

Τυπικές αποδείξεις (formal deductions) για το δίλημμα των τριών φυλακισμένων

Χρησιμοποιούμε το γενικό μοντέλο **P**: οι καταστάσεις είναι όλες οι δυνατές αναθέσεις χρωμάτων στους τρεις παίκτες.

Μία φόρμουλα φ ισχύει σε ένα μοντέλο Kripke, όταν η φ αληθεύει σε κάθε κατάσταση.

I Οι φόρμουλες $\neg(K_A \text{ AisWh}) \rightarrow (\text{BisWh} \vee \text{CisWh})$ ισχύουν στο **P**.
 $\neg(K_B \text{ AisWh}) \rightarrow (\text{AisWh} \vee \text{CisWh})$
 $\neg(K_C \text{ AisWh}) \rightarrow (\text{BisWh} \vee \text{AisWh})$

Άρα, θα ισχύουν οι εξής clauses στο **P**:

clause 1: $(K_A \text{ AisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 2: $(K_B \text{ BisWh}) \vee \text{AisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 3: $(K_C \text{ CisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

Παρατήρηση 1 Οι clauses 1 , 2 , 3 θα ισχύουν σε οποιοδήποτε μοντέλο που αποτελείται από ένα υποσύνολο των καταστάσεων του **P**, και τα possibility relations ορίζονται όπως στο **P** .

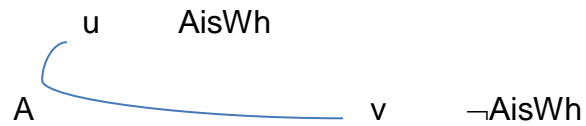
// Η φόρμουλα $\neg(K_A \text{ AisWh})$ αληθεύει στην κατάσταση u , όταν:

$$u(\text{AisWh}) = \text{false},$$

ή

$$u(\text{AisWh}) = \text{true}, \quad \text{και}$$

υπάρχει (μία τουλάχιστον) κατάσταση v , όπου



$$1. u \approx_A v \quad \quad \quad \text{άρα} \quad v(\text{BisWh}) = u(\text{BisWh}),$$

$$v(\text{CisWh}) = u(\text{CisWh})$$

$$2. v(\text{AisWh}) = \text{false}.$$

Αντίστοιχα για τις φόρμουλες $\neg(K_B \text{ BisWh})$, $\neg(K_C \text{ CisWh})$.

Παρατήρηση 2

Το **//** εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε μοντέλο

όπου τα possibility relations ορίζονται όπως στο P.

Ανάλυση για την Case 3

Ισχύουν οι εξής clauses στο P:

clause 1: $(K_A \text{ AisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 2: $(K_B \text{ BisWh}) \vee \text{AisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 3: $(K_C \text{ CisWh}) \vee \text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

Αμέσως μετά το Step 3.1:

Παίρνοντας υπόψη τις ανακοινώσεις των παικτών, εξετάζουμε τις clauses

clause 4: $\neg(K_A \text{ AisWh})$

clause 5: $\neg(K_B \text{ BisWh})$

clause 6: $\neg(K_C \text{ CisWh})$

Θεώρημα 1 $\{ \text{clause1} , \text{clause2} , \text{clause3} \} \cup \{ \text{clause4} , \text{clause5} , \text{clause6} \}$
 $\models (\text{BisWh} \vee \text{CisWh}) \wedge (\text{AisWh} \vee \text{CisWh}) \wedge (\text{BisWh} \vee \text{AisWh})$

Απόδειξη Εφαρμόζουμε τον κανόνα της επίλυσης:

clause 1 with clause 4 gives

clause 7: $\text{BisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 2 with clause 5 gives

clause 8: $\text{AisWh} \vee \text{CisWh}$

clause 3 with clause 6 gives

clause 9: $\text{BisWh} \vee \text{AisWh}$

□

Εξετάζουμε το σύνολο των καταστάσεων του P (τις ονομάζουμε ενδεχόμενες καταστάσεις) για τις οποίες αληθεύουν οι clauses 4, 5, 6 .

Από την **Παρατήρηση 1** και το **Θεώρημα 1** : οι clauses 7, 8, 9 θα αληθεύουν σε κάθε κατάσταση του P που είναι ενδεχόμενη κατάσταση.

Παρατήρηση 3 Οι clauses 7, 8, 9 αληθεύουν σε μία κατάσταση, *άν και μόνο αν* το πολύ ένας παίκτης έχει μαύρο χρώμα.

clause 7: $BisWh \vee CisWh$ clause 8: $AisWh \vee CisWh$ clause 9: $BisWh \vee AisWh$

clause 4: $\neg(K_A AisWh)$ clause 5: $\neg(K_B BisWh)$ clause 6: $\neg(K_C CisWh)$

Θεώρημα 2 $\{ \forall s ' clause7 \wedge clause8 \wedge clause9 \text{ αληθεύει στην } s ' \}$
 $\cup \{ clause4 , clause5 , clause6 \}$
 $\models (BisWh \wedge CisWh \wedge AisWh)$

Απόδειξη

Έστω u μία κατάσταση όπου αληθεύουν οι υποθέσεις της συνεπαγωγής.

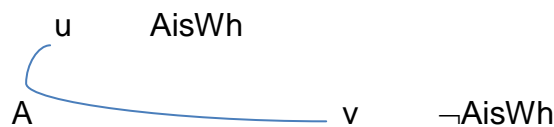
(1) Εξετάζουμε την clause 4, $\neg(K_A AisWh)$, η οποία αληθεύει στην u .

Θα δείξουμε ότι οι clauses $CisWh$, $BisWh$ θα αληθεύουν στην u .

α $\text{An } u(AisWh) = \text{true} :$

Επειδή η φόρμουλα $\neg(K_A AisWh)$ αληθεύει στην u , θα υπάρχει (λόγω του **//**)

μία κατάσταση v στην οποία θα αληθεύει η clause $\neg AisWh$.



Εφαρμόζουμε τον κανόνα της επίλυσης:

$\neg AisWh$ with clause 8 gives $CisWh$

$\neg AisWh$ with clause 9 gives $BisWh$

Άρα οι clauses $CisWh$, $BisWh$ θα αληθεύουν στην v .

Λόγω της επιλογής της v θα έχουμε $v(BisWh) = u(BisWh)$, $v(CisWh) = u(CisWh)$.

Άρα οι clauses $CisWh$, $BisWh$ θα αληθεύουν και στην u .

β $\text{An } u(AisWh) = \text{false} :$ η clause $\neg AisWh$ αληθεύει στην u .

Χρησιμοποιώντας τις clauses 8, 9 όπως στην προηγούμενη περίπτωση

βρίσκουμε ότι οι clauses $CisWh$, $BisWh$ θα αληθεύουν στην u .

(2) Εξετάζουμε την clause 5, $\neg(K_B BisWh)$, η οποία αληθεύει στην u .

Με ανάλογο τρόπο, βρίσκουμε ότι και η clause $AisWh$ θα αληθεύει στην u . \square

Έστω Q ένα μοντέλο που αποτελείται από τις ενδεχόμενες καταστάσεις του P , με possibility relations που ορίζονται όπως στο P .

- 1 Επειδή οι clauses 1, 2, 3, 7, 8, 9 αληθεύουν σε κάθε ενδεχόμενη κατάσταση του P , οι clauses 1, 2, 3, 7, 8, 9 θα ισχύουν στο Q (Παρατηρήσεις 1 και 3)..
- 2 Δεν είναι σαφές αν οι clauses 4, 5, 6 ισχύουν επίσης στο Q .

Αμέσως μετά το Step 3.2:

Παίρνοντας υπόψη τις ανακοινώσεις των παικτών, εξετάζουμε σε ποιές καταστάσεις του Q αληθεύουν οι clauses 4, 5, 6.

clause 4: $\neg(K_A \text{ AisWh})$

clause 5: $\neg(K_B \text{ BisWh})$

clause 6: $\neg(K_C \text{ CisWh})$

Από το **Θεώρημα 2**: η φόρμουλα $\text{BisWh} \wedge \text{CisWh} \wedge \text{AisWh}$ θα αληθεύει στις καταστάσεις του Q , όπου αληθεύουν οι clauses 4, 5, 6.

Προτεινόμενες ασκήσεις

1 Χρησιμοποιείστε φόρμουλες και τυπικές αποδείξεις για να αναλύσετε το πρόβλημα στην Exercise 1.3 - *Reasoning About Knowledge*.

2 Χρησιμοποιείστε φόρμουλες και τυπικές αποδείξεις για να αναλύσετε το Muddy Children Puzzle όταν $k = 2$ (δύο λερωμένα παιδάκια).

3 Χρησιμοποιείστε φόρμουλες και τυπικές αποδείξεις για να αναλύσετε την **Case 2**.

4 Συμπληρώστε την περίπτωση (2) της Απόδειξης του Θεωρήματος 2. Γιατί η clause $AisWh$ θα αληθεύει στην κατάσταση u ;