

Αναδρομικός υπολογισμός συναρτήσεων με ακέραιο όρισμα

1) $square(n) =: square(n-1) + 2(n-1) + 1$
 $square(0) =: 0$

$square(n : integer)$

If $n > 0$

then return $square(n-1) + 2(n-1) + 1$

else return 0

$square(5) =: square(4)+9 =: (square(3)+7)+9 =: ((square(2)+5)+7)+9$

1b) $squareb(n : integer)$

If $n \neq 0$

then return $squareb(n-1) + 2(n-1) + 1$

else return 0

$squareb(-1) =: squareb(-2) + (-3) =: (squareb(-3) + (-5)) + (-3)$

$=: (squareb(-4) + (-7)) + (-5) + (-3)$

$square(-1) =: 0$

2) $cube(n) =: cube(n-1) + 3square(n-1) + 3(n-1) + 1$

$cube(0) =: 0$

Παράδειγμα μαθηματικής επαγωγής

Να αποδειχτεί ότι: για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, ισχύει $n! > (n/e)^n$,
όπου e είναι η γνωστή σταθερά, $e=2,718...$ (βάση των φυσικών λογαρίθμων).

Χρησιμοποιούμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής,
για την προτασιακή συνάρτηση $\Pi(n) = \ll n! > (n/e)^n \gg$.

Αρχική περίπτωση Έστω $n = 1$: ισχύει ότι $1! > (1/e)^1$.

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq 1$, και υποθέτουμε ότι $K! > (K/e)^K$.

Επαληθεύουμε ότι, $(K+1)! > ((K+1)/e)^{K+1}$.

Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε $(K+1)! > (K/e)^K (K+1)$,
οπότε για το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι

$$(K/e)^K (K+1) \geq ((K+1)/e)^{K+1},$$

δηλαδή (μετά από πράξεις) ότι $e \geq (1 + (1/K))^K$, που ισχύει..

Επιβεβαίωση ορθότητας της αναδρομής (1) :

square(n : integer)

If $n > 0$

then return square(n-1) + 2(n-1) + 1

else return 0

Δήλωση ορθότητας της αναδρομής (1) , για τον ακέραιο $n \geq 0$:

$\Delta(n) = \{ \text{ο υπολογισμός της square(n) τερματίζει με αποτέλεσμα } n^2 \}$

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 0$, $\Delta(n)$.

Για κάθε $n \geq 0$, $\{ \text{ο υπολογισμός της square(n) τερματίζει με αποτέλεσμα } n^2 \}$

Αρχική περίπτωση:

Ελέγχουμε ότι αληθεύει $\Delta(0)$

Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο $K \geq 0$: αληθεύει ότι $\Delta(K)$

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω K : αληθεύει ότι $\Delta(K+1)$

square(K+1) =:

=: square(K) + 2(K) + 1 % από ορισμό της square

= $K^2 + 2(K) + 1$ % από υπόθεση για το K

= $(K+1)^2$.

Ορθότητα της αναδρομής (1) :

$\Delta(0)$: square(0) είναι σωστό

Αρχική περίπτωση

$\Delta(1)$: square(1) είναι σωστό

$\Delta(0)$ & Αναδρομικό βήμα για $K=0$

$\Delta(2)$: square(2) είναι σωστό

$\Delta(1)$ & Αναδρομικό βήμα για $K=1$

$\Delta(3)$: square(3) είναι σωστό

$\Delta(2)$ & Αναδρομικό βήμα για $K=2$

...

Άρα: για κάθε $n \geq 0$, $\Delta(n)$.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Επιβεβαιώστε την ορθότητα της αναδρομής (2) :

Χρησιμοποιώντας *μαθηματική επαγωγή*, αποδείξτε ότι:

Για κάθε $n \geq 0$, { ο υπολογισμός της $\text{cube}(n)$ τερματίζει με αποτέλεσμα n^3 }.

$$3) \quad \text{fib}(n) =: \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2)$$

$$\text{fib}(1) =: 1$$

$$\text{fib}(0) =: 1$$

$$\text{fib}(4) =: \text{fib}(3) + \text{fib}(2) =: (\text{fib}(2) + \text{fib}(1)) + (\text{fib}(1) + \text{fib}(1))$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Χρησιμοποιώντας *μαθηματική επαγωγή*, επιβεβαιώστε ότι:

Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $\text{fib}(n) \geq 1,6^{n-1}$.

Δήλωση για την συνάρτηση fib , για τον ακέραιο $n \geq 0$:

$$D(n) = \{ \text{για κάθε ακέραιο } I, 0 \leq I \leq n : \text{fib}(I) \geq 1,6^{I-1} \}$$

Αποδεικνύουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:

Για κάθε $n \geq 0$, $D(n)$.

Αρχική περίπτωση:

Ελέγχουμε ότι αληθεύει $D(0)$

Επαγωγικό βήμα:

Υποθέτουμε ότι για κάποιο τυχαίο $K \geq 0$: **αληθεύει ότι $D(K)$**

$$D(K) = \{ \text{για κάθε ακέραιο } I, 0 \leq I \leq K : \text{fib}(I) \geq 1,6^{I-1} \}$$

Ελέγχουμε ότι για το παραπάνω K : **αληθεύει ότι $D(K+1)$**

$$D(K+1) = \{ \text{για κάθε ακέραιο } I, 0 \leq I \leq K+1 : \text{fib}(I) \geq 1,6^{I-1} \}$$

$$\text{fib}(K+1) =: \text{fib}(K) + \text{fib}(K-1) \quad \% \text{ από ορισμό της } \text{fib}$$

$$\geq 1,6^{K-1} + 1,6^{K-2} \quad \% \text{ από υπόθεση για το } K$$

$$\geq 1,6^K (1,6^{-1} + 1,6^{-2})$$

$$\geq 1,6^K \quad \% \quad 1,6^{-1} + 1,6^{-2} = 1,015625$$

ΕΡΩΤΗΜΑ 3

Έστω η παρακάτω Δηλώσεις για την συνάρτηση fib , για τον ακέραιο $n \geq 0$:

$$E1(n) = \{ fib(n) \geq (1,6)^{n-1} \} ,$$

$$E2(n) = \{ fib(n) \geq (1,6)^{n-1} \text{ και } fib(n-1) \geq (1,6)^{n-2} \} .$$

Χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή, *μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι*

Για κάθε $n \geq 0$, $E1(n)$;

Για κάθε $n \geq 0$, $E2(n)$;