ΘΕ1 – Βασικά Μαθηματικά

Μαθηματική επαγωγή

Συνηθισμένη μαθηματική επαγωγή

Η *αρχή της μαθηματικής επαγωγής* για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση Π(n) -- όπου n είναι ακέραια μεταβλητή -- είναι η παρακάτω:

Έστω ότι έχουμε τα εξής:

(α) Η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true σε κάποια *αρχική περίπτωση*, $n = α$.

(β) Για οποιοδήποτε (συγκεκριμένο) ακέραιο K όπου $K \geq α$, ισχύει το παρακάτω *επαγωγικό βήμα*:
<u>*θεωρώντας*</u> <u>*ως*</u> <u>*δεδομένη*</u> την *επαγωγική υπόθεση*, ότι:

η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true , για $n = K$,

επαληθεύεται το εξής *ζητούμενο*:

η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true , για $n = K+1$.

Με βάση τα (α , β) , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true , για κάθε $n \geq α$.

Γενική μαθηματική επαγωγή

Η *αρχή της γενικής μαθηματικής επαγωγής* για δεδομένη προτασιακή συνάρτηση Π(n) -- όπου n είναι ακέραια μεταβλητή -- είναι η παρακάτω:

Έστω ότι έχουμε τα εξής:

(α) Η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true σε κάποια *αρχική περίπτωση*, $n = α$.

(β) Για οποιοδήποτε (συγκεκριμένο) ακέραιο K όπου $K \geq α$, ισχύει το παρακάτω *επαγωγικό βήμα*:
<u>*θεωρώντας*</u> <u>*ως*</u> <u>*δεδομένη*</u> την *επαγωγική υπόθεση*, ότι:

η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true , για $α \leq n \leq K$,

επαληθεύεται το εξής *ζητούμενο*:

η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true , για $n = K+1$.

Με βάση τα (α , β) , μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Η προτασιακή συνάρτηση Π(n) έχει τιμή αλήθειας true , για κάθε $n \geq α$.

<u>Παράδειγμα 1</u> Να αποδειχτεί ότι: για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, $n! > (n/e)^n$ – όπου e είναι η γνωστή σταθερά, e=2,718... (βάση των φυσικών λογαρίθμων).

Χρησιμοποιούμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση « $n! > (n/e)^n$ » .

Αρχική περίπτωση Έστω $n = 1$: ισχύει ότι $1! > (1/e)^1$.

Επαγωγικό βήμα Παίρνουμε $n = K \geq 1$, και υποθέτουμε ότι ισχύει $K! > (K/e)^K$.

Πρέπει να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο,* $(K+1)! > ((K+1)/e)^{K+1}$.

Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε $(K+1)! > (K/e)^K (K+1)$, οπότε για το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $(K/e)^K (K+1) \geq ((K+1)/e)^{K+1}$, δηλαδή (μετά από πράξεις) ότι $e \geq (1+ (1/K))^K$, που ισχύει..

<u>Παράδειγμα 2</u> Η συνάρτηση fib(n) ορίζεται για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, αναδρομικά:

$fib(0) = fib(1) = 1$, και για $n \geq 2$, $fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)$.

Να αποδειχτεί ότι: για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, $fib(n) \geq (1.6)^{n-1}$.

Χρησιμοποιούμε την αρχή της γενικής μαθηματικής επαγωγής, για την προτασιακή συνάρτηση « $fib(n) \geq (1,6)^{n-1}$ » .

Αρχική περίπτωση Έστω $n = 0$: ισχύει ότι $fib(0) \geq (1,6)^{-1}$.

Επαγωγικό βήμα Υποθέτουμε ότι, για κάθε n στο διάστημα $0 \leq n \leq K$, ισχύει $fib(n) \geq (1,6)^{n-1}$.

Πρέπει να επαληθεύσουμε το *ζητούμενο,* $fib(K+1) \geq (1,6)^K$.

Για $K = 0$: ισχύει ότι $fib(1) \geq (1,6)^0$.

Για $K \geq 1$: από τον ορισμό της συνάρτησης fib έχουμε $fib(K+1) = fib(K) + fib(K-1)$.

Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε $fib(K) \geq (1,6)^{K-1}$, $fib(K-1) \geq (1,6)^{K-2}$, οπότε για το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι $(1,6)^{K-1} + (1,6)^{K-2} \geq (1,6)^K$, ότι δηλαδή (μετά από πράξεις) $(1,6)^1 + (1,6)^0 \geq (1,6)^2$, που ισχύει.

Σχετική βιβλιογραφία

<u>Κολουντζάκης – Διακριτά Μαθηματικά</u>

Κεφάλαιο 1: §1 Η μέθοδος στην απλή της μορφή

<u>Κοσμαδάκης – Διδακτικές σημειώσεις</u>

1.3 Επαγωγή

<u>Rosen - Discrete Mathematics</u>

5.1 Mathematical Induction

5.2 Strong Induction and Well-Ordering

5.3 Recursive Definitions and Structural Induction

5.4 Recursive Algorithms