Θεωρία Γραφημάτων και Εφαρμογές - Διακριτά Μαθηματικά ΙΙ
Φεβρουάριος 2017

ΕΓΘΑ : Σ. Κοσμαδάκης, «Εισαγωγή στα Γραφήματα, Θεωρία-Ασκήσεις».

Α

1 Έστω η παρακάτω σχέση Q(k) πάνω στο σύνολο {1, 2} – όπου k τυχαίος ακέραιος:
Q(k) = { (u, v) : u–v = k }.

α Βρείτε όλα τα ζεύγη που ανήκουν στις σχέσεις Q(0) , Q(1) , Q(2).

Για κάθε ακέραιο k , η σχέση Q(k) θα αποτελείται από τα ζεύγη (u, v) ,
όπου $u\in\{1, 2\}$, $v\in\{1, 2\}$, και u–v = k .

Έτσι: Q(0) = { (u, v) | $u\in\{1, 2\}$, $v\in\{1, 2\}$, u–v = 0 } = { (1, 1) , (2, 2) }

Q(1) = { (u, v) | $u\in\{1, 2\}$, $v\in\{1, 2\}$, u–v = 1 } = { (2, 1) }

Q(2) = { (u, v) | $u\in\{1, 2\}$, $v\in\{1, 2\}$, u–v = 2 } = { } (κενή σχέση) .

β Βρείτε ποιές από τις σχέσεις Q(0) , Q(1) , Q(2) , είναι μεταβατικές, και ποιές είναι συμμετρικές.

Μια σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *μεταβατική* αν:
όταν ισχύει x R y και y R z , θα ισχύει και x R z – βλέπε *ΕΓΘΑ* 1.2.

Για την Q(0) : ισχύει x Q(0) y και y Q(0) z , όταν x = y = z = 1 είτε x = y = z = 2 .
Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει και x Q(0) z , άρα <u>η Q(0) είναι μεταβατική</u>.

Για την Q(1) : δεν ισχύει x Q(1) y και y Q(1) z , για καμμία τριάδα
στοιχείων x , y , z του {1, 2} -- επειδή η μοναδική περίπτωση να έχουμε x Q(1) y
είναι x = 2 , y = 1 (από το 1α), και δεν υπάρχει z στο {1, 2} ώστε να έχουμε 1 Q(1) z .
Επομένως, δεν μπορεί να βρεθεί αντιπαράδειγμα για την μεταβατικότητα της Q(1).
Άρα, <u>η Q(1) είναι μεταβατική</u>.

Για την Q(2) : αφού η Q(2) είναι κενή, δεν υπάρχει τριάδα στοιχείων x , y , z του {1, 2}
που θα μπορούσε να αποτελέσει αντιπαράδειγμα για την μεταβατικότητα της Q(2).
Άρα, <u>η Q(2) είναι μεταβατική</u>.

Μια σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *συμμετρική* αν:
όταν ισχύει x R y , θα ισχύει και y R x – βλέπε *ΕΓΘΑ* 1.2.

Για την Q(0) : ισχύει x Q(0) y , όταν x = y = 1 είτε x = y = 2 .
Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει και y Q(0) x , άρα <u>η Q(0) είναι συμμετρική</u>.

Για την Q(1) : ισχύει 2 Q(1) 1 , και δεν ισχύει 1 Q(1) 2 .
Επομένως, το ζεύγος x = 2 , y = 1 είναι αντιπαράδειγμα για την συμμετρία της Q(1).
Άρα, <u>η Q(1) δεν είναι συμμετρική</u>.

Για την Q(2) : αφού η Q(2) είναι κενή, δεν υπάρχει ζεύγος στοιχείων x , y του {1, 2}
που θα μπορούσε να αποτελέσει αντιπαράδειγμα για την συμμετρία της Q(2).
Άρα, <u>η Q(2) είναι συμμετρική</u>.

2 Να αποδειχτεί ότι: για κάθε δέντρο G με μέγιστο βαθμό K, υπάρχει τρόπος να χρωματιστούν οι ακμές του G με K χρώματα (το πολύ), έτσι ώστε: τα χρώματα δύο οποιωνδήποτε ακμών με κοινό άκρο, να είναι διαφορετικά.

Νύξη Χρησιμοποιείστε την επαγωγή για τα δέντρα.

Για την επαγωγή για τα δέντρα, βλέπε *ΕΓΘΑ 3.1*.

Εργαζόμαστε όπως για την Πρόταση 3.1.2: αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι η ζητούμενη ιδιότητα ισχύει για όλα τα γραφήματα της υπο-κλάσης T(n), για κάθε $n \geq 1$.

Αρχική περίπτωση $n = 1$

Κάθε γράφημα στην T(1) έχει μόνο μία κορυφή και καμμία ακμή, οπότε ο μέγιστος βαθμός είναι 0. Αφού δεν υπάρχουν ακμές για να χρωματιστούν, το ζητούμενο ισχύει.

Επαγωγικό βήμα Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = i-1 \geq 1$.
Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = i$.

Αν το δέντρο G είναι στην T(i), $i>1$, θα είναι $G = (V\cup\{a\}, E\cup\{\{a, b\}\})$,
όπου $G' = (V, E)$ είναι δέντρο της υπο-κλάσης T(i−1), και $a \notin V$, $b \in V$.

Έστω K′ ο μέγιστος βαθμός του G′ και K ο μέγιστος βαθμός του G . Ο βαθμός της κορυφής b στο G είναι κατά 1 μεγαλύτερος από τον βαθμό της b στο G′. Άρα, $K \leq K'+1$ -- και προφανώς $K \geq K'$.

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει τρόπος να χρωματιστούν οι ακμές του G′ με K′ χρώματα (το πολύ), έτσι ώστε: τα χρώματα δύο οποιωνδήποτε ακμών του G′ με κοινό άκρο να είναι διαφορετικά.

Άν $K=K'+1$: Χρησιμοποιούμε ένα επιπλέον (νέο) χρώμα για την ακμή {a, b} του G.

Άν $K=K'$: Ο βαθμός της κορυφής b στο G′ θα είναι το πολύ $K-1$, οπότε θα υπάρχει ένα (τουλάχιστον) χρώμα από εκείνα που έχουν χρησιμοποιηθεί για το G′, που δεν θα εμφανίζεται σε καμμία από τις ακμές του G′ με άκρο την b. Αυτό το χρώμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ακμή {a, b} του G.

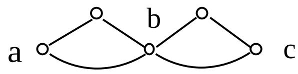
Σε κάθε περίπτωση, ο συνολικός αριθμός χρωμάτων των ακμών του G θα είναι το πολύ K.

B Σε κάθε ένα από τα παρακάτω ερωτήματα, βρείτε άν η αναφερόμενη ιδιότητα είναι *σωστή* ή *λάθος*.

1 Για κάθε γράφημα G, η παρακάτω σχέση R_κ ανάμεσα στις κορυφές του G, είναι μεταβατική:
$R_\kappa = \{ (u, v) :$ υπάρχει ένας κύκλος του G που περιέχει τις κορυφές u , v$\}$.

ΛΑΘΟΣ Στο παρακάτω γράφημα G, ισχύει $a\ R_\kappa\ b$ και $b\ R_\kappa\ c$, αλλά δεν ισχύει $a\ R_\kappa\ c$. Επομένως, η σχέση R_κ δεν είναι μεταβατική στο γράφημα G.

G:



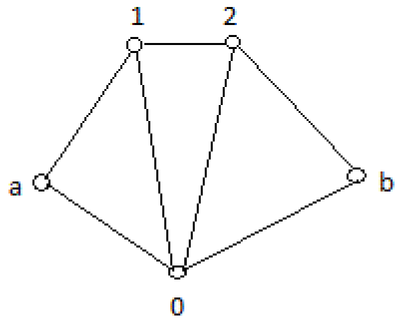
2 Άν μία κορυφή ενός γραφήματος G είναι κομβικό σημείο, δεν μπορεί να περιέχεται σε κύκλο του G .

ΛΑΘΟΣ Στο παραπάνω γράφημα G, η κορυφή b είναι κομβικό σημείο και περιέχεται σε δύο κύκλους.

3 Το άθροισμα δύο κύκλων που έχουν ακριβώς μία κοινή ακμή, θα είναι κύκλος.

ΛΑΘΟΣ Στο παρακάτω γράφημα Γ, οι κύκλοι (0, - , 1, - , 2, - , 0) και (0, - , a, - , 1, - , 2, - , b, - , 0) έχουν ακριβώς μία κοινή ακμή -- την {1, 2}. Το άθροισμα αυτών των δύο κύκλων είναι το γράφημα Γ *χωρίς την ακμή* {1, 2}, και δεν είναι κύκλος.

Γ :



4 Δύο διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς κορυφές ενός γραφήματος, δεν μπορούν να έχουν κοινή κορυφή.

ΛΑΘΟΣ Στο παραπάνω γράφημα G, καθένας από τους δύο κύκλους που υπάρχουν αποτελεί δισυνεκτική συνιστώσα ως προς κορυφές, και υπάρχει μία κορυφή -- η b -- που ανήκει και στις δύο συνιστώσες.

Γ Αποδείξτε τα παρακάτω.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε ιδιότητα από την θεωρία.

1 Άν ένα κατευθυνόμενο γράφημα περιέχει μία κλειστή διαδρομή, θα περιέχει και ένα κύκλο.

Έστω μία κλειστή κατευθυνόμενη διαδρομή $\delta = (a, e, a_1, e_1,..., a_n, e_n, a_{n+1})$, όπου $a_{n+1} = a$, $n \geq 1$. Θεωρούμε τη διαδρομή $(a_1, e_1,..., a_n, e_n, a_{n+1})$: επειδή $a_{n+1} = a \neq a_1$ (αλλοιώς η ακμή e θα ήταν βρόχος) *υπάρχει μονοπάτι* μ με αρχή την a_1 και τέλος την $a_{n+1} = a$ -- βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 2.2.1. Το μονοπάτι μ μαζύ με την ακμή $e = (a, a_1)$ σχηματίζουν ένα κατευθυνόμενο κύκλο.

Παρατήρηση Έστω ότι η διαδρομή δ είναι μη-κατευθυνόμενη. Άν το μονοπάτι μ έχει μόνο μία ακμή, αυτή θα ταυτίζεται με την ακμή e, οπότε σε αυτή την περίπτωση δεν σχηματίζεται κύκλος. Βλέπε και *ΕΓΘΑ Ασκήσεις* 2.5, 2.

2 Άν μία σχέση R, πάνω σε ένα σύνολο A, είναι μεταβατική, τότε η σχέση $R^{inv} = \{ (u, v) : v \, R \, u \}$, πάνω στο A, θα είναι μεταβατική.

Μια σχέση R πάνω σε ένα σύνολο A ονομάζεται *μεταβατική* αν:

όταν ισχύει x R y και y R z , θα ισχύει και x R z – βλέπε *ΕΓΘΑ* 1.2.

Η σχέση R^{inv} θα είναι μεταβατική πάνω στο A, άν:

όταν ισχύει $x \, R^{inv} \, y$ και $y \, R^{inv} \, z$, θα ισχύει και $x \, R^{inv} \, z$.

Αντικαθιστώντας την R^{inv} με τον ορισμό της βάσει της R, η προηγούμενη συνθήκη γίνεται:

όταν ισχύει y R x και z R y , θα ισχύει και z R x ,

που είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη

όταν ισχύει z R y και y R x , θα ισχύει και z R x .

Βλέπουμε ότι η τελευταία ισχύει, λόγω της μεταβατικότητας της σχέσης R.

3 Άν ένα γράφημα με m ακμές, n κορυφές και k συνεκτικές συνιστώσες δεν περιέχει κύκλο, θα είναι $m = n-k$.

Έστω $G_j = (V_j , E_j)$, j=1,...k , οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος G = (V, E).
Κάθε G_j είναι άκυκλο και συνεκτικό, οπότε

$$|E_j| = |V_j|-1 , \quad j=1,...k \tag{1}$$

(βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 3.1.2 (ii)).

Τα σύνολα V_j διαμερίζουν τις κορυφές του G – *ΕΓΘΑ* 2.3 – οπότε

$$n = \sum_{j=1,...k} |V_j| \tag{2}$$

Τα σύνολα E_j διαμερίζουν τις κορυφές του G – *ΕΓΘΑ* 2.3 και *Ασκήσεις* 2.5, 2 – οπότε

$$m = \sum_{j=1,...k} |E_j| \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) το $|E_j|$ βάσει της (1), και χρησιμοποιώντας την (2), βρίσκουμε

$$m = \sum_{j=1,...k} (|V_j|-1) = (\sum_{j=1,...k} |V_j|) - k$$
$$= n-k .$$

4 Άν ένα συνεκτικό γράφημα έχει γέφυρα, δεν είναι δισυνεκτικό ως προς ακμές.

Βλέπε *ΕΓΘΑ Απόδειξη της* 4.2.2.

Δ Αποδείξτε τα παρακάτω.
Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιαδήποτε ιδιότητα από την θεωρία.

1 Άν τα γραφήματα $G_1 = (V_1 , E_1)$ και $G_2 = (V_2 , E_2)$ έχουν τουλάχιστον δύο κοινές κορυφές και είναι δισυνεκτικά ως προς κορυφές, το γράφημα $G = (V_1 \cup V_2 , E_1 \cup E_2)$ θα είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές.

Καθένα από τα G_1, G_2 έχει (προφανώς) τουλάχιστον δύο κορυφές, και αφού είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές πρέπει να έχει τουλάχιστον τρείς. Επομένως, το G έχει τουλάχιστον τρείς κορυφές.
Για να δείξουμε ότι το G είναι δισυνεκτικό ως προς κορυφές, αρκεί να δείξουμε ότι δεν έχει κομβικό σημείο – βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.1.2 (2).
Έστω z μία οποιαδήποτε κορυφή του G: θα δείξουμε ότι το G–z είναι συνεκτικό, οπότε η κορυφή z δεν είναι κομβικό σημείο του G (*ΕΓΘΑ* 2.3).
Μπορούμε να δούμε ότι $G–z = (G_1–z) \cup (G_2–z)$.
Επειδή τα G_1 , G_2 είναι δισυνεκτικά ως προς κορυφές, δεν έχουν κομβικό σημείο – *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.1.2 (1) . Επομένως,τα γραφήματα $(G_1–z)$, $(G_2–z)$ είναι συνεκτικά. Ακόμη, τα $(G_1–z)$, $(G_2–z)$ έχουν (μία τουλάχιστον) κοινή κορυφή, αφού υπάρχει (μία τουλάχιστον) κορυφή που είναι κοινή στα G_1, G_2 και είναι διαφορετική από τη z. Άρα, το $(G_1–z) \cup (G_2–z)$ είναι συνεκτικό.

2 Κάθε ακμή ενός γραφήματος G, περιέχεται σε κάποια συνεκτική συνιστώσα του G.

Έστω e={a, b} μία ακμή του G.
Αφού υπάρχει διαδρομή από την a στη b, οι κορυφές a, b θα βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G (βλέπε *ΕΓΘΑ* 2.3).
Αφού κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι *επαγόμενο* υπογράφημα, η ακμή e θα περιέχεται στην συνεκτική συνιστώσα όπου περιέχονται τα άκρα της.

3 Κάθε συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και n+1 ακμές, περιέχει το πολύ τρείς κύκλους.

Οι στοιχειώδεις κύκλοι – *ΕΓΘΑ* 3.3 – ενός γραφήματος όπως στην υπόθεση, θα είναι όσες οι χορδές του γραφήματος ως προς κάποιο δέντρο επικάλυψης: δηλαδή, $(n+1)–(n–1) = 2$.
Σε οποιοδήποτε γράφημα, κάθε κύκλος είναι είτε στοιχειώδης είτε το άθροισμα κάποιων στοιχειωδών κύκλων – βλέπε *ΕΓΘΑ Πρόταση* 3.3.1. Άρα, στην περίπτωσή μας οι μόνοι δυνατοί κύκλοι είναι οι δύο στοιχειώδεις και το άθροισμά τους (άν είναι κύκλος).

4 Κάθε συνεκτικό γράφημα με *ακριβώς μία* γέφυρα, έχει *το πολύ δύο* δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές.

Έστω ότι κάποιο συνεκτικό γράφημα G έχει τουλάχιστον τρείς διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες ως προς ακμές. Θα δείξουμε ότι θα πρέπει να έχει δύο τουλάχιστον γέφυρες -- οπότε λόγω της υπόθεσής μας προκύπτει άτοπο.
Γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν κοινές κορυφές μεταξύ διαφορετικών δισυνεκτικών συνιστωσών ως προς ακμές – *ΕΓΘΑ Πρόταση* 4.2.4 : επομένως, επειδή το γράφημα G είναι συνεκτικό, θα έχει ακμές που συνδέουν διαφορετικές δισυνεκτικές συνιστώσες του G ως προς ακμές. Μπορούμε να δούμε ότι, για να είναι το G συνεκτικό, πρέπει να υπάρχουν δύο τουλάχιστον τέτοιες ακμές,.
Γνωρίζουμε ότι τα άκρα μίας ακμής δεν είναι στην ίδια δισυνεκτική συνιστώσα ως προς ακμές, αν και μόνο αν η ακμή είναι γέφυρα – *ΕΓΘΑ Άσκηση* 4.4. (18). Από τα προηγούμενα, το G πρέπει να έχει δύο τουλάχιστον γέφυρες.