ΘΕ4 – Αναδρομή και Επαγωγή για Γραφήματα

Επαγωγή και αναδρομή για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα

Επαγωγή για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα **(*με αφαίρεση κορυφής*)**

Η *αρχή της επαγωγής*, με αφαίρεση κορυφής, για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση Π(G) – όπου G είναι *άκυκλο συνεκτικό* γράφημα – είναι η παρακάτω:

Έστω ότι έχουμε τα εξής:

1 *Αρχική περίπτωση* ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς α κορυφές, όπου α κάποιος θετικός ακέραιος.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για κάθε ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα Γ = (V, E) με |V| ≥ α :

Άν θεωρηθεί ως δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: ΤΑ(Π(Γ)) = true ,

Τότε, επαληθεύεται το *ζητούμενο*: ΤΑ(Π(Δ)) = true ,

για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V\cup\{u\} ,\ E \cup \{\{u, z\}\})$,

όπου $u\notin V$, $z\in V$.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G με τουλάχιστον α κορυφές.

Ορθότητα της επαγωγής για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα

Ορίζουμε την προτασιακή συνάρτηση π(n) , όπου n είναι θετικός ακέραιος:

π(n) = « ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς n κορυφές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ(π(n)) = true , για κάθε n ≥ α .

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση π(n) .

Αρχική περίπτωση Έστω n = α : ισχύει ότι π(α) , λόγω του (1) .

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε n = Κ ≥ α , και *υποθέτουμε* ότι ισχύει π(Κ) .

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, π(Κ+1) , έστω Δ ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα με ακριβώς Κ+1 κορυφές. Πρέπει να δείξουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true .

Έστω u μία κορυφή του Δ που δεν είναι κομβικό σημείο – επομένως το γράφημα Γ = Δ–u είναι συνεκτικό, και προφανώς άκυκλο. Επίσης το Γ θα έχει ακριβώς Κ κορυφές, οπότε από την *επαγωγική υπόθεση* παίρνουμε ότι ΤΑ(Π(Γ)) = true .

Η κορυφή u θα έχει βαθμό 1 στο Δ , επειδή το Δ είναι άκυκλο. Χρησιμοποιώντας το (2) , βλέπουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true .

<u>Παράδειγμα 1</u> Να αποδειχτεί ότι: Για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$, είναι $|E| = |V|-1$.

Χρησιμοποιούμε την αρχή της επαγωγής, με αφαίρεση κορυφής, για την προτασιακή συνάρτηση $\Pi(G) =$ « άν $G = (V, E)$ τότε $|E| = |V|-1$ » – όπου G είναι άκυκλο συνεκτικό γράφημα.

1 *Αρχική περίπτωση* Για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $|V|=1$, είναι $|E|=0$.
Άρα $TA(\Pi(G)) =$ true .

2 *Επαγωγικό βήμα* Έστω ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα $\Gamma = (V, E)$ με $|V| \geq 1$, για το οποίο είναι δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: $|E| = |V|-1$.

Πρέπει να επαληθευτεί το *ζητούμενο*: $|E_1| = |V_1|-1$,

για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V_1 , E_1) = (V\cup\{u\} ,\ E \cup \{\{u, z\}\})$,
όπου $u\notin V$, $z\in V$.

Έχουμε: $|V_1| = |V|+1$, $|E_1| = |E|+1$, άρα $(|E_1| - |V_1|) = (|E| - |V|)$.

Από την *επαγωγική υπόθεση* $|E| - |V| = -1$, άρα $|E_1| - |V_1| = -1$.

Αναδρομή για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής)

Για την συνάρτηση $\Phi(G)$ όπου G είναι *άκυκλο συνεκτικό* γράφημα, έστω ότι:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Υπάρχει μέθοδος που υπολογίζει την τιμή $\Phi(G)$, για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς α κορυφές – όπου α κάποιος θετικός ακέραιος.

2 *Επαγωγικό βήμα* Υπάρχει μέθοδος που: για κάθε ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα $\Gamma = (V, E)$, $|V| \geq \alpha$,

χρησιμοποιώντας την τιμή $\Phi(\Gamma)$ *ως δεδομένο,*

μπορεί να υπολογίσει τη *ζητούμενη* τιμή $\Phi(\Delta)$,

για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V\cup\{u\} ,\ E \cup \{\{u, z\}\})$,
όπου $u\notin V$, $z\in V$.

Με βάση τα παραπάνω: η τιμή $\Phi(G)$ μπορεί να υπολογιστεί, για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| \geq \alpha$, με τον παρακάτω *αναδρομικό* αλγόριθμο $F(G)$:

if $|V| = \alpha$
then υπολόγισε το F(G) , όπως στο (1)
    return F(G)
else βρές μη-κομβικό σημείο u του G
    υπολόγισε το F(G–u)   % αναδρομική κλήση
    χρησιμοποιώντας το F(G–u) ως δεδομένο, υπολόγισε το F(G) – όπως στο (2)
    return F(G)

***Ορθότητα του αλγόριθμου* F(G)**

Ορίζουμε την προτασιακή συνάρτηση π(n) , όπου n είναι θετικός ακέραιος:

π(n) = « Ο αλγόριθμος F(G) τερματίζει, και F(G) = Φ(G) ,

για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς n κορυφές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ(π(n)) = true , για κάθε $n \geq \alpha$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής για την προτασιακή συνάρτηση π(n) .

Αρχική περίπτωση Έστω n = α : ισχύει ότι π(α) , λόγω του (1) και της πρώτης περίπτωσης του αλγόριθμου F(G) .

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq \alpha$, και *υποθέτουμε* ότι ισχύει π(K) .

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, π(K+1) , έστω Δ ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα με ακριβώς K+1 κορυφές. Πρέπει να δείξουμε ότι η κλήση F(Δ) του αλγόριθμου τερματίζει, και F(Δ) = Φ(Δ) .

Επειδή K+1 > α , χρησιμοποιείται η δεύτερη περίπτωση του αλγόριθμου F(G) .

Έστω u το μη-κομβικό σημείο του Δ που επιλέγεται. Το γράφημα Γ = Δ–u είναι συνεκτικό, προφανώς άκυκλο, και έχει ακριβώς K κορυφές, οπότε από την *επαγωγική υπόθεση*: η κλήση F(Γ) του αλγόριθμου τερματίζει, και F(Γ) = Φ(Γ) .

Η κορυφή u θα έχει βαθμό 1 στο Δ , επειδή το Δ είναι άκυκλο. Από το (2) , και τη δεύτερη περίπτωση του αλγόριθμου F(G) , βλέπουμε ότι η κλήση F(Δ) τερματίζει, και F(Δ) = Φ(Δ) .

<u>Παράδειγμα 2</u> Να υπολογιστεί, για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G , ένας *χρωματισμός* των κορυφών του G , με 2 χρώματα (έστω κ , λ), έτσι ώστε: τα χρώματα των άκρων οποιασδήποτε ακμής, να είναι διαφορετικά.

Σύμφωνα με την αναδρομή για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής): υπάρχει αλγόριθμος που μπορεί να υπολογίσει, για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G = (V, E) με $|V| \geq 1$, μία τιμή χ(G) όπως απαιτείται – αρκεί να μπορούν να υπολογιστούν τα παρακάτω:

1 *Αρχικές περιπτώσεις* Να υπολογιστεί τιμή χ(G) όπως απαιτείται, για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G με ακριβώς μία κορυφή:

Χρωματίζουμε τη μοναδική κορυφή με το χρώμα κ .

2 *Επαγωγικό βήμα* Για κάθε ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα Γ = (V, E) με $|V| \geq 1$,

Να υπολογιστεί *ζητούμενη* τιμή χ(Δ) όπως απαιτείται,

για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $\Delta = (V \cup \{u\} ,\ E \cup \{\{u, z\}\})$,

όπου $u \notin V$, $z \in V$

έχοντας *δεδομένη* μία τιμή χ(Γ) (όπως απαιτείται) :

Χρωματίζουμε κάθε κορυφή του V , όπως ο χ(Γ) . Χρωματίζουμε την κορυφή u , διαφορετικά από τη z .

Επαγωγή για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση ακμής)

Η *αρχή της επαγωγής*, με αφαίρεση ακμής, για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση Π(G) – όπου G είναι *άκυκλο συνεκτικό* γράφημα – είναι η παρακάτω:

Έστω ότι έχουμε τα εξής:

1 *Αρχική περίπτωση* ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ με $|V|=1$.

2 *Επαγωγικό βήμα* Για οποιαδήποτε (συγκεκριμένα) άκυκλα συνεκτικά γραφήματα $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$, $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$:

Άν θεωρηθεί ως δεδομένη η *επαγωγική υπόθεση*: ΤΑ(Π(Γ_1)) = ΤΑ(Π(Γ_2)) = true ,

Τότε, επαληθεύεται το *ζητούμενο*: ΤΑ(Π(Δ) = true ,

για *κάθε* άκυκλο συνεκτικό γράφημα

$$\Delta = (V_1 \cup V_2 ,\ E_1 \cup E_2 \cup \{\{z_1, z_2\}\}) , \qquad \text{όπου} \quad z_1 \in V_1 ,\ z_2 \in V_2 .$$

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G .

Ορθότητα της επαγωγής για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση ακμής)

Ορίζουμε την εξής προτασιακή συνάρτηση π(n) , όπου n είναι θετικός ακέραιος:

π(n) = « ΤΑ(Π(G)) = true , για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G , που έχει το πολύ n ακμές » .

Θα δείξουμε ότι: Άν ισχύουν τα (1 , 2) , τότε ΤΑ(π(n)) = true , για κάθε $n \geq 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση π(n) .

Αρχική περίπτωση Έστω $n = 0$: ισχύει ότι π(0) , λόγω του (1) .

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq 0$, και *υποθέτουμε* ότι ισχύει π(K) .

Για να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο*, π(K+1) , έστω Δ ένα άκυκλο συνεκτικό γράφημα με ακριβώς K+1 ακμές. Πρέπει να δείξουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true .

Έστω $e = \{z_1, z_2\}$ μία ακμή του Δ . Επειδή το Δ είναι άκυκλο, η ακμή e είναι γέφυρα του Δ .

Έστω Γ_1 , Γ_2 οι συνεκτικές συνιστώσες του Δ–e . Κάθε ένα από τα Γ_1 , Γ_2 θα έχει το πολύ K ακμές, οπότε από την *επαγωγική υπόθεση* παίρνουμε ότι ΤΑ(Π(Γ_1)) = ΤΑ(Π(Γ_2)) = true.

Χρησιμοποιώντας το (2) , βλέπουμε ότι ΤΑ(Π(Δ)) = true.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Χρησιμοποιώντας την επαγωγή για άκυκλα συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση ακμής), αποδείξτε ότι:

α Για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$, είναι $|E| = |V| - 1$.

β Για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G , υπάρχει ένας χρωματισμός των κορυφών του G , με 2 χρώματα, έτσι ώστε: τα χρώματα των άκρων οποιασδήποτε ακμής, να είναι διαφορετικά.

2 Να υπολογιστεί, για κάθε άκυκλο συνεκτικό γράφημα G με μέγιστο βαθμό K , ένας *χρωματισμός των ακμών* του G , με K χρώματα (το πολύ), έτσι ώστε: τα χρώματα δύο οποιωνδήποτε ακμών με κοινό άκρο, να είναι διαφορετικά.

Χρησιμοποιείστε την αναδρομή για συνεκτικά γραφήματα (με αφαίρεση κορυφής).

Σχετική βιβλιογραφία

<u>Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις</u>

1.3 Επαγωγή

3 Δέντρα : 3.1 Ορισμός και ιδιότητες

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>

5.2 Strong Induction and Well-Ordering

5.3 Recursive Definitions and Structural Induction

5.4 Recursive Algorithms