Inductive definition of the set WFF of well-formed propositional formulas

(0) Every propositional atom $p, q, r, \ldots$ is a well-formed formula.
The characters T, F are well-formed formulas.

(1) $\neg$: If φ is a well-formed formula, then so is $(\neg\varphi)$.

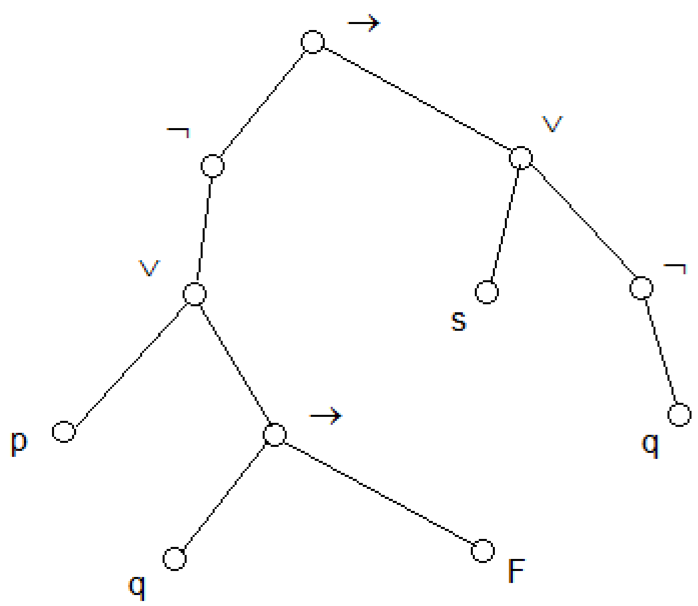
(2) $\wedge$: If φ and ψ are well-formed formulas, then so is $(\varphi \wedge \psi)$.

(3) $\vee$: If φ and ψ are well-formed formulas, then so is $(\varphi \vee \psi)$.

(4) $\rightarrow$: If φ and ψ are well-formed formulas, then so is $(\varphi \rightarrow \psi)$.

Propositional formula $((\neg(p \vee (q \rightarrow F))) \rightarrow (s \vee (\neg q)))$

Parse-tree



Recursive computation of a function on well-formed formulas

Έστω U κάποιο πεδίο τιμών (αριθμοί, σύνολα, τύποι ...)

Δίνεται *ο ορισμός* μίας συνάρτησης **H** με ορίσματα προτασιακούς τύπους
(από το σύνολο WFF) , και τιμές στο σύνολο U .

Για να γράψουμε μία *αναδρομική διαδικασία* που να υπολογίζει, για οποιονδήποτε προτασιακό τύπο φ , την τιμή **H**(φ) της συνάρτησης, εργαζόμαστε ως εξής:

α) Ορίζουμε συναρτήσεις ***g0 , g1 , g2 , g3 , g4*** , με ορίσματα προτασιακούς τύπους από το σύνολο WFF και τιμές στο σύνολο U ,
ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

P0 Άν ο τύπος φ είναι προτασιακό γράμμα ή ένα από τα T , F : H(φ) = ***g0***(φ)

P1 Για κάθε τύπο φ : H(¬φ) = ***g1***(H(φ))

P2 Για οποιουσδήποτε τύπους φ1 , φ2 : H(φ1 ∧ φ2) = ***g2***(H(φ1) , H(φ2))

P3 Για οποιουσδήποτε τύπους φ1 , φ2 : H(φ1 ∨ φ2) = ***g3***(H(φ1) , H(φ2))

P4 Για οποιουσδήποτε τύπους φ1 , φ2 : H(φ1 → φ2) = ***g4***(H(φ1) , H(φ2))

β) Υπολογίζουμε μια συνάρτηση ***G***(φ) *με αναδρομή στην δομή* του τύπου φ .

Ο υπολογισμός της ***G*** *καλεί τις συναρτήσεις g0 , g1 , g2 , g3 , g4*
που ορίστηκαν στο (α) .

G(φ) :

if φ is a propositional atom γ or one of the constants T , F
then **return** *g0*(φ)

if φ is ¬φ1 **then** **return** *g1*(***G***(φ1))

if φ is (φ1 ∧ φ2) **then** **return** *g2*(***G***(φ1) , ***G***(φ2))

if φ is (φ1 ∨ φ2) **then** **return** *g3*(***G***(φ1) , ***G***(φ2))

if φ is (φ1 → φ2) **then** **return** *g4*(***G***(φ1) , ***G***(φ2))

γ) Με *επαγωγή στην δομή* του τύπου φ προκύπτει:

Θεώρημα Άν ισχύουν οι ιδιότητες (P0) – (P4) , ο αναδρομικός υπολογισμός στο (β) *τερματίζει με το σωστό αποτέλεσμα*: για κάθε τύπο φ του συνόλου WFF , ***G***(φ) = **H**(φ) .

Παραδείγματα

Σε καθεμία περίπτωση, να ορίσετε τις συναρτήσεις *g0* – *g4* και να ελέγξετε ότι ισχύουν οι ιδιότητες (P0) – (P4) .

i) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων του προτασιακού γράμματος p στον τυπο φ

   g0(φ) = αν φ ειναι το p τοτε 1 αλλοιως 0

   g1(m) = m

   g2(m1 , m2) = g3(m1 , m2) = g4(m1 , m2) = m1 + m2

ii) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων του συνδετικού $\vee$ στον τυπο φ

   g0(φ) = 0

   g1(m) = m

   g2(m1 , m2) = g4(m1 , m2) = m1 + m2

   g3(m1 , m2) = m1 + m2 + 1

iii) H_{υ}(φ) = η τιμή αλήθειας του τύπου φ στην (δεδομένη) τιμοδοσία υ :

   g0(γ) = υ(γ) για κάθε προτασιακό γράμμα γ
   g0(T) = true g0(F) = false

   g1(x) = not(x)

   g2(x, y) = and(x, y)

   g3(x, y) = or(x, y)

   g4(x, y) = implies(x, y)

Ερωτήματα

Σε καθεμία περίπτωση, να ορίσετε μια συνάρτηση *G*(φ) , με αναδρομή στην δομή του τύπου φ , ώστε *G*(φ) = H(φ) .

α) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων προτασιακών γραμμάτων εκτός του p στον τυπο φ

β) H(φ) = ο αριθμος εμφανισεων του συνδετικού $\neg$ στον τυπο φ

γ) H(φ) = μία *συζευκτική* μορφή του τύπου φ

δ) H(φ) = μία *διαζευκτική* μορφή του τύπου φ