ΘΕ5 – Ιδιότητες Δέντρων και Αναδρομή για Δέντρα

Επαγωγή για δέντρα: κέντρα, εύρεση μέγιστου μονοπατιού

Επαγωγή για δέντρα

Η *αρχή της επαγωγής* για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση Π(T) , όπου T είναι *δέντρο*, είναι:

Έστω ότι έχουμε τα εξής:

1 *Αρχική περίπτωση* ΤΑ(Π(T)) = true , για κάθε δέντρο T που έχει το πολύ 2 κορυφές.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για κάθε ένα δέντρο Γ = (V, E) :

Άν θεωρηθεί ως δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: ΤΑ(Π(Γ)) = true ,

Τότε, επαληθεύεται το *ζητούμενο*: ΤΑ(Π(Δ)) = true ,

για κάθε δέντρο $\Delta = (V \cup \{u_1 , ..., u_p\} \ , \ E \cup \{ \{u_1 , z_1\} , ..., \{u_p , z_p\} \})$,

όπου $u_k \notin V$ και $z_k \in V$, k=1, ..., p , και επιπλέον :

$\{z \mid$ ο βαθμός της z στο Γ είναι $1\} \subseteq \{z_1 , ..., z_p\}$.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

ΤΑ(Π(T)) = true , για κάθε δέντρο T .

<u>Παρατήρηση 1</u>

Για το δέντρο Δ στο παραπάνω επαγωγικό βήμα, οι κορυφές u_1 , ..., u_p είναι οι *μοναδικές* με βαθμό 1.

Ορθότητα της επαγωγής για δέντρα

Ορίζουμε την προτασιακή συνάρτηση π(n) , όπου n είναι θετικός ακέραιος:

π(n) = « ΤΑ(Π(T)) = true , για κάθε δέντρο T που έχει το πολύ n κορυφές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ(π(n)) = true , για κάθε $n \geq 2$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση π(n) .

Αρχική περίπτωση Έστω n = 2 : ισχύει ότι π(2) , λόγω του (1) .

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq 2$, και *υποθέτουμε* ότι ισχύει π(K) .

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, π(K+1) , έστω Δ ένα δέντρο με ακριβώς K+1 κορυφές. Πρέπει να δείξουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true .

Έστω u_1 , ..., u_p οι κορυφές του Δ που έχουν βαθμό 1, και έστω Γ το γράφημα που προκύπτει, αφαιρώντας τις κορυφές u_1 , ..., u_p από το Δ .

Το γράφημα Γ είναι δέντρο και έχει το πολύ K κορυφές, οπότε, από την *επαγωγική υπόθεση* παίρνουμε ότι ΤΑ(Π(Γ)) = true . Επίσης, οι κορυφές του Γ που έχουν βαθμό 1 θα είναι γειτονικές των u_1 , ..., u_p στο Δ (αφού δεν είναι μεταξύ των u_1 , ..., u_p , που είναι οι μοναδικές με βαθμό 1 στο Δ). Χρησιμοποιώντας το (2) , βλέπουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true .

Επαγωγική ιδιότητα των μέγιστων μονοπατιών δέντρου

Έστω δέντρο $\Gamma = (V, E)$, και δέντρο $\Delta = (V \cup \{u_1 , ..., u_p\} \ , \ E \cup \{ \{u_1 , z_1\} , ..., \{u_p, z_p\} \})$,
όπου $u_k \notin V$ και $z_k \in V$, $k=1, ..., p$, και επιπλέον :
$\{z \mid$ ο βαθμός της z στο Γ είναι $1\} \subseteq \{z_1 , ..., z_p\}$.

1 Έστω $(u, \{u, z\} , z, ..., z', \{z', u'\} , u')$ ένα μέγιστο μονοπάτι του Δ .
Η υπο-ακολουθία $(z, ..., z')$ θα είναι μέγιστο μονοπάτι του Γ .

2 Έστω $(z,..., z')$ ένα μέγιστο μονοπάτι του Γ .
Για οποιεσδήποτε ακμές $\{u_i , z\}$, $\{z', u_j\}$ του Δ , η ακολουθία $(u_i , \{u_i , z\} , z, ..., z', \{z', u_j\} , u_j)$ θα είναι μέγιστο μονοπάτι του Δ .

Απόδειξη Βλέπε Εισαγωγή στα Γραφήματα: Ενότητα 3.2 - Πρόταση 3.2.3.

Κέντρο γραφήματος

Έστω $(a_1 , e_1 , ..., a_{2n} , e_{2n} , a_{2n+1})$ ένα μονοπάτι με μέγιστο μήκος, σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G : η κορυφή a_{n+1} ονομάζεται *κέντρο* του G .

Έστω $(a_1 , e_1 , ..., a_{2n-1} , e_{2n-1} , a_{2n})$ ένα μονοπάτι με μέγιστο μήκος, σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G : οι κορυφές a_n , a_{n+1} ονομάζονται *κέντρα* του G.

Κέντρα δέντρου

Κάθε δέντρο T : Θα έχει ένα μοναδικό κέντρο, αν το μέγιστο μονοπάτι του T έχει άρτιο μήκος.
Θα έχει ακριβώς δύο κέντρα – γειτονικές κορυφές – αν το μέγιστο μονοπάτι του T έχει περιττό μήκος.

Απόδειξη Χρησιμοποιούμε την « Επαγωγή για δέντρα », και την « Επαγωγική ιδιότητα των μέγιστων μονοπατιών δέντρου ». Βλέπε Εισαγωγή στα Γραφήματα: Ενότητα 3.2 - Πρόταση 3.2.3.

Επαγωγική ιδιότητα των μέγιστων μονοπατιών δέντρου από δεδομένη κορυφή

Έστω δέντρο $\Gamma = (V, E)$, και δέντρο $\Delta = (V \cup \{u_1 , ..., u_p\} \ , \ E \cup \{ \{u_1 , z_1\} , ..., \{u_p , z_p\} \})$,
όπου $u_k \notin V$ και $z_k \in V$, $k=1, ..., p$, και επιπλέον :
$\{z \mid$ ο βαθμός της z στο Γ είναι $1\} \subseteq \{z_1 , ..., z_p\}$.

1 Έστω $(w, ..., z, \{z, u\} , u)$, όπου w είναι κορυφή του Γ , ένα μονοπάτι του Δ με άκρο την w και με το μέγιστο δυνατό μήκος.
Η υπο-ακολουθία $(w, ..., z)$ θα είναι ένα μονοπάτι του Γ με άκρο την w και με το μέγιστο δυνατό μήκος.

Έστω $(u_k , \{u_k , z\} , z, ..., z', \{z', u'\} , u')$ ένα μονοπάτι του Δ με άκρο την u_k και με το μέγιστο δυνατό μήκος.
Η υπο-ακολουθία $(z, ..., z')$ θα είναι μονοπάτι του Γ με άκρο την z και με το μέγιστο δυνατό μήκος.

2 Έστω $(w, ..., z)$, όπου w είναι κορυφή του Γ , ένα μονοπάτι του Γ με άκρο την w και με το μέγιστο δυνατό μήκος.
Για οποιαδήποτε ακμή $\{z, u_j\}$ του Δ , η ακολουθία $(w, ..., z, \{z, u_j\} , u_j)$ θα είναι μονοπάτι του Δ με άκρο την w και με το μέγιστο δυνατό μήκος.

Αλγόριθμος Dijkstra για μέγιστο μονοπάτι δέντρου

Έστω $T = (V, E)$ ένα δεδομένο δέντρο:

1 Επιλέγεται μία (οποιαδήποτε) κορυφή w , και υπολογίζεται ένα μονοπάτι του T , έστω $(w, ..., x)$, με άκρο την w και με το μέγιστο δυνατό μήκος.

2 Υπολογίζεται ένα μονοπάτι του T , έστω $(x, ..., y)$, με άκρο την x και με το μέγιστο δυνατό μήκος.

3 Δίνεται σαν απάντηση το μονοπάτι $(x, ..., y)$ του T .

Σημείωση

Ο αλγόριθμος Dijkstra μπορεί να υλοποιηθεί σε συνολικό χρόνο $O(|V|)$, ως εξής:

1 Εκτελείται μία αναζήτηση-κατά-βάθος (BFS) από την κορυφή w , και εντοπίζεται μία κορυφή x με τη μέγιστη δυνατή απόσταση από την w.

2 Εκτελείται μία αναζήτηση-κατά-βάθος (BFS) από την κορυφή x , και εντοπίζεται μία κορυφή y με τη μέγιστη δυνατή απόσταση από την x .

Ορθότητα αλγόριθμου Dijkstra

Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής για την προτασιακή συνάρτηση
$\Pi(T)$ = « κάθε εκτέλεση του αλγόριθμου Dijkstra στο T , δίνει σαν απάντηση ένα μονοπάτι του T με μέγιστο μήκος » – όπου T είναι δέντρο.

1 *Αρχική περίπτωση* Άν ένα δέντρο T έχει το πολύ 2 κορυφές, προφανώς $TA(\Pi(T)) =$ true .

2 *Επαγωγικό βήμα* Έστω ένα δέντρο $\Gamma = (V, E)$, για το οποίο είναι δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: $TA(\Pi(\Gamma)) =$ true .

Πρέπει να επαληθευτεί το *ζητούμενο*: $TA(\Pi(\Delta)) =$ true ,

για κάθε δέντρο $\Delta = (V\cup\{u_1 , ..., u_p\} \ , \ E \cup \{ \{u_1, z_1\} , ..., \{u_p, z_p\} \})$,
όπου $u_k \notin V$ και $z_k \in V$, $k=1, ..., p$, και επιπλέον :
$\{z \mid$ ο βαθμός της z στο Γ είναι $1\} \subseteq \{z_1 , ..., z_p\}$.

Έστω ότι: Στο 1^o βήμα του αλγόριθμου Dijkstra, επιλέγεται μία κορυφή w του Δ μεταξύ των $u_1 , ..., u_p$, και υπολογίζεται ένα μονοπάτι $(w, \{w, z_s\} , z_s , ..., z_t , \{z_t , x\} , x)$ του Δ με άκρο την w , με το μέγιστο δυνατό μήκος (η κορυφή x θα είναι μεταξύ των $u_1 , ..., u_p$).

Η ακολουθία $(z_s , ..., z_t , \{z_t , x\} , x)$ είναι ένα μονοπάτι του Δ με άκρο την z_s και με το μέγιστο δυνατό μήκος. Από την « Επαγωγική ιδιότητα των μέγιστων μονοπατιών δέντρου από δεδομένη κορυφή (1) » , η ακολουθία $(z_s , ..., z_t)$ θα είναι ένα μονοπάτι του Γ με άκρο την z_s με το μέγιστο δυνατό μήκος (*) .

Στο 2^o βήμα του αλγόριθμου Dijkstra, υπολογίζεται ένα μονοπάτι $(x, \{x, z_t\}, z_t, ..., z_r, \{z_r, y\}, y)$,
με άκρο την x και με το μέγιστο δυνατό μήκος (η κορυφή y θα είναι μεταξύ των $u_1, ..., u_p$).
Από την « Επαγωγική ιδιότητα των μέγιστων μονοπατιών δέντρου από δεδομένη κορυφή (1) » ,
η ακολουθία $(z_t, ..., z_r)$ θα είναι ένα μονοπάτι του T με άκρο την z_t και με το μέγιστο δυνατό μήκος (**) .
Με βάση τις (*) , (**) , εξετάζουμε την παρακάτω εκτέλεση του αλγόριθμου Dijkstra στο δέντρο Γ :

1 Επιλέγεται η κορυφή z_s του Γ , και υπολογίζεται το μονοπάτι $(z_s, ..., z_t)$ – βλέπε (*) .

2 Υπολογίζεται το μονοπάτι $(z_t, ..., z_r)$ – βλέπε (**) .

3 Δίνεται σαν απάντηση το μονοπάτι $(z_t, ..., z_r)$.

Από την *επαγωγική υπόθεση*, το $(z_t, ..., z_r)$ είναι ένα μονοπάτι του Γ με μέγιστο μήκος.
Από την « Επαγωγική ιδιότητα των μέγιστων μονοπατιών δέντρου (2) » ,
το $(x, \{x, z_t\}, z_t, ..., z_r, \{z_r, y\}, y)$ θα είναι ένα μονοπάτι του Δ με μέγιστο μήκος.

Έστω ότι: Στο 1^o βήμα του αλγόριθμου Dijkstra, επιλέγεται μία κορυφή w του Δ μεταξύ των κορυφών του Γ . Εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο.

Σχετική βιβλιογραφία

Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις

1.3 Επαγωγή

3 Δέντρα : 3.2 Εφαρμογές της επαγωγής για τα δέντρα

Rosen - Discrete Mathematics

5.2 Strong Induction and Well-Ordering