Συντακτική αντικατάσταση (substitution) μεταβλητής με παράσταση

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης, t μία παράσταση, u μία μεταβλητή.

Συμβολίζουμε με φ[t / u] , τον τύπο που προκύπτει ***μεταγράφοντας***

κάθε *ελεύθερη* *εμφάνιση* της μεταβλητής u στον τύπο φ ,

με την παράσταση t .

Παραδείγματα συντακτικής αντικατάστασης

($\forall$z (S(**x** , z , **x**) $\rightarrow$ $\exists$x S(x , z , x))) [f(x , z) / **x**]

είναι ο τύπος $\forall$**z** (S(**f(x , z)** , z , **f(x , z)**) $\rightarrow$ $\exists$x S(x , z, x))

($\forall$z (S(**x** , z , **x**) $\rightarrow$ $\exists$x S(x , z , x)))) [f(x , y) / **x**]

είναι ο τύπος $\forall$z (S(**f(x, y)**, z, **f(x, y)**) $\rightarrow$ ($\exists$x S(x, z, x))))

Θεώρημα Αντικατάστασης

Έστω φ ένας τύπος Α΄ τάξης και t μία παράσταση.

Για ένα δεδομένο μοντέλο M και στοιχεία a1, …, am του πεδίου ορισμού του M :
όταν το ak αντικαθιστά τη μεταβλητή uk ,

t^M (a1, …, am) είναι η τιμή της παράστασης t ,

ϕ^M (a1, …, am) είναι η δήλωση που αντιστοιχεί στον τύπο φ ,

$\phi[t / u1]^M$ (a1, …, am) είναι η δήλωση που αντιστοιχεί στον τύπο φ[t / u1] .

Υποθέτουμε ότι:

Οι εμφανίσεις των μεταβλητών της t στον τύπο φ[t / u1] , *είναι* ***ελεύθερες*** .

Θα αληθεύει ότι:

$\phi[t / u1]^M$ (a1, …, am) = ϕ^M(t^M(a1, …, am) , a2 , …, am) ,

για κάθε φ , t , M , u1 , … , um , a1 , …, am όπως παραπάνω

Επαλήθευση του Θεωρήματος Αντικατάστασης

΄Εστω Λ ένα λεξιλόγιο με ένα σύμβολο σχέσης R με τρία ορίσματα
και ένα σύμβολο συνάρτησης f με δύο ορίσματα.

΄Εστω M = (U, ρ, F) ένα μοντέλο αντίστοιχο του Λ .

Κατασκευάζουμε τις δηλώσεις που αντιστοιχούν στους παρακάτω τύπους:
οι ελεύθερες εμφανίσεις των μεταβλητών u1 , u2 , z
αντικαθίστανται με τα στοιχεία a1 , a2 , b αντίστοιχα.

ϕ : $\forall$z R(z , **u1** , u2)

Η αντίστοιχη δήλωση είναι ϕ^M(**a1** , a2) = AND $_{d \in U}$ ρ(d , **a1** , a2)

ϕ[f(u2 , u1) / **u1**] είναι ο τύπος

$\forall$z R(z , **f(u2 , u1)** , u2)

Η αντίστοιχη δήλωση είναι ϕ^M (**F(a2, a1)** , a2) = AND $_{d \in U}$ ρ(d , **F(a2, a1)** , a2))

F(a2, a1) είναι η τιμή της παράστασης **f(u2 , u1)** όταν το ak αντικαθιστά την uk :

Το Θεώρημα Αντικατάστασης επαληθεύεται

ϕ[f(u2 , z) / **u1**] είναι ο τύπος

($\forall$z R(z , **f(u2 , z)** , u2))

Η αντίστοιχη δήλωση είναι ϕ^M (**F(a2, b)** , a2) $\neq$ AND $_{d \in U}$ ρ(d , **F(a2, d)** , a2))

F(a2, b) είναι η τιμή της παράστασης **f(u2 , z)**
όταν τα a2 , b αντικαθιστούν τις u2 , z :

Το Θεώρημα Αντικατάστασης δεν εφαρμόζεται

Ορθότητα του κανόνα thereis u - introduction

Για οποιαδήποτε ϕ , t , u όπως παραπάνω, αληθεύει η συνεπαγωγή

$$\phi[t / u] \models \exists u \, \phi$$

Ορθότητα του κανόνα forall u - elimination

Για οποιαδήποτε ϕ , t , u όπως παραπάνω, αληθεύει η συνεπαγωγή

$$\forall u \, \phi \models \phi[t / u]$$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα thereis u - elimination</u>

Για οποιουσδήποτε τύπους ϕ , χ για τους οποίους αληθεύουν οι συνεπαγωγές

$\Sigma \models \exists u \, \phi$ $\quad\quad$ $\Sigma , \phi[u0 / u] \models \chi$

όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων,

u0 δεν εμφανίζεται στα Σ, φ, χ :

Θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \chi$

<u>*Ορθότητα* του κανόνα forall u – introduction</u>

Για οποιοδήποτε τύπο ϕ για τον οποίο αληθεύει μια συνεπαγωγή

$\Sigma \models \phi[u0 / u]$ $\quad$ όπου Σ κάποιο σύνολο τύπων,

u0 δεν εμφανίζεται στα Σ, φ

Θα αληθεύει και η συνεπαγωγή $\Sigma \models \forall u \, \phi$

Κανόνες για την ομοιότητα (congruence) :

$$\frac{}{t \approx t} \qquad \frac{t \approx t'}{t' \approx t} \qquad \frac{t_1 \approx t \qquad t \approx t_2}{t_1 \approx t_2}$$

$$\frac{t_1 \approx s_1 \ \ . \ . \ . \ \ t_m \approx s_m}{f(t_1 , \ldots , t_m) \approx f(s_1 , \ldots , s_m)} \qquad \text{για κάθε συνάρτηση } f$$

$$\frac{t_1 \approx s_1 \ \ . \ . \ . \ \ t_m \approx s_m \qquad R(t_1 , \ldots , t_m)}{R(s_1 , \ldots , s_m)} \qquad \text{για κάθε σχέση } R$$