- **Το Θεώρημα Ικανοποιησιμότητας για την Προτασιακή λογική (Propositional Model Existence Theorem)**

Σύνολα Hintikka

Έστω H ένα σύνολο προτασιακών τύπων.

Λέμε ότι το H είναι *σύνολο Hintikka*, όταν ικανοποιεί τις συνθήκες (1 - 5) :

(1)	$\{\gamma , \neg\gamma\}$ δεν περιέχεται στο H,		για κάθε προτασιακό γράμμα γ		
(2)	$\bot \notin H$, $\neg\top \notin H$				
(3)	$\neg(\neg\varphi) \in H$	$\Rightarrow$	$\varphi \in H$		
(4)	$(\varphi \wedge \psi) \in H$	$\Rightarrow$	$\varphi \in H$	και	$\psi \in H$
	$\neg(\varphi \vee \psi) \in H$	$\Rightarrow$	$\neg\varphi \in H$	και	$\neg\psi \in H$
	$\neg(\varphi \to \psi) \in H$	$\Rightarrow$	$\varphi \in H$	και	$\neg\psi \in H$
(5)	$(\varphi \vee \psi) \in H$	$\Rightarrow$	$\varphi \in H$	είτε	$\psi \in H$
	$\neg(\varphi \wedge \psi) \in H$	$\Rightarrow$	$\neg\varphi \in H$	είτε	$\neg\psi \in H$
	$(\varphi \to \psi) \in H$	$\Rightarrow$	$\neg\varphi \in H$	είτε	$\psi \in H$

Λήμμα του Hintikka

Έστω H ενα σύνολο Hintikka. Το H θα είναι ικανοποιήσιμο.

Για την Απόδειξη, βλέπε Fitting -- Proposition 3.5.2. $\square$

Πρόταση (Αντίστροφο του Λήμματος)

Έστω Σ ένα ικανοποιήσιμο σύνολο προτασιακών τύπων.
Θα υπάρχει ενα σύνολο Hintikka H , ώστε $\Sigma \subseteq H$. $\square$

Για την Απόδειξη, βλέπε **Ιδιότητες Συνέπειας**.

Ιδιότητες Συνέπειας (Propositional Consistency Properties)

Έστω C μία ιδιότητα που αναφέρεται σε αριθμήσιμα σύνολα προτασιακών τύπων.
Ονομάζουμε την C ιδιότητα συνέπειας, όταν: *για κάθε σύνολο* Σ *για το οποίο ισχύει η ιδιότητα* C , ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

(0) $\{\gamma , \neg\gamma\}$ δεν περιέχεται στο Σ , για κάθε προτασιακό γράμμα γ
$\bot \notin \Sigma$, $\neg\top \notin \Sigma$

(1) $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το σύνολο $\Sigma \cup \{\varphi , \psi\}$ έχει την ιδιότητα C
$\neg(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το σύνολο $\Sigma \cup \{\neg\varphi , \neg\psi\}$ έχει την ιδιότητα C
$\neg(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το σύνολο $\Sigma \cup \{\varphi , \neg\psi\}$ έχει την ιδιότητα C

(2) $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\varphi\}$ έχει την C , είτε το $\Sigma \cup \{\psi\}$ έχει την C
$\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ έχει την C , είτε το $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ έχει την C
$(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma \Rightarrow$ το $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ έχει την C , είτε το $\Sigma \cup \{\psi\}$ έχει την C

(3) $\neg(\neg\varphi) \in \Sigma \Rightarrow$ το σύνολο $\Sigma \cup \{\varphi\}$ έχει την ιδιότητα C

Παραδείγματα ιδιοτήτων συνέπειας

«το Σ είναι ικανοποιήσιμο»

«κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του Σ είναι ικανοποιήσιμο [1]»

«το Σ είναι σύνολο Hintikka»

Ερώτημα 1 Επιβεβαιώστε ότι οι παραπάνω είναι ιδιότητες συνέπειας.

Λήμμα

Έστω C μία ιδιότητα συνέπειας και Σ ένα σύνολο που έχει την C :
Υπάρχει ένα σύνολο Hintikka H , για το οποίο $\Sigma \subseteq H$. □

Θεώρημα Ικανοποιησιμότητας

Έστω C μία ιδιότητα συνέπειας. Οποιοδήποτε σύνολο Σ έχει την ιδιότητα C , θα είναι ικανοποιήσιμο. □

Το Θεώρημα Ικανοποιησιμότητας προκύπτει αμέσως από το παραπάνω Λήμμα, επειδή
κάθε σύνολο Hintikka είναι ικανοποιήσιμο (Λήμμα του Hintikka, βλ. Fitting Proposition 3.5.2).

[1] Το Σ ονομάζεται πεπερασμένα ικανοποιήσιμο σ΄ αυτή την περίπτωση.

Απόδειξη του Λήμματος

Αφού το σύνολο Σ είναι αριθμήσιμο, $\Sigma = \{Z_1, Z_2, Z_3, \ldots\}$.

Θα περιγράψουμε μια διαδικασία που απαριθμεί τα στοιχεία του ζητούμενου συνόλου Η.

Χρησιμοποιούμε έναν αριθμήσιμο πίνακα Π δύο διαστάσεων, με σειρές αριθμημένες 1, 2, 3, …
και στήλες επίσης αριθμημένες 1, 2, 3, … Η θέση του πίνακα που βρίσκεται στη σειρά i και στη στήλη j συμβολίζεται (i, j), και μπορεί να περιέχει ένα προτασιακό τύπο οποιουδήποτε μεγέθους.
Το περιεχόμενο της θέσης (i, j) συμβολίζεται $\Pi(i, j)$.

Η πρώτη σειρά του πίνακα περιέχει τα στοιχεία του συνόλου Σ: $\Pi(1, j) = Z_j$, $j \geq 1$.
Οι άλλες θέσεις του πίνακα είναι κενές αρχικά.

Ονομάζουμε N-*οστή διαγώνιο* του πίνακα, την ακολουθία θέσεων $\{ (k, N+1-k) : k = 1, 2, \ldots, N\}$.

Περιγράφουμε παρακάτω μια διαδικασία που διατρέχει τον πίνακα Π κατά τις διαγωνίους του, και καταχωρεί προτασιακούς τύπους σε κάποιες από τις κενές θέσεις του. Οι τύποι που θα προκύψουν από αυτή τη διαδικασία, μαζύ με τους τύπους του Σ, θα αποτελέσουν το ζητούμενο σύνολο Hintikka.

Συμβολίζουμε με H_Π το σύνολο των τύπων που είναι καταχωρημένοι στον πίνακα,
σε κάποιο δεδομένο βήμα της διαδικασίας.
Παρατηρούμε ότι το H_Π έχει την ιδιότητα C αρχικά -- επειδή $H_\Pi = \Sigma$ όταν ξεκινά η διαδικασία.
Θα δούμε παρακάτω -- Παρατήρηση 2 -- ότι το σύνολο H_Π θα έχει πάντα την ιδιότητα C.

Χρησιμοποιούμε μιά συνάρτηση process(i, j, W), όπου W ο τύπος που βρίσκεται στη θέση (i, j).
Η συνάρτηση process καταχωρεί νέους τύπους στον πίνακα Π , έτσι ώστε:
μετά την εκτέλεση οποιασδήποτε κλήσης process(i, j, W), ο τύπος W *δεν εμποδίζει το σύνολο* H_Π *να είναι σύνολο* Hintikka.

Η process χρησιμοποιεί μια βοηθητική συνάρτηση next(i, j), που διατρέχει τη στήλη j και βρίσκει την πρώτη θέση, μετά τη θέση (i, j), που είναι κενή.

```
for N=1,2,3,…                                  % για κάθε N≥1
   for k=1,2,…,N                               % διατρέχεται η N-οστή διαγώνιος του Π
     process(k,N+1-k, Π(k, N+1-k))             % και εξετάζονται οι τύποι που περιέχονται στις θέσεις
                                               % αυτής της διαγωνίου

process(i,j,W)
  i'← next(i,j)

  if " W = (W1∧W2) "
   then   Π(i',j)← W1
          Π(i'+1,j)← W2

  if " W = ¬(W1∨W2) "
   then   Π(i',j)← ¬W1
          Π(i'+1,j)← ¬W2

  if " W = ¬(W1→W2) "
   then   Π(i',j)←  W1
          Π(i'+1,j)← ¬W2

  if " W = (W1∨W2) " and " HΠ ∪ {W1} έχει την ιδιότητα C "
   then    Π(i',j)← W1
   else    Π(i',j)← W2
                        % αν το HΠ έχει την ιδιότητα C και περιέχει τον τύπο (W1∨W2) :
                        % ένα από τα σύνολα HΠ∪{W1} , HΠ∪{W2} θα έχει την ιδιότητα C

  if " W = ¬(W1∧W2) " and " HΠ ∪ {¬W1} έχει την ιδιότητα C "
   then Π(i',j)← ¬W1
   else Π(i',j)← ¬W2
                        % αν το HΠ έχει την ιδιότητα C και περιέχει τον τύπο ¬(W1∧W2) :
                        % ένα από τα σύνολα HΠ∪{¬W1} , HΠ∪{¬W2} θα έχει την ιδιότητα C

  if " W = (W1→W2) " and " HΠ ∪ {¬W1} έχει την ιδιότητα C "
   then    Π(i',j)← ¬W1
   else    Π(i',j)←  W2
                        % αν το HΠ έχει την ιδιότητα C και περιέχει τον τύπο (W1→W2) :
                        % ένα από τα σύνολα HΠ∪{¬W1} , HΠ∪{W2} θα έχει την ιδιότητα C

  if " W = ¬(¬W1)"
   then   Π(i',j)← W1
```

Παρατηρήσεις

1 a Σε κάθε βήμα της διαδικασίας υπάρχει, για οποιαδήποτε στήλη j του πίνακα, μια σειρά σ_j ώστε: στις θέσεις $\{ (1, k) : k \leq \sigma_j \}$ έχουν καταχωρηθεί τύποι, και οι θέσεις $\{ (1, k) : k > \sigma_j\}$ είναι κενές.

b Αν σε μία κενή θέση (i, j) του πίνακα καταχωρηθεί ένας τύπος W: σε κάποιο *επόμενο* βήμα της διαδικασίας θα εκτελεστεί η κλήση process(i, j, W) .

2 Σε κάθε βήμα της διαδικασίας, το σύνολο H_Π των τύπων που περιέχονται στον πίνακα Π έχει την ιδιότητα C.

> ***Ερώτημα 2*** Επιβεβαιώστε τις Παρατηρήσεις 1, 2, με επαγωγή στον αριθμό των βημάτων που έχουν εκτελεστεί .

Με βάση τις παραπάνω Παρατηρήσεις μπορούμε να δείξουμε ότι: το σύνολο H που αποτελείται από τους τύπους του Σ, μαζύ με τους τύπους που παράγει η διαδικασία, είναι σύνολο Hintikka.

Εξετάζουμε αν οι συνθήκες 1 - 5 στον ορισμό του συνόλου Hintikka (Fitting Definition 3.5.1) ισχύουν για το σύνολο H. Σημειώνουμε ότι κάθε τύπος του H συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο H_Π , από κάποιο βήμα της διαδικασίας και μετά.

Οι συνθήκες 1, 2 ισχύουν για το σύνολο H :

Με βάση την <u>Παρατήρηση 2</u> και τη συνθήκη (0) στον ορισμό των Ιδιοτήτων Συνέπειας: σε οποιοδήποτε βήμα της διαδικασίας ισχύει $\{\gamma , \neg\gamma\} \not\subset H_\Pi$ για κάθε προτασιακό γράμμα γ, και επίσης $\bot \notin H_\Pi$, $\neg T \notin H_\Pi$. Επειδή κάθε τύπος του H συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο H_Π από κάποιο βήμα της διαδικασίας και μετά, έχουμε ότι: $\{\gamma , \neg\gamma\} \not\subset H$ για κάθε προτασιακό γράμμα γ, και επίσης $\bot \notin H$, $\neg T \notin H$.

Η συνθήκη 3 ισχύει για το σύνολο H :

Έστω ότι $\neg(\neg\varphi) \in H$, αυτό σημαίνει ότι $\neg(\neg\varphi) \in H_\Pi$ σε κάποιο βήμα της διαδικασίας.
Με βάση την <u>Παρατήρηση 1b</u> και τη συνάρτηση process: σε κάποιο επόμενο βήμα της διαδικασίας $\varphi \in H_\Pi$, άρα $\varphi \in H$.

Οι συνθήκες 4, 5 ισχύουν για το σύνολο H :

Εργαζόμαστε όπως για τη συνθήκη 3. □