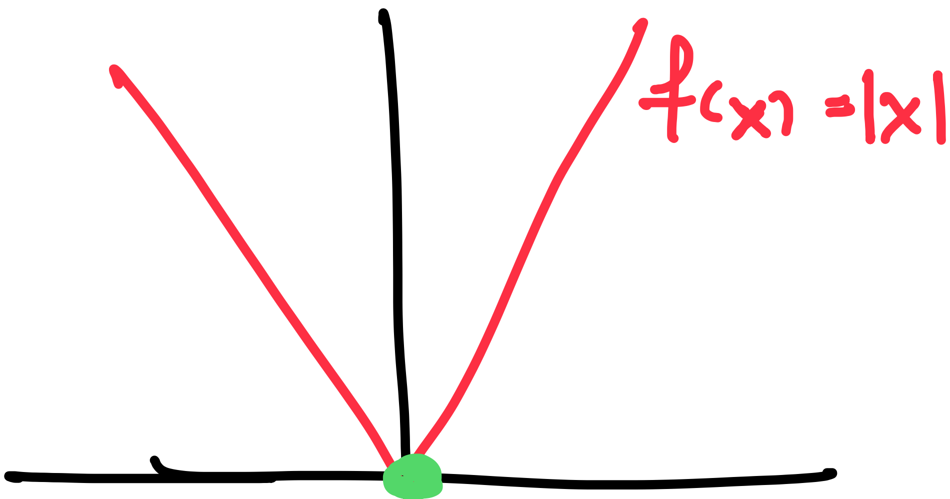
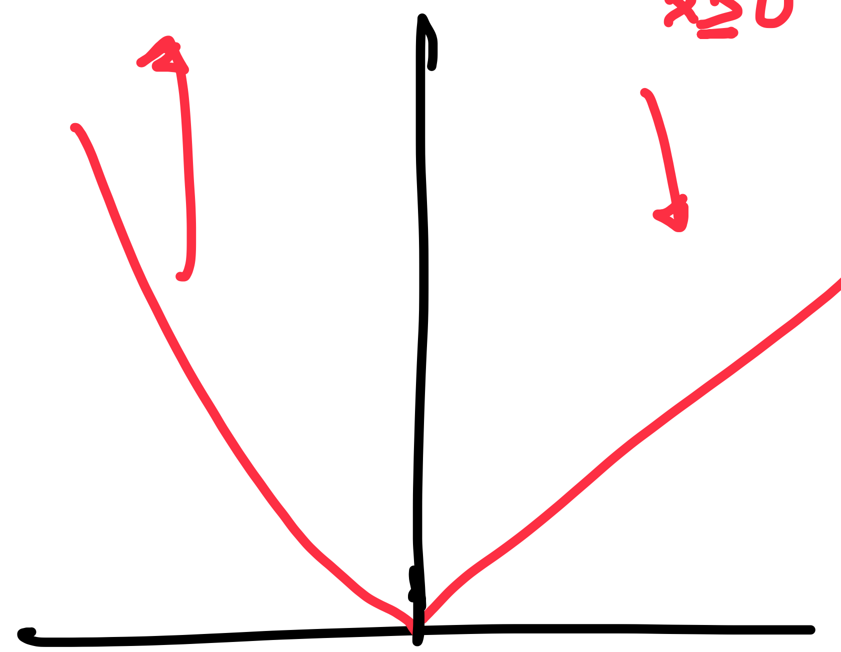
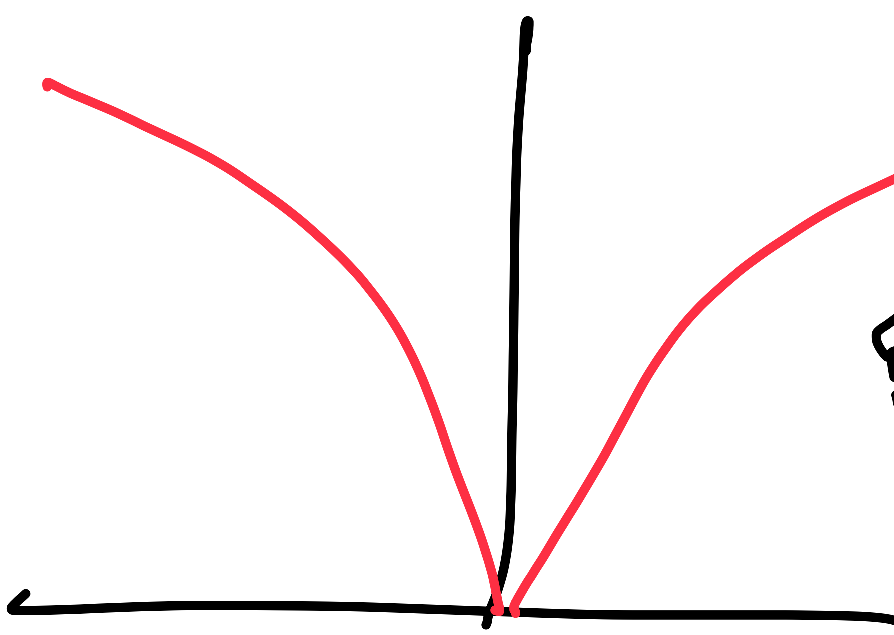
Παράγωγος συνάρτησης μιας μεταβλητής : $f(x)=x^2, x\leq 0$ $f(x)=|x|, x\geq 0$



Σχ.1

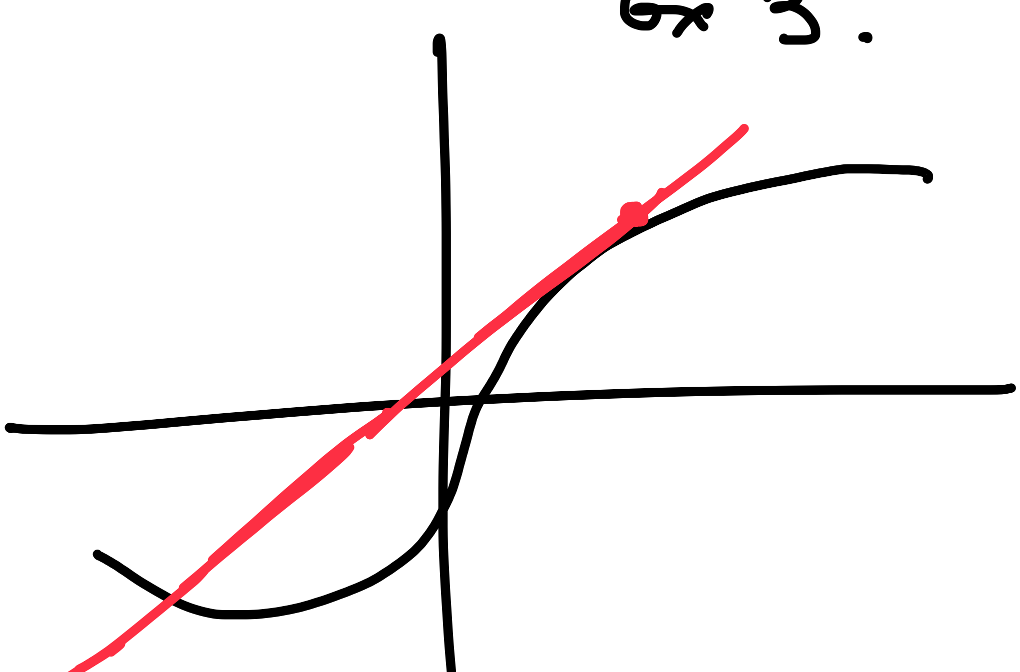


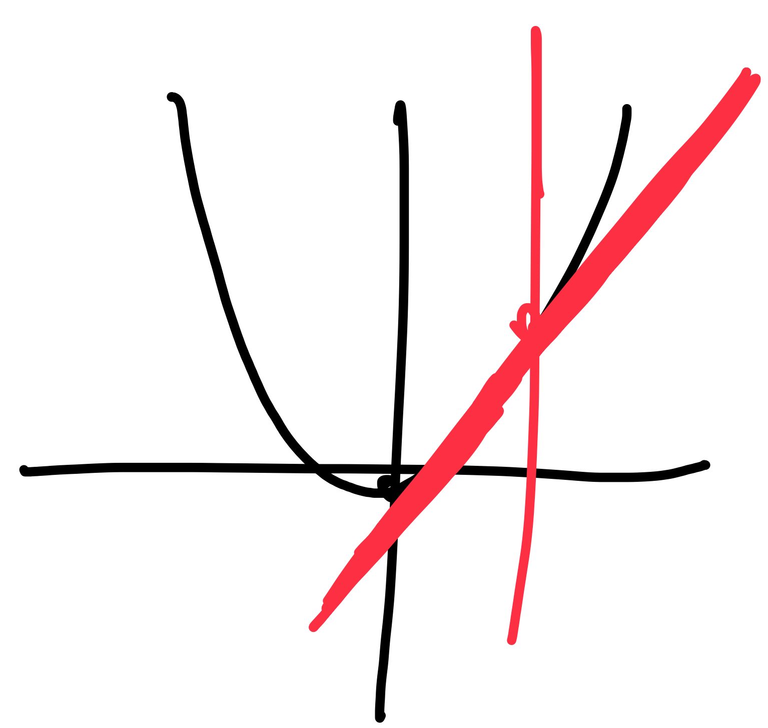
Σχ 2



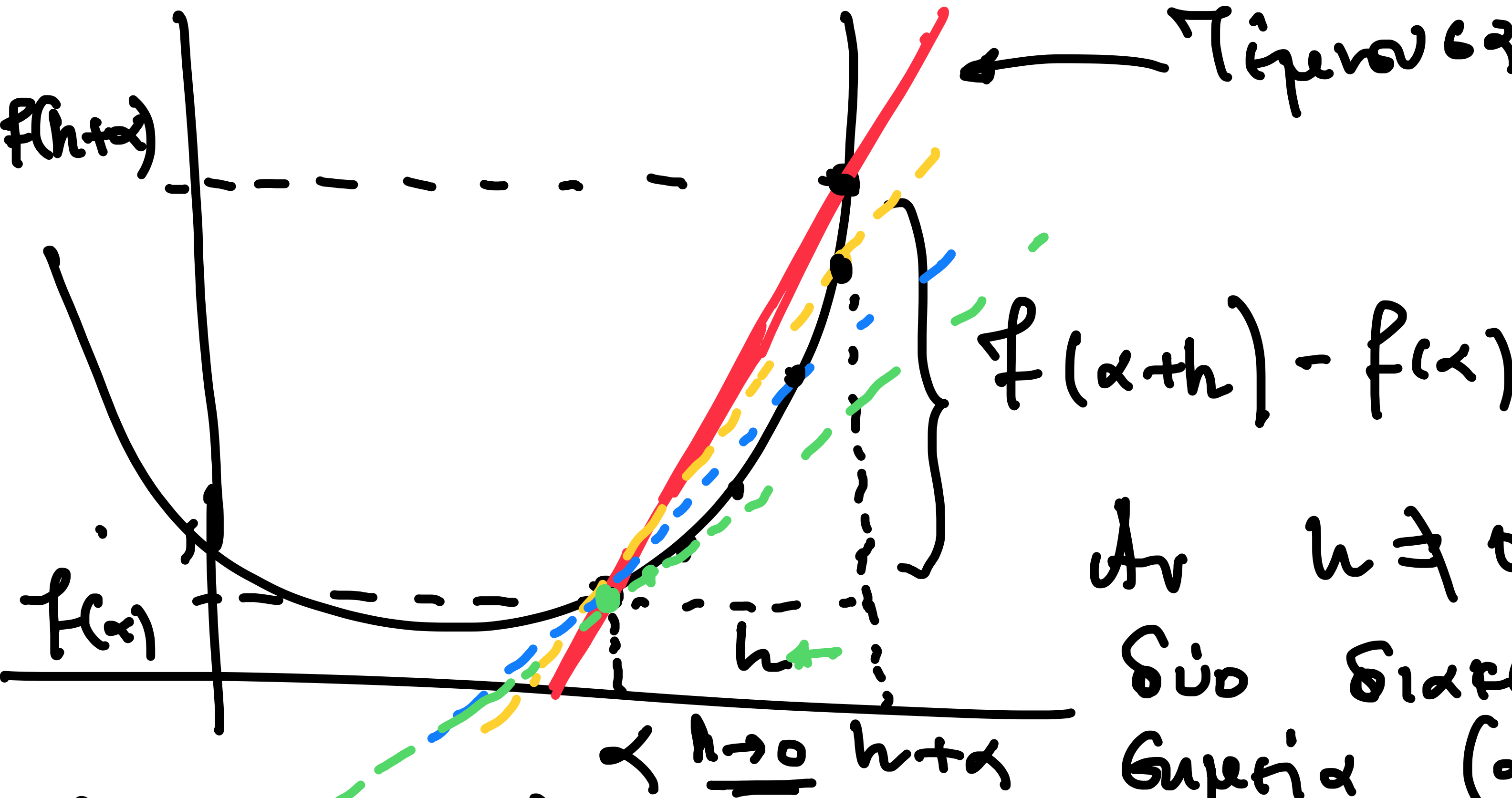
$f(x) = \sqrt{|x|}$

Σχ 3.





Μία πρώτη προσέγγιση:



Αν $h \to 0$ τότε δύο διακεκριμένα σημεία $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\alpha+h, f(\alpha+h))$ δίνουν κλίση:

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

Άρα η "εφαπτομένη" $(\alpha, f(\alpha))$ μοιάζει να είναι όριο αυτών των τεμνουσών (κόκκινο) καθώς το $h \to 0$. Αυτό το όριο της κλίσης:

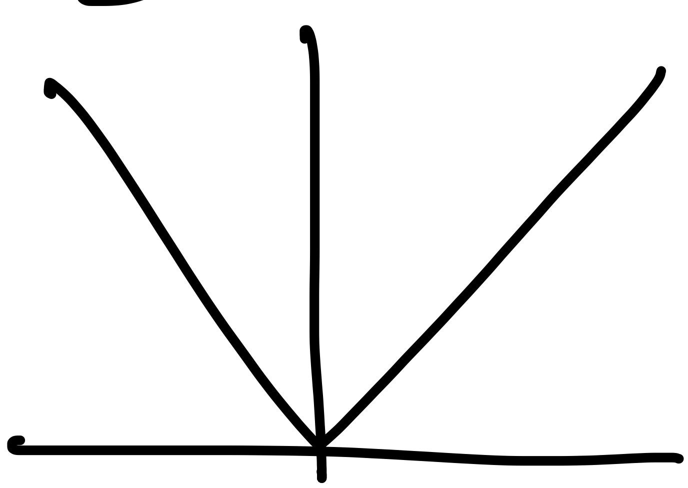
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$$

Ορισμός

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο α αν το $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ υπάρχει.

Σε αυτήν την περίπτωση, το όριο συμβολίζεται με $f'(\alpha)$ και καλείται **παράγωγος** της f στο α.

Δεξιά - Αριστερή Παράγωγο:

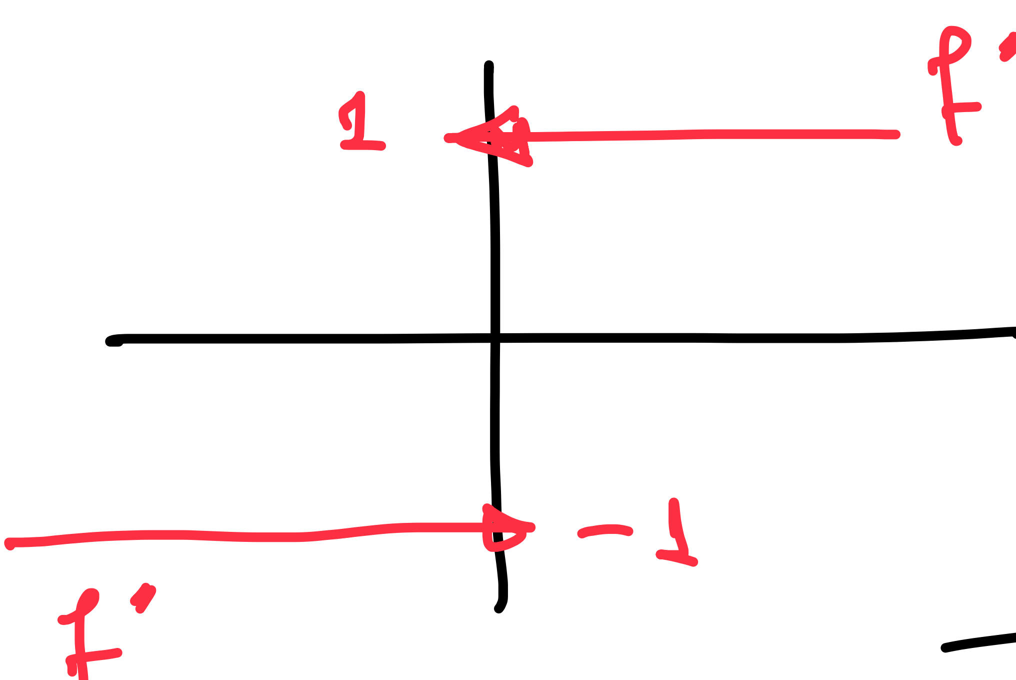


$f(x)=|x|$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε $f'(\alpha)$ υπάρχει και μάλιστα

$f'(x)=1$ αν $x>0$

$f'(x)=-1$ αν $x<0$



$\boxed{\text{Απόδειξη}}$

Παραγωγισιμότητα $\Longrightarrow$ Συνέχεια.

Αν f είναι παρ/μη στο τότε η f είναι συνεχής στο α.

Απόδειξη

Επειδή f παρ/μη στο α γνωρίζουμε

$$f'(\alpha) = \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}.$$

υπάρχει.

Για να δείξουμε ότι f είναι στο α, πρέπει νδο $\lim_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha)$. ......

$$f(x) = f(x) + f(\alpha) - f(\alpha) =$$

$$= \frac{f(x) - f(\alpha)}{(x - \alpha)} (x - \alpha) + f(\alpha)$$

για $x \neq 0$

Παίρνοντας όρια:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{(x - \alpha)} (x - \alpha) + f(\alpha) =$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)}_{f'(\alpha)} \underbrace{\lim_{x\to\alpha}(x-\alpha)}_{0} + \underbrace{\lim_{x\to\alpha} f(\alpha)}_{f(\alpha)}$$

$$= f'(\alpha)\cdot 0 + f(\alpha) = f(\alpha)$$

Ως εκ τούτου: $\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ ∎

Παραδείγματα:

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{7x^{11}}{8}\right) = -\frac{7}{8}\cdot 11\, x^{10} = -\frac{77}{8}x^{10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{8}\sqrt{t}\right) = \frac{3}{8}\,\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{3}{16}\,\frac{1}{\sqrt{t}}$$

Παράδειγμα

Κλίση εφαπτομένης $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$

? f έχει κλίση 6 ?.

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6.$$

$$\iff x^2 - 5x + 4 = 1 \iff$$

$$\iff x^2 - 5x + 3 = 0.$$

⋮

Παράδειγμα παραγώγων μεγαλύτερης

Τάξης.

$$f(x) = 3x^3 - 5x + 12.$$

$$f'(x) = 9x^2 - 5$$

$$f''(x) = 18x$$

$$f'''(x) = 18$$

Παράδειγμα γινομένου - πηλίκου.

$$\frac{d}{dv}\left(v^2\left(2\sqrt{v}+1\right)\right) = 2v\left(2\sqrt{v}+1\right)+v^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= 4v\sqrt{v} + 2v + \frac{v^2}{\sqrt{n}} =$$

$$= 4v\cdot v^{1/2} + 2v + v^{2-1/2} =$$

$$= 4v^{3/2} + 2v + v^{3/2} =$$

$$= 5v^{3/2} + 2v$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-1}\right) = \frac{(2x+3)(x^2-1) - 2x(x^2+3x+4)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} - 2x + 3x^2 - 3 - \cancel{2x^3} - 6x^2 - 8x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{-6x^2-10x-3}{(x^2-1)^2}$$

Παράδειγμα Κανόνας Δύναμης

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{3t^{16}-4}{t^{6}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{3t^{16}}{t^{6}} - \frac{4}{t^{6}}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(3t^{10} - 4t^{-6}\right) =$$

$$= 30t^{9} + 24t^{-7}$$

Παράδειγμα

$$y = \frac{4x\left(2x^{3} - 3x^{-1}\right)}{x^{2}+1}$$

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$y = \frac{4x\left(2x^3 - 3x^{-1}\right)}{x^2+1} \longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(4x\left(2x^3-3x^{-1}\right)\right) - 4x\left(2x^3-3x^{-1}\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^2+1\right)\left[4\left(2x^3-3x^{-1}\right)+4x\left(6x^2+3x^{-2}\right)\right] - 8x^2\left(2x^3-3x^{-1}\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{8x^3 - \cancel{12x^{-1}} + 24x^3 + \cancel{12x^{-1}}}{x^2+1} - \frac{16x^5+24x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

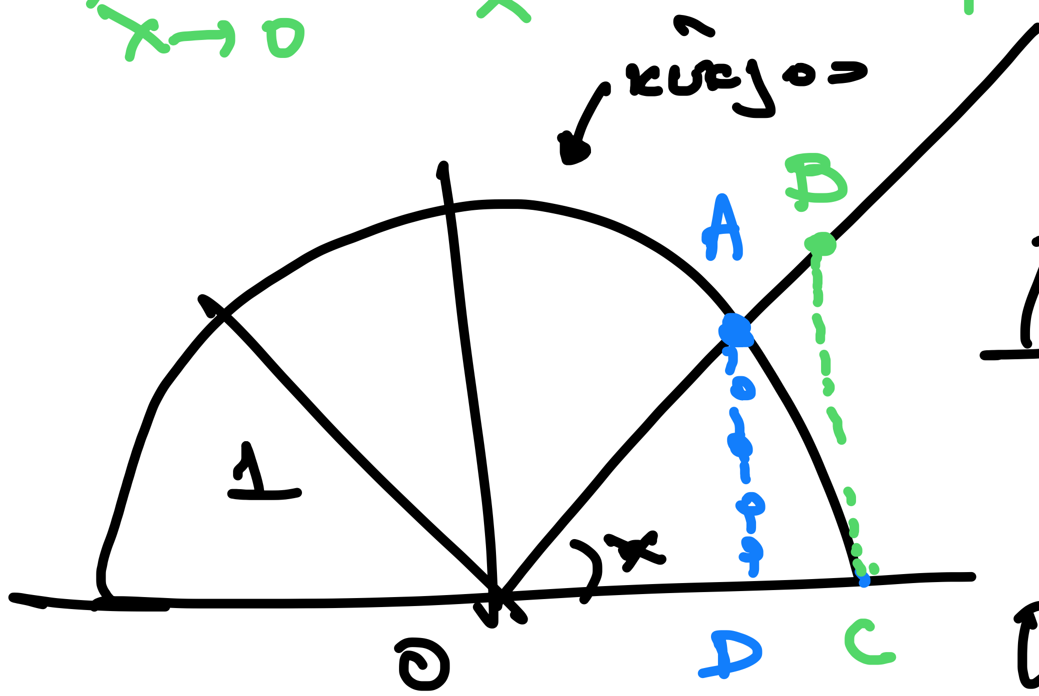
$$= \frac{32x^3\left(x^2+1\right) - 16x^5 - 24x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{32x^5 + 32x^3 - 16x^5 - 24x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{16x^5 + 32x^3 - 24x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{8x\left(2x^4+4x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Παράγωγοι Τριγωνομετρικών:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$$



$\Delta\, OBC$, $\Delta\, OAD$

και τομέας OAC

$0 < x < \frac{\pi}{2}$

Από γεωμετρία:

$$E_{\Delta OAD} < E_{\tau o\mu OAC} < E_{\Delta OBC} \quad (1)$$

Επειδή μοναδιαίος κύκλος: $OA = OC = 1$.

<u>Επομένως</u>: $\sin x = \frac{AD}{OA} = AD$.

$\cos x = \frac{OD}{OA} = OD$ και

$\tan x = \frac{BC}{OC} = BC$

$$E_{\triangle OAD} = \frac{1}{2}(OD)(AD) = \frac{1}{2}\cos x \sin x .$$

$$E_{T_{OAC}} = \frac{1}{2}1^2 \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$E_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}(OC)(BC) = \frac{1}{2}\tan x$$

Αντικαθιστώντας στην (1) έχω:

$$\frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\tan x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\xLeftrightarrow{\cdot \frac{2}{\sin x}>0} \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Αντιστρέφω κλάσματα και αντιστρέφω ανισότητες:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{για } 0<x<\frac{\pi}{2}$$

Ισχύει επίσης $-\frac{\pi}{2}<x<0$

Παραδείγματα:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{\cancel{x}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{3 \sin 3x}{3x}}{\frac{5 \sin 5x}{5x}} = \frac{3}{5} \frac{\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}}{\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u}} =$$

$$= \frac{3}{5}$$

Παράγωγος Συναρτήσεων Ημίτονου κ' Συνημιτόνου:

Απόδειξη: $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Με $f(x) = \sin x$ έχω:

$$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$$

Η παράγωγο είναι:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h}$$

$$= \sin x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}}_{0} + \cos x \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}}_{1}$$

$$= \cos x$$

<u>Παράδειγμα</u> :

<u>Νβ</u> την f'' της $f(x) = \csc x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$f''(x) = -\frac{(\cos x)'\sin^2 x - \cos x(\sin^2 x)'}{\sin^4 x} =$$

$$= -\frac{-\sin^3 x - \cos x(2\sin x\cos x)}{\sin^4 x} =$$

$$= \frac{\sin^{\cancel{3}\,2} x + 2\cancel{\sin} x\cos^2 x}{\sin^{\cancel{4}\,3} x} =$$

$$= \frac{1 + \cos^2 x}{\sin^3 x}$$