Δυναμικός προγραμματισμός για δέντρα

Έστω ότι, για $k=1, ..., m$, το γράφημα $\Gamma_k = (V_k , E_k)$ είναι δέντρο.

Έστω $w \notin V_1 \cup ... \cup V_m$, $z_k \in V_k$, για $k=1, ..., m$.

Συμβολίζουμε με $[\ w\ \#\ z_1, \Gamma_1 ; ... ; z_m, \Gamma_m\ ]$,

το δέντρο με κορυφές $\{w\} \cup V_1 \cup ... \cup V_m$ και ακμές $\{\ \{w, z_k\} \mid k=1, ..., m\ \} \cup E_1 \cup ... \cup E_m$.

Αναδρομή για δέντρα

Για την συνάρτηση $\Phi(w, T)$, όπου T είναι *δέντρο* και w είναι κορυφή του T , έστω ότι:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Υπάρχει μέθοδος που υπολογίζει κάθε τιμή $\Phi(w, T)$,
για κάθε δέντρο T με μία κορυφή.

2 *Επαγωγικό βήμα* Υπάρχει μέθοδος που:
για οποιαδήποτε (συγκεκριμένα) δέντρα $\Gamma_k = (V_k , E_k)$,
και κορυφές $z_k \in V_k$, $k=1, ..., m$,
χρησιμοποιώντας τις τιμές $\Phi(z_k , \Gamma_k)$, $k=1, ..., m$, *ως δεδομένα,*
μπορεί να υπολογίσει κάθε *ζητούμενη* τιμή $\Phi(w, \Delta)$,
όπου $\Delta = [\ w\ \#\ z_1, \Gamma_1 ; ... ; z_m, \Gamma_m\ ]$, $w \notin V_1 \cup ... \cup V_m$.

Με βάση τα παραπάνω: κάθε τιμή $\Phi(w, T)$ μπορεί να υπολογιστεί, για κάθε δέντρο $T = (V, E)$,
με τον παρακάτω *αναδρομικό* αλγόριθμο $F(w, T)$:

```
if   |V| = 1
then    υπολόγισε το  F(w, T) , όπως στο  (1)
        return   F(w, T)
else    υπολόγισε τις συνεκτικές συνιστώσες του  T−w :          % κάθε μία θα είναι δέντρο
              προκύπτουν τα δέντρα  Γk ,  k=1, ..., m
        υπολόγισε τις τιμές  F(zk , Γk) ,
              όπου  zk  η γειτονική της  w  στο  Γk ,  k=1, ..., m          %  αναδρομικές κλήσεις
        χρησιμοποιώντας τα  F(zk , Γk) ,  k=1, ..., m ,  ως δεδομένα,
              υπολόγισε το  F(w, T) – όπως στο  (2)
        return   F(w, T)
```

Ορθότητα του αλγόριθμου **F(w, T)**

Ορίζουμε την προτασιακή συνάρτηση $\pi(n)$, όπου n είναι θετικός ακέραιος:

$\pi(n)$ = « Ο αλγόριθμος $F(w, T)$ τερματίζει, και $F(w, T) = \Phi(w, T)$,
για κάθε κάθε κορυφή w , κάθε δέντρου T που έχει το πολύ n κορυφές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα $(1 , 2)$, τότε $TA(\pi(n)) = true$, για κάθε $n \geq 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για την προτασιακή συνάρτηση $\pi(n)$.

Αρχική περίπτωση Έστω $n = 1$: ισχύει ότι $\pi(1)$, λόγω του (1) και της πρώτης περίπτωσης του αλγόριθμου $F(w, T)$.

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq 1$, και *υποθέτουμε* ότι ισχύει $\pi(K)$.

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, $\pi(K+1)$, έστω Δ ένα δέντρο με ακριβώς K+1 κορυφές.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε κλήση $F(w, \Delta)$ του αλγόριθμου τερματίζει, και $F(w, \Delta) = \Phi(w, \Delta)$.

Επειδή $K+1 > 1$, η κλήση $F(w, \Delta)$ χρησιμοποιεί τη δεύτερη περίπτωση του αλγόριθμου.

Κάθε συνεκτική συνιστώσα Γ_k του γραφήματος $\Delta - w$, όπου $k=1, ..., m$, έχει το πολύ K κορυφές.

Από την *επαγωγική υπόθεση*: οι κλήσεις $F(z_k , \Gamma_k)$ του αλγόριθμου – όπου z_k η γειτονική της w στο Γ_k – τερματίζουν, και $F(z_k , \Gamma_k) = \Phi(z_k , \Gamma_k)$.

Από το (2) και τη δεύτερη περίπτωση του αλγόριθμου: βλέπουμε ότι η κλήση $F(w, \Delta)$ τερματίζει, και $F(w, \Delta) = \Phi(w, \Delta)$.

<u>Παράδειγμα 1</u> Για κάθε δέντρο T και κορυφή w του T , να υπολογιστεί η τιμή $\mu(w, T)$, όπου:
$\mu(w, T)$ = το μέγιστο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού του T , με άκρο την w .

Σύμφωνα με την αναδρομή για δέντρα: υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει, για κάθε δέντρο T και κορυφή w του T , μία τιμή $\mu(w, T)$ όπως απαιτείται – αρκεί να μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Να υπολογιστεί τιμή $\mu(w, T)$ όπως απαιτείται, για κάθε δέντρο T με ακριβώς μία κορυφή: Θέτουμε $\mu(w, T) = 0$.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για οποιαδήποτε (συγκεκριμένα) δέντρα $\Gamma_k = (V_k , E_k)$, και κορυφές $z_k \in V_k$, $k=1, ..., m$,

Να υπολογιστεί *ζητούμενη* τιμή $\mu(w, \Delta)$ όπως απαιτείται,
για κάθε δέντρο $\Delta = [\ w\ \#\ z_1, \Gamma_1 ; ... ; z_m, \Gamma_m\ ]$, $w \notin V_1 \cup ... \cup V_m$,
έχοντας *δεδομένες* τιμές $\mu(z_k , \Gamma_k)$, $k=1, ..., m$, όπως απαιτείται :
Άν ένα μονοπάτι ν του Δ με άκρο την κορυφή w έχει μέγιστο δυνατό μήκος, θα είναι
$\nu = (w, \{w, z_k\} , z_k , ..., x)$, για κάποιο k – όπου η υπο-ακολουθία $(z_k , …, x)$ θα είναι μονοπάτι του Γ_k , με άκρο την κορυφή z_k και μέγιστο δυνατό μήκος.
Επομένως, $\mu(w, \Delta) = \max_{1\leq k \leq m} \{ 1 + \mu(z_k , \Gamma_k) \}$.

<u>Παράδειγμα 2</u> Για κάθε δέντρο T , να υπολογιστεί η τιμή $M(T)$, όπου:
$M(T)$ = το μέγιστο δυνατό μήκος ενός μονοπατιού του T .

Σύμφωνα με την αναδρομή για δέντρα: υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει, για κάθε δέντρο T , μία τιμή $M(T)$ όπως απαιτείται – αρκεί να μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Να υπολογιστεί τιμή $M(T)$ όπως απαιτείται, για κάθε δέντρο T με ακριβώς μία κορυφή: Θέτουμε $M(T) = 0$.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για οποιαδήποτε (συγκεκριμένα) δέντρα $\Gamma_k = (V_k, E_k)$,
και κορυφές $z_k \in V_k$, $k=1, ..., m$,

Να υπολογιστεί *ζητούμενη* τιμή $M(\Delta)$ όπως απαιτείται,

για κάθε δέντρο $\Delta = [\ w\ \#\ z_1, \Gamma_1 ; ... ; z_m, \Gamma_m\ ]$, $w \notin V_1 \cup ... \cup V_m$,

έχοντας *δεδομένες* τιμές $M(\Gamma_k)$, $k=1, ..., m$, όπως απαιτείται :

Έστω ν ένα μονοπάτι του Δ με μέγιστο δυνατό μήκος:

i) Αν το μονοπάτι ν δεν περιέχει την κορυφή w , θα περιέχεται σε κάποιο Γ_k ,
και το μήκος του θα είναι: $\max_{1\le k \le m} \{ M(\Gamma_k) \}$.

ii) Αν το μονοπάτι ν περιέχει την κορυφή w , θα έχουμε
$\nu = (y, ..., z_j , \{z_j, w\} , w, \{w, z_h\} , z_h , ..., x)$, για κάποια j , h , όπου: $h \ne j$, και οι υποακολουθίες $(y, ..., z_j)$, $(z_h, \ldots, x)$ είναι (αντίστοιχα) μονοπάτια των Γ_j , Γ_h με άκρα τις κορυφές z_j , z_h (αντίστοιχα), και μέγιστο δυνατό μήκος.
Επομένως, το μήκος του μονοπατιού ν θα είναι

$$\max_{1\le j \le m} \{ \max_{h \ne j \text{ και } 1\le h \le m} \{ 2 + \mu(z_j , \Gamma_j) + \mu(z_h , \Gamma_h) \} \} .$$

Άρα, $M(\Delta) = \max [\ \max_{1\le k \le m} \{ M(\Gamma_k) \}$,
$\max_{1\le j \le m} \{ \max_{h \ne j \text{ και } 1\le h \le m} \{ 2 + \mu(z_j , \Gamma_j) + \mu(z_h , \Gamma_h) \} \}\ ]$.

Ανεξάρτητο σύνολο

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Ονομάζουμε *ανεξάρτητο σύνολο* του G , ένα υποσύνολο Σ του V τέτοιο ώστε: για οποιεσδήποτε κορυφές u , v στο Σ , $\{u, v\} \notin E$.

<u>Παράδειγμα 3</u> Για κάθε δέντρο T και κορυφή w του T, να υπολογιστεί
το ζεύγος τιμών (A(T) , A_(w, T)) , όπου:

A(T) = το μέγιστο δυνατό μέγεθος ενός ανεξάρτητου συνόλου του T ,

A_(w, T) = το μέγιστο δυνατό μέγεθος ενός ανεξάρτητου συνόλου του T που δεν περιέχει την κορυφή w .

Σύμφωνα με την αναδρομή για δέντρα: υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει, για κάθε δέντρο T , ένα ζεύγος τιμών (A(T) , A_(w, T)) όπως απαιτείται – αρκεί να μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Να υπολογιστεί ζεύγος τιμών (A(T) , A_(w, T)) όπως απαιτείται, για κάθε δέντρο T με ακριβώς μία κορυφή: Θέτουμε A(T) = 1 , A_(w, T) = 0 .

2 *Επαγωγικό βήμα* Για οποιαδήποτε (συγκεκριμένα) δέντρα $\Gamma_k = (V_k, E_k)$,
και κορυφές $z_k \in V_k$, $k=1, ..., m$,

Να υπολογιστεί *ζητούμενο* ζεύγος τιμών (A(Δ) , A_(w, Δ)) όπως απαιτείται,

για κάθε δέντρο $\Delta = [\ w\ \#\ z_1, \Gamma_1 ; ... ; z_m, \Gamma_m\ ]$, $w \notin V_1 \cup ... \cup V_m$,

έχοντας *δεδομένα* ζεύγη ($A(\Gamma_k)$, A_(z_k , Γ_k)) , $k=1, ..., m$, όπως απαιτείται :

Έστω σ ένα ανεξάρτητο σύνολο του Δ με μέγιστο δυνατό μέγεθος:

i) Αν το σ δεν περιέχει την κορυφή w, θα περιέχεται στο $V_1 \cup \ldots \cup V_m$, και το $\sigma \cap V_k$, $k=1, \ldots, m$, θα είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του Γ_k με μέγιστο δυνατό μέγεθος. Επομένως, το μέγεθος του σ θα είναι: $\sum_{1\leq k \leq m} A(\Gamma_k)$.

Άρα, $A\_(w, \Delta) = \sum_{1\leq k \leq m} A(\Gamma_k)$.

ii) Αν το σύνολο σ περιέχει την κορυφή w, θα είναι $\sigma = \{w\} \cup \sigma_1 \ldots \cup \sigma_m$, όπου το σ_k, $k=1, \ldots, m$, θα είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο του Γ_k που δεν περιέχει την κορυφή z_k, με μέγιστο δυνατό μέγεθος. Επομένως, το μέγεθος του σ θα είναι: $1 + \sum_{1\leq k \leq m} A\_(z_k, \Gamma_k)$.

Άρα, $A(\Delta) = \max [\ \sum_{1\leq k \leq m} A(\Gamma_k)\ ,\ 1 + \sum_{1\leq k \leq m} A\_(z_k, \Gamma_k)\ ]$.

Καλυπτικό σύνολο

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Ένα υπο-σύνολο Σ του V ονομάζεται *καλυπτικό σύνολο* του G, όταν: κάθε ακμή του G, έχει ένα τουλάχιστον άκρο της στο Σ.

Παράδειγμα 4 Για κάθε δέντρο T και κορυφή w του T, να υπολογιστεί το ζεύγος τιμών $(N(T),\ N\_(w, T))$, όπου:

$N(T)$ = το ελάχιστο δυνατό μέγεθος ενός καλυπτικού συνόλου του T,

$N\_(w, T)$ = το ελάχιστο δυνατό μέγεθος ενός καλυπτικού συνόλου του T που περιέχει την κορυφή w.

Σύμφωνα με την αναδρομή για δέντρα: υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει, για κάθε δέντρο T, ένα ζεύγος τιμών $(N(T),\ N\_(w, T))$ όπως απαιτείται – αρκεί να μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Να υπολογιστεί ζεύγος τιμών $(N(T),\ N\_(w, T))$ όπως απαιτείται, για κάθε δέντρο T με ακριβώς μία κορυφή: Θέτουμε $N(T) = 0$, $N\_(w, T) = 1$.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για οποιαδήποτε (συγκεκριμένα) δέντρα $\Gamma_k = (V_k, E_k)$, και κορυφές $z_k \in V_k$, $k=1, \ldots, m$,

Να υπολογιστεί *ζητούμενο* ζεύγος τιμών $(N(\Delta),\ N\_(w, \Delta))$ όπως απαιτείται, για κάθε δέντρο $\Delta = [\ w\ \#\ z_1, \Gamma_1\ ; \ldots ;\ z_m, \Gamma_m\ ]$, $w \notin V_1 \cup \ldots \cup V_m$, έχοντας *δεδομένα* ζεύγη $(N(\Gamma_k),\ N\_(z_k, \Gamma_k))$, $k=1, \ldots, m$, όπως απαιτείται :

Έστω σ ένα καλυπτικό σύνολο του Δ με ελάχιστο δυνατό μέγεθος:

i) Αν το σύνολο σ περιέχει την κορυφή w, θα είναι $\sigma = \{w\} \cup \sigma_1 \ldots \cup \sigma_m$, όπου το σ_k, $k=1, \ldots, m$, θα είναι ένα καλυπτικό σύνολο του Γ_k με ελάχιστο δυνατό μέγεθος. Επομένως, το μέγεθος του σ θα είναι: $1 + \sum_{1\leq k \leq m} N(\Gamma_k)$.

Άρα, $N\_(w, \Delta) = 1 + \sum_{1\leq k \leq m} N(\Gamma_k)$.

ii) Αν το σ δεν περιέχει την κορυφή w, θα περιέχεται στο $V_1 \cup ... \cup V_m$.

Το $\sigma \cap V_k$, $k=1, ..., m$, θα είναι ένα καλυπτικό σύνολο του Γ_k , με ελάχιστο δυνατό μέγεθος, που θα περιέχει την κορυφή z_k (για να καλυφθεί η ακμή $\{w, z_k\}$ του T). Επομένως, το μέγεθος του σ θα είναι: $\sum_{1\le k \le m} N\_(z_k , \Gamma_k)$.

Άρα, $N(\Delta) = \min [\ 1 + \sum_{1\le k \le m} N(\Gamma_k)\ ,\ \sum_{1\le k \le m} N\_(z_k , \Gamma_k)\ ]$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Έστω ότι: το Επαγωγικό βήμα της Αναδρομής για δέντρα, μπορεί να υλοποιηθεί σε χρόνο $O(k)$.
Αποδείξτε ότι: για κάθε δέντρο $T = (V, E)$ και κορυφή w του T , ο αλγόριθμος $F(w, T)$ μπορεί να υλοποιηθεί σε χρόνο $O(|V|)$.

2 Υποθέτουμε ότι: κάθε σύγκριση είτε αριθμητική πράξη μεταξύ ακέραιων, μπορεί να εκτελεστεί σε χρόνο $O(1)$.

α Περιγράψτε μία υλοποίηση του Επαγωγικού βήματος στο Παράδειγμα 2, που να εκτελείται σε χρόνο $O(k)$.

β Περιγράψτε υλοποιήσεις των Επαγωγικών βημάτων στα Παραδείγματα 3 και 4, που να εκτελούνται σε χρόνο $O(k)$.

3 Για κάθε δέντρο T , να υπολογιστεί η τιμή $M(T)$, όπου:
$M(T)$ = το μέγιστο δυνατό μέγεθος ενός συνόλου ακμών του T , που ανά δύο δεν έχουν κοινό άκρο.

Σχετική βιβλιογραφία

<u>Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις</u>

1.3 Επαγωγή

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>

5.2 Strong Induction and Well-Ordering

5.3 Recursive Definitions and Structural Induction

5.4 Recursive Algorithms