

## Κομβικά σημεία, γέφυρες

### *Ανάλυση συνεκτικού γραφήματος με αφαίρεση στοιχείου*

Αφαίρεση ακμής Αφαιρώντας μία ακμή  $e$  του συνεκτικού γραφήματος  $G = (V, E)$ , προκύπτει το γράφημα  $(V, E - \{e\})$ , που συμβολίζεται ως  $G - e$ .

Έστω  $H_1, \dots, H_m$  ( $m \geq 1$ ), οι συνεκτικές συνιστώσες του  $G - e$ : θα είναι  $1 \leq m \leq 2$  -- Άσκηση 5.

Ονομάζουμε *ανάλυση του  $G$  ως προς την ακμή  $e$* , τα υπο-γραφήματα  $H_1, H_2$  του  $G - e$ .

Αφαίρεση κορυφής Αφαιρώντας μία κορυφή  $a$  του συνεκτικού γραφήματος  $G = (V, E)$ , προκύπτει το γράφημα  $(V - \{a\}, E - \{e \mid \eta \text{ } e \text{ προσπίπτει στην } a\})$ , που συμβολίζεται ως  $G - a$ .

Έστω  $H_1, \dots, H_m$  ( $m \geq 1$ ), οι συνεκτικές συνιστώσες του  $G - a$ .

Ονομάζουμε *ανάλυση του  $G$  ως προς την κορυφή  $a$* , τα υπο-γραφήματα  $H_1, \Theta_1, \dots, H_m, \Theta_m$  του  $G - a$ , όπου: το  $\Theta_j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , αποτελείται από τις ακμές  $\{ \{a, u\} \mid u \in H_j \}$  του  $G$  (και τα άκρα τους).

**Σημείωση** Τα υπο-γραφήματα  $H_1, \dots, H_m$  του  $G$  δεν θα έχουν κοινή κορυφή.

Επίσης, στο  $G$  δεν θα υπάρχει διαδρομή από κορυφή του  $H_j$  σε κορυφή του  $H_k$ , όταν  $j \neq k$  (Άσκηση 3).

### *Γέφυρα συνεκτικού γραφήματος*

Μία ακμή  $e$  του συνεκτικού γραφήματος  $G = (V, E)$  ονομάζεται *γέφυρα του  $G$* , όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

**A** Το γράφημα  $G - e$  δεν είναι συνεκτικό.

**B** Υπάρχουν κορυφές  $x, y$  του  $G$ , τέτοιες ώστε: η ακμή  $e$  εμφανίζεται σε κάθε διαδρομή του  $G$  που έχει άκρα τις  $x, y$ .

**Γ** Δεν υπάρχει κύκλος του  $G$ , όπου να εμφανίζεται η ακμή  $e$ .

**Σημείωση** Η συνθήκη (A) είναι ισοδύναμη με τις (B), (Γ):

Ευθύ: Άν το  $G - e$  δεν είναι συνεκτικό, θα αποτελείται από δύο συνεκτικές συνιστώσες  $H_1, H_2$ . Στο  $G - e$  δεν θα υπάρχει διαδρομή από κορυφή του  $H_1$  σε κορυφή του  $H_2$ , επομένως για  $x \in H_1, y \in H_2$  θα ισχύει το (B). Επίσης θα ισχύει το (Γ), επειδή τα άκρα της ακμής  $e$  θα είναι σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του  $G - e$ .

Αντίστροφο: Άν το γράφημα  $G - e$  είναι συνεκτικό, οποιοσδήποτε κορυφές του  $G$  θα συνδέονται με διαδρομή όπου δεν εμφανίζεται η ακμή  $e$ . Τα άκρα της ακμής  $e$  θα συνδέονται με κάποιο μονοπάτι του  $G - e$ , το οποίο μαζί με την ακμή  $e$  θα σχηματίζει κύκλο.

### **Κομβικό σημείο συνεκτικού γραφήματος**

Μία κορυφή  $a$  του συνεκτικού γραφήματος  $G = (V, E)$  ονομάζεται *κομβικό σημείο του  $G$* , όταν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

- A** Το γράφημα  $G-a$  δεν είναι συνεκτικό.
- B** Υπάρχουν κορυφές  $x, y$  του  $G$ , τέτοιες ώστε: η κορυφή  $a$  εμφανίζεται σε κάθε διαδρομή του  $G$  που έχει άκρα τις  $x, y$ .
- Γ** Υπάρχουν δύο ακμές του  $G$  με άκρο την  $a$ , τέτοιες ώστε: δεν υπάρχει κύκλος του  $G$  όπου να εμφανίζονται και οι δύο αυτές ακμές.

**Σημείωση** Η συνθήκη (A) είναι ισοδύναμη με τις (B), (Γ) :

**Ευθύ:** Αν το  $G-a$  δεν είναι συνεκτικό, θα έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες  $H_1, H_2$ . Στο  $G-a$  δεν θα υπάρχει διαδρομή από κορυφή του  $H_1$  σε κορυφή του  $H_2$ , επομένως το (B) θα ισχύει για  $x \in H_1, y \in H_2$ . Επίσης θα ισχύει το (Γ), για όποιες ακμές  $\{a, u\}, \{a, v\}$  έχουν  $u \in H_1, v \in H_2$ .

**Αντίστροφο:** Αν το γράφημα  $G-a$  είναι συνεκτικό: οποιοσδήποτε κορυφές του  $G$  θα συνδέονται με διαδρομή όπου δεν εμφανίζεται η κορυφή  $a$ . Για οποιοσδήποτε ακμές  $\{a, u\}, \{a, v\}$  του  $G$  θα υπάρχει κάποιο μονοπάτι του  $G-a$  με άκρα τις κορυφές  $u, v$ , το οποίο μαζί με τις ακμές  $\{a, u\}, \{a, v\}$  θα σχηματίζει κύκλο.

### Παρατήρηση 3

Μία κορυφή ενός συνεκτικού γραφήματος δεν είναι κομβικό σημείο, όταν ο βαθμός της είναι 1.

### **Σχετική βιβλιογραφία**

Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις

2.3 Συνεκτικές συνιστώσες

Rosen - Discrete Mathematics

10.4 Connectivity, μέχρι την παράγραφο VERTEX CONNECTIVITY.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** Αποδείξτε ότι: αν το γράφημα  $G$  είναι συνεκτικό και το γράφημα  $G-e$  δεν είναι συνεκτικό, το  $G-e$  θα έχει μόνο δύο συνεκτικές συνιστώσες.
- 2** **α** Αποδείξτε ότι: μία κορυφή ενός άκυκλου συνεκτικού γραφήματος είναι κομβικό σημείο, αν και μόνο αν ο βαθμός της είναι τουλάχιστον 2.
- β** Αποδείξτε ότι: το άκρο μίας γέφυρας ενός συνεκτικού γραφήματος είναι κομβικό σημείο, αν και μόνο αν ο βαθμός του είναι τουλάχιστον 2.
- Βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα που έχει γέφυρα και δεν έχει κομβικό σημείο.
- 3** Βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα που έχει κομβικό σημείο και δεν έχει γέφυρα.
- 4** Αποδείξτε ότι: Η κορυφή  $a$  του συνεκτικού γραφήματος  $G$  είναι κομβικό σημείο, αν και μόνο αν: για κάθε ακμή  $\{a, u\}$  του  $G$ , υπάρχει ακμή  $\{a, v\}$  του  $G$ , έτσι ώστε να μην υπάρχει κύκλος του  $G$  όπου να εμφανίζονται και οι δύο αυτές ακμές.
- 5** **α** Έστω ότι το συνεκτικό γράφημα  $G$  έχει μία μοναδική γέφυρα  $e$ . Αποδείξτε ότι: μία συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος  $G-e$  δεν μπορεί να έχει γέφυρα.
- β** Βρείτε ένα συνεκτικό γράφημα  $G$  με ένα μοναδικό κομβικό σημείο  $a$ , όπου: υπάρχει μία συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος  $G-a$ , που έχει κομβικό σημείο.