

Λογική και Λογικός Προγραμματισμός - Ειδικά Θέματα Υπολογικής Λογικής
2017 - 18

1^η Ομάδα Ασκήσεων

13 / 11 / 2016

Οι παραπομπές στο βιβλίο του Fitting αφορούν στην δεύτερη έκδοση (1996).

1 Αποδείξτε ότι, για οποιουδήποτε προτασιακού τύπους $\varphi, \psi, \theta, \chi$:

α $\varphi \models (\varphi \wedge \psi)$ αν και μόνο αν $\varphi \models \psi$, αν και μόνο αν $(\varphi \vee \psi) \models \psi$.

β Αν στον τύπο φ εμφανίζονται μόνο τα σύμβολα p, q, \vee και παρενθέσεις:
ο τύπος $(\neg\varphi) \wedge (p \vee q)$ θα είναι μη-ικανοποιήσιμος.

γ Αν $\varphi \models \psi$ και $\theta \models \chi$: θα ισχύει $(\psi \rightarrow \theta) \models (\varphi \rightarrow \chi)$. **1½ Μονάδα**

2 Έστω v μία απόδοση τιμών αληθείας, και έστω $\Sigma(v)$ το παρακάτω σύνολο τύπων:

$$\Sigma(v) = \{ \gamma : \gamma \text{ είναι προτασιακό γράμμα και } v(\gamma) = \text{true} \} \cup \\ \{ (\neg\gamma) : \gamma \text{ είναι προτασιακό γράμμα, και } v(\gamma) = \text{false} \} .$$

Έστω φ, ψ , προτασιακοί τύποι για τους οποίους ισχύει η συνεπαγωγή $\Sigma(v) \models (X \vee Y)$.

Αποδείξτε ότι θα ισχύει μία τουλάχιστον από τις συνεπαγωγές $\Sigma(v) \models X$, $\Sigma(v) \models Y$.

Νύξη Εξετάστε ποιές αποδόσεις τιμών αληθείας ικανοποιούν το σύνολο $\Sigma(v)$. **1 Μονάδα**

3 Έστω: $\delta(\varphi)$ ο αριθμός των εμφανίσεων δυαδικών συνδετικών στον προτασιακό τύπο φ ,
 $\lambda(\varphi)$ ο αριθμός των εμφανίσεων προτασιακών γραμμάτων ή σταθερών στον φ .

Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε προτασιακό τύπο φ : $\lambda(\varphi) = \delta(\varphi) + 1$.

Νύξη Χρησιμοποιήστε δομική επαγωγή, όπως στο *Fitting Theorem 2.2.3* -- ή μαθηματική επαγωγή, στον αριθμό των συμβόλων του τύπου. **1 Μονάδα**

4 Έστω d η συνάρτηση που ορίζεται στο *Fitting Exercise 2.2.2*, και r η συνάρτηση που ορίζεται στο *Fitting Definition 2.6.5*.

α Αποδείξτε ότι, για οποιουδήποτε προτασιακού τύπους φ, ψ ,
 $d(\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))) = d(\varphi) + d(\psi) + 4$ $r(\neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))) = r(\varphi) + r(\psi) + 3$.

β Αποδείξτε ότι, για οποιοδήποτε προτασιακό τύπο φ : $d(\varphi) \geq r(\varphi)$.

γ Για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, βρείτε ένα προτασιακό τύπο φ_n ώστε: $d(\varphi_n) - r(\varphi_n) > n$.

1½ Μονάδα

5 Δίνονται δύο κλειστά tableaux: T_1 για το σύνολο τύπων $\{\varphi, \psi\}$, T_2 για το σύνολο $\{\theta, \chi\}$.

Κατασκευάστε ένα κλειστό tableau T , για το σύνολο τύπων $\{(\psi \vee \theta), (\theta \vee \varphi), (\varphi \vee \chi), (\chi \vee \psi)\}$.

1 Μονάδα

6 Βρείτε κλειστά tableaux που να αποδεικνύουν τις παρακάτω συνεπαγωγές:

$$\alpha \quad ((p \rightarrow q) \rightarrow q) \models (p \vee q) \quad (q \vee p) \models ((q \rightarrow p) \rightarrow p)$$

$$\beta \quad ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \models p \quad p \models ((p \rightarrow q) \rightarrow p)$$

$$\gamma \quad \models (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p).$$

Πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο οι Tableau Expansion Rules – *Fitting* Definition 3.1.1.

2½ Μονάδες

7 Έστω Σ το σύνολο τύπων $\{ (q \wedge p) \rightarrow (\neg s), (p \vee s), (p \rightarrow q) \}$.

α Κατασκευάστε ένα tableau T για το σύνολο Σ , ώστε: για κάθε κόμβο u , ο τύπος του u να αναλύεται σε κάθε κλάδο που περιέχει αυτό τον κόμβο.

β Χρησιμοποιώντας το T , βρείτε *όλες* τις αποδόσεις τιμών αλήθειας που ικανοποιούν το σύνολο Σ .

1½ Μονάδα

Η 1^η Ομάδα Ασκήσεων πρέπει να παραδοθεί μέχρι τις 22-12-2017

Απαντήστε σε όλες τις ασκήσεις. Οι απαντήσεις πρέπει να είναι ατομικές.

*Χρησιμοποιείτε κειμενογράφο, με γραμματοσειρά **μεγέθους 12pt**.*

Οι φόρμουλες μπορούν να είναι χειρόγραφες (σε ανάλογο μέγεθος), αν είναι ευκολότερο.

*Αν παραδώσετε τις απαντήσεις ηλεκτρονικά, στείλετε **αρχείο κειμένου** – μη στείλετε σκαναρισμένο χειρόγραφο.*